

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.011

DOI: 10.21822/2073-6185-2021-48-3-117-132

Оригинальная статья / Original Paper

Оптимизация параметров шпренгельных балок с двумя стойками

А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Т.О. Устарханов

Дагестанский государственный технический университет,
367026 г. Махачкала, пр. И.Шамиля,70, Россия

Резюме. Цель. На основании теоретических результатов, полученных в [17], в настоящей статье проведён анализ влияния различных конструктивных параметров на собственный вес и стоимость металла шпренгельных балок с двумя стойками. Необходимо получить оптимальный параметр, позволяющий уменьшить расчётный изгибающий момент в сечении шпренгельной балки с двумя стойками. **Метод.** Путём выравнивания изгибающих моментов в различных расчётных сечениях шпренгельной балки обеспечивается уменьшение внутренних силовых факторов. **Результат.** Составлено соответствующее уравнение оптимизации параметров балки и получена формула для определения оптимального параметра конструкции в целом. На примере числовых вычислений показано уменьшение расчётного изгибающего момента на 14% по сравнению со шпренгельными балками без оптимизации. **Вывод.** Предлагаемые методика и алгоритм свидетельствуют об эффективности и рациональности полученного оптимального параметра конструкции.

Ключевые слова: шпренгельная балка, упруго-податливая опора, оптимальные параметры, алгоритм, дифференциальные уравнения, изгибающий момент

Для цитирования: А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Т.О. Устарханов. Оптимизация параметров шпренгельных балок с двумя стойками. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2021; 48 (3):117-132. DOI:10.21822/2073-6185-2021-48-3-117-132

Optimization of the parameters of truss beams with two posts

A.K. Yusupov, H.M. Muselemov, T.O. Ustarhanov

Daghestan State Technical University,
70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367026, Russia

Abstract. Objective. Based on the theoretical results obtained in the article [17], here the analysis of the influence of various design parameters on the own weight and cost of metal of truss beams with two posts is carried out. An optimal parameter has been obtained that makes it possible to reduce the calculated bending moment in the cross section of a truss beam with two struts. **Method.** By equalizing the bending moments in various design sections of the truss beam, the internal force factors are reduced. The corresponding equation for optimizing the parameters of the beam has been drawn up and a formula has been obtained to determine the optimal parameter of the structure as a whole. **Result.** Using the example of numerical calculations, a decrease in the calculated bending moment by 14% compared to truss beams without optimization is shown. **Conclusion.** The proposed method and algorithm testify to the efficiency and rationality of the obtained optimal parameter of the structure as a whole.

Keywords: truss beam, elastic-yielding support, optimal parameters, algorithm, differential equations, bending moment

For citation: A.K. Yusupov, H.M. Muselemov, T.O. Ustarhanov. Optimization of the parameters of truss beams with two posts. Herald of Daghestan State Technical University.

Technical Sciences. 2021; 48(3): 117-132. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2021-48-3-117-132.

Введение. Ранее, в проведенных нами исследованиях, была рассмотрена оптимизация параметров шпренгельных балок с одной стойкой. Были определены оптимальные параметры конструкции, которые приводят к существенному уменьшению собственного веса и стоимости металла. При этом с целью упрощения технологии изготовления конструкции предлагалось проектировать элементы шпренгельной балки из прокатанных профилей, не требующих технологических затрат [1-,6,8, 17, 18].

Шпренгельные балки с одной стойкой рациональны [17,18] на пролетах $l=12\div 18$ м. В практике проектирования и строительства часто встречаются пролёты, равные $l=(12\div 18)$ м [11-13]. На этих пролетах, как показывают наши исследования, рациональными являются шпренгельные балки с двумя стойками [1,16]. Однако в этом случае усложняется технология изготовления конструкции. Чтобы обеспечить простоту изготовления конструкции, мы предлагаем все элементы шпренгельных балок с двумя стойками выполнять из прокатных профилей постоянного сечения. Это существенно уменьшает технологические затраты на изготовление конструкции в целом.

Возникает вопрос: «Можно ли уменьшить собственный вес и стоимость металла путём оптимизации параметров шпренгельной балки с двумя стойками, как это удалось сделать в статьях [17,18] ?».

Постановка задачи. В данной статье приведен алгоритм определения оптимальных параметров шпренгельных балок с двумя стойками. Показана эффективность предлагаемого решения.

Рассмотрим шпренгельную балку с двумя стойками (рис. 1).

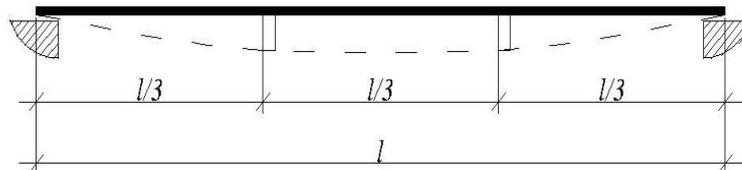


Рис.1. Конструктивная схема шпренгельной балки с двумя стойками

Fig. 1. Structural diagram of a truss girder with two posts

На рис. 1 пунктирными линиями показаны гибкие элементы, работающие только на растяжение (полосовая сталь, высокопрочная арматура, уголки и швеллеры малого калибра); обычными линиями обозначены жесткие элементы (стойки, работающие на центральное сжатие, и горизонтальный элемент, перекладина, работающий на поперечный изгиб со сжатием).

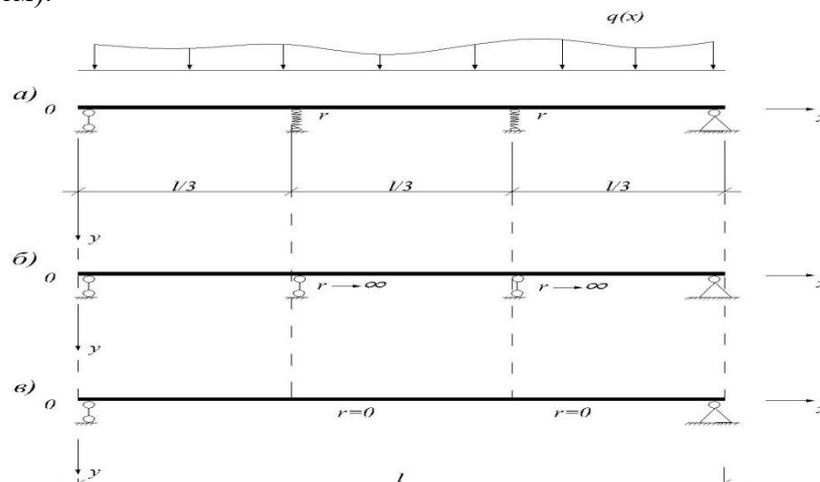


Рис. 2. Расчетные схемы шпренгельной балки с двумя стойками

Fig. 2. Design diagrams of truss girders with two posts

На рис. 2.а работу затяжек (рис. 1) моделирует упруго-податливые опоры с коэффициентом жесткости r ; на рис. 2.б показан случай, когда коэффициенты жесткости $r \rightarrow \infty$; на рисунке 2.в – другая крайность, $r = 0$, то есть шпренгельная балка (рис.1) вырождается в обычную балку, в балку без шпренгельных элементов [1,2].

Нагрузка $q(x)$, действующая на конструкцию (рис. 2.а), в общем случае меняется по пролету произвольно.

В практике проектирования и строительства нагрузку q часто принимают приближённо, равномерно распределенной [7,9,10] по прилёту, $q = const$.

Далее приведём эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, соответствующие расчётным схемам, приведённым на рис. 2. При этом примем $q = const$.

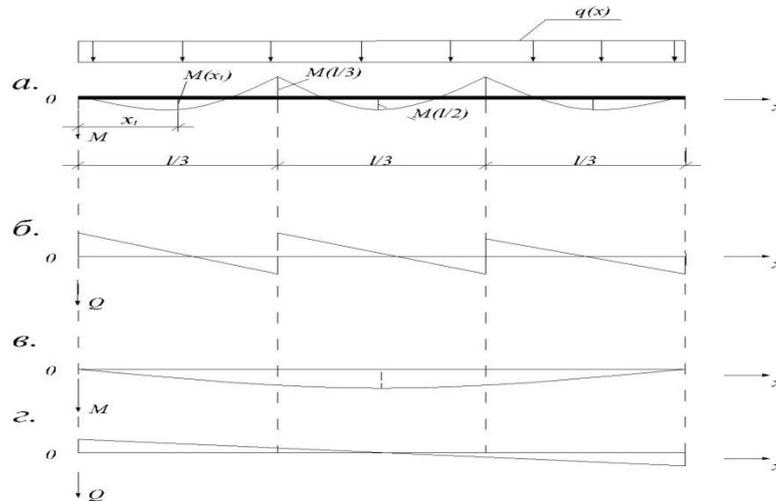


Рис. 3. Эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q
 Fig. 3. Diagrams of bending moments M and shear forces Q

На рис. 3.а и 3.б эпюры соответствуют расчётным схемам рис. 2.а и 2.б. Эпюры, показанные на рис. 3.в и 3.г, соответствуют расчётной схеме рис. 2.в по технологическим соображениям. Как уже указывалось выше, конструкция шпренгельной балки становится более эффективной, если перекладину (рис.1) проектировать постоянного сечения по пролету (в виде прокатного широкополочного двутавра или виде коробчатого сечения из двух швеллеров, или в виде гнуто-сварного профиля, ГСП).

При этом массу перекладины можно минимизировать, оптимизируя коэффициент жесткости r , который показан на рис. 2.а.

Далее, мы проведем теоретические исследования, позволяющие назначить коэффициент жесткости r из условий минимума массы перекладины, с постоянным сечением по пролету. Коэффициент жесткости упруго-податливых опор шпренгельной балки с двумя стойками зависит от конструктивных параметров.

Его можно определить по формуле:

$$r = \frac{E_3 \cdot A_3 \cdot h^2}{l_3^3} \quad (1)$$

где: E_3 , A_3 – соответственно, модуль упругости затяжки и площадь ее поперечного сечения; по рис. 1 длина косо́й затяжки

$$\sqrt{\left(\frac{l}{3}\right)^2 + h^2} \quad (2)$$

Методы исследования. Далее займемся исследованием работы перекладины шпренгельной балки. Опорные реакции упруго-податливых опор (рис 2.а) заменим

силами N_1 и N_2 и вместо расчетной схемы, приведенной на рис 2.а, рассмотрим схему, показанную ниже.

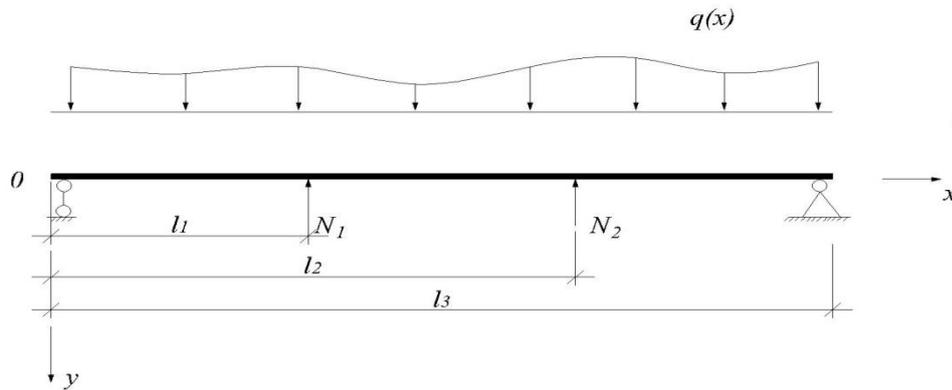


Рис. 4. Расчетная схема перекладины,

$$l_1 = \frac{l}{3}, \quad l_2 = \frac{2}{3}l, \quad l_3 = l$$

Fig. 4. Design diagram of the crossbar,

$$l_1 = l/3, \quad l_2 = 2/3l, \quad l_3 = l$$

Дифференциальное уравнение поперечного изгиба балки (перекладины), рис. (4), имеет вид

$$EJ \cdot y^{IV}(x) = q(x) - N_1 \cdot \delta(x - l_1) - N_2 \cdot \delta(x - l_2). \quad (3)$$

где:

EJ – жесткость сечения балки при изгибе, величина постоянная по пролету;

$y = y(x)$ – функция прогибов балки;

$q(x)$ – заданная нагрузка, действующая на балку, в общем случае – произвольная;

$\delta(x - l_i)$ – дельта функция;

N_1, N_2 – силы отпора (рис. 4), пока неизвестные.

Решение уравнения (3) представим в интегральной форме [14]:

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) \cdot [q(\xi) - N_1 \delta(\xi - l_1) - N_2 \delta(\xi - l_2)] d\xi$$

или

$$y(x) = y_0(x) - N_1 \cdot G(x, l_1) - N_2 \cdot G(x, l_2), \quad (4)$$

где

$$y_0(x) = \int_0^l G(x, \xi) \cdot q(\xi) \cdot d\xi, \quad (5)$$

$G = G(x, \xi)$ – функция Грина, которая выражается с помощью полиномов [14]:

$$G(x, \xi) = [1 - e(x - \xi)] \cdot G(x, \xi) + e(x - \xi)G(x, \xi). \quad (6)$$

Здесь введены обозначения:

единичная функция

$$e(x, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq \xi, \\ 0, & \text{при } x < \xi; \end{cases} \quad (7)$$

$$G_1(x, \xi) = -\frac{1}{EJ} \cdot \left[\left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \cdot \frac{x^3}{6} + A \cdot x \right], \quad (8)$$

$$G_2(x, \xi) = -\frac{1}{EJ} \cdot \left[-\frac{\xi}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{\xi}{2} \cdot x^2 + B \cdot x + D \right], \quad (9)$$

$$A = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi \cdot l}{3} - \frac{\xi^3}{6l}, \quad D = \frac{\xi^3}{6}, \quad B = -\frac{\xi \cdot l}{3} - \frac{\xi^3}{6l}.$$

Вернемся к функции прогибов (4). С целью определения неизвестных сил N_1 и N_2 введём модель Винклера [15]:

$$N_1 = r \cdot y(l_1), \quad N_2 = r \cdot y(l_2), \quad (10)$$

где $y(l_1)$ и $y(l_2)$ – вертикальные перемещения (прогибы) балки при $x = l_1$ и $x = l_2$, (рис. 4),

r - коэффициент жесткости (1).

Из выражения (4) найдем

$$\begin{aligned} y(l_1) &= y_0(l_1) - N_1 G \cdot (l_1, l_1) - N_2 G \cdot (l_1, l_2) \\ y(l_2) &= y_0(l_2) - N_1 G \cdot (l_2, l_1) - N_2 G \cdot (l_2, l_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Пользуясь формулой (5), определим

$$\begin{aligned} y(l_1) &= \int_0^l G(l_1, \xi) \cdot q(\xi) d\xi, \\ y(l_2) &= \int_0^l G(l_2, \xi) \cdot q(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя прогибы (11) в равенство (10), получаем систему 2-х алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} N_1 \left[G(l_1, l_1) + \frac{1}{r} \right] + N_2 G \cdot (l_1, l_2) &= y_0(l_1), \\ N_1 G \cdot (l_2, l_1) + N_2 \left[G(l_2, l_2) + \frac{1}{r} \right] &= y_0(l_2), \end{aligned} \quad (13)$$

Решив эту систему относительно неизвестных, получим

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{y_0(l_2) \cdot a_{12} - y_0(l_1) \cdot \left(a_{22} + \frac{1}{r}\right)}{a_{12} \cdot a_{21} - \left(a_{11} + \frac{1}{r}\right) \cdot \left(a_{22} + \frac{1}{r}\right)}, \\ N_2 &= \frac{y_0(l_1) \cdot a_{21} - y_0(l_2) \cdot \left(a_{11} + \frac{1}{r}\right)}{a_{12} \cdot a_{22} - \left(a_{11} + \frac{1}{r}\right) \cdot \left(a_{22} + \frac{1}{r}\right)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$a_{11} = G(l_1, l_1), \quad a_{12} = G(l_1, l_2), \quad (15)$$

$$a_{21} = G(l_2, l_1), \quad a_{22} = G(l_2, l_2).$$

Теперь функция прогибов (4) вполне определена. Изгибающие моменты и поперечные силы легко выражаются известными формулами:

$$M(x) = -EJ \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = -EJ \cdot \frac{d^3 y(x)}{dx^3}. \quad (16)$$

Подставляя функции (4) и (5) в равенство (16), имеем

$$M(x) = -EJ \cdot \left[y_0''(x) - N_1 \frac{\partial^2 G(x, l_1)}{\partial x^2} - N_2 \frac{\partial^2 G(x, l_2)}{\partial x^2} \right], \quad (17)$$

$$Q(x) = -EJ \cdot \left[y_0'''(x) - N_1 \frac{\partial^3 G(x, l_1)}{\partial x^3} - N_2 \frac{\partial^3 G(x, l_2)}{\partial x^3} \right], \quad (18)$$

где N_1 и N_2 даны формулами (14).

Выше мы привели выражение (18) для определения внутренних усилий M и Q в сечениях перекладины. Кроме этих усилий в перекладине возникает усилия и сжатия F . Далее мы излагаем методику определения усилий F .

Рассмотрим равновесие нижнего левого узла шпренгельной балки (рис.1), приведенного на рис. (5)

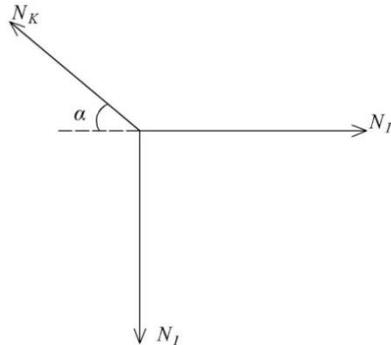


Рис. 5. Схема действия усилий
Fig. 5. Scheme of action of efforts

где N_r – усилие в горизонтальной затяжке

N_k – усилие в косой затяжке формулой

N_1 – усилия в стойке, определяемые формулой (14).

Горизонтальная затяжка из-за различия в усилиях N_1 и N_2 (14) не вполне горизонтальна. Влияние этого фактора на усилия N_r, N_k мы можем учесть.

Однако здесь делать этого не будем в силу его незначительности. Поэтому горизонтальную затяжку будем считать приближенно - горизонтальной.

С учетом этого проектируя все силы на вертикаль (рис. 5), будем иметь:

$$N_1 = N_k \cdot \sin \alpha.$$

Отсюда

$$N_k = \frac{N_1}{\sin \alpha}, \quad (19)$$

где

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{l}{3}\right)^2 + h^2}}.$$

Высота h показана на рис. 1,

N_1 – определена формулой 14.

Теперь, проектируя все силы на горизонталь (рис. 5), запишем

$$N_r = N_k \cdot \cos \alpha.$$

С учетом формулы (19) последнее представим так:

$$N_r = N_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = N_1 \cdot \cotg \alpha, \quad (20)$$

где $\cotg \alpha = \frac{l}{3h}$, (рис. 1.)

Далее рассмотрим равновесие левого опорного узла (рис. 1).

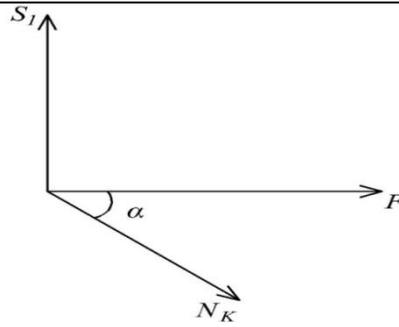


Рис. 6. Схема действия усилий
Fig. 6. Scheme of action of efforts

Проектируя силы на горизонталь (рис.6), будем иметь

$$F + N_k \cdot \cos a = 0$$

или

$$F = -N_k \cdot \cos a = -N_1 \cdot \cot g a, \quad (21).$$

где

$$\cos a = \frac{\frac{l}{3}}{\sqrt{\left(\frac{l}{3}\right)^2 + h^2}}.$$

Здесь знак минус указывает на то, что перекладина сжата силой F .

Сравнивая формулу (20) и (21), приходим к выводу:

Усилие N_r (рис.5) и усилие F (рис. 6) равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Такой вывод очевиден.

Проектируя на вертикаль все силы (рис. 6), находим

$$S_1 = N_k \cdot \sin a, \quad (22)$$

где N_k дается формулой (19).

Поперечная сила Q_0 в опорном сечении перекладины равна

$$Q_0 = F_{on} - S_1,$$

где F_{on} – опорная реакция шпренгельной балки на левой опоре.

При $q = const$ $F_{on} = \frac{ql}{2}$.

В других случаях опорные реакции мы определяем из условия равновесия всей шпренгельной балки при произвольной $q(x)$ (по обычным правилам). Поперечную силу Q_0 можно определить и из формулы (18), приняв $x = 0$.

Таким образом, мы располагаем выражениями для определения внутренних усилий в элементах шпренгельной балки (рис. 1).

Эти выражения даны формулами (18) (в общем случае) или формулами (48) (в частном случае) и равенствами (19), (20), (21).

Далее рассмотрим пример вычисления внутренних усилий. В соответствии с рис. 2 и 4 примем

$$l_1 = \frac{l}{3}, \quad l_2 = \frac{2 \cdot l}{3}.$$

Нагрузку q (рис. 3) распределим по пролету равномерно, $q = const$.

Такая схема часто встречается в практике проектирования и изготовления шпренгельных балок с двумя стойками. В первую очередь упростим формулы (14). С этой целью определим функцию $y_0(x)$.

При $q = const$ из формулы (5) имеем

$$y_0(x) = \int_0^l G(x, \xi) \cdot q(\xi) d\xi = q \cdot \int_0^l G(x, \xi) d\xi. \quad (23)$$

Подставляя функцию Грина (6) в интеграл (23), с учетом выражений (7),(8),(9), запишем

$$y_0(x) = q \cdot \int_0^x G_2(x, \xi) \cdot q(\xi) d\xi + q \cdot \int_0^l G_1(x, \xi) \cdot d\xi. \quad (24)$$

Теперь, внося подынтегральные выражения (24), функции (8 и 9), и выполняя интегрирование, находим

$$y_0(x) = -\frac{q}{EJ} \cdot \left(\frac{lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{l^3x}{24} \right). \quad (25)$$

Отсюда:

$$J_0(l_1) = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{11}{12 \cdot 3^4};$$

$$J_0(l_2) = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{11}{12 \cdot 3^4}. \quad (26)$$

Из формулы (26) следует, что $J_0(l_1) = J_0(l_2)$.

Это говорит о правильности вычислений.

Далее необходимо определить величины (15). Как и ранее, принимаем

$$l_1 = \frac{l}{3}, \quad l_2 = \frac{2 \cdot l}{3}, \quad q = const.$$

Из выражений (6 - 9) найдем

$$G(l_1, l_2) = \frac{7}{6 \cdot 3^4} \cdot \frac{l^3}{EJ},$$

$$G(l_2, l_1) = \frac{7}{6 \cdot 3^4} \cdot \frac{l^3}{EJ}, \quad (27)$$

$$G(l_1, l_1) = \frac{4}{3 \cdot 3^4} \cdot \frac{l^3}{EJ},$$

$$G(l_2, l_2) = \frac{4}{3 \cdot 3^4} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Из равенства (27) следует, что

$$G(l_1, l_2) = G(l_2, l_1),$$

$$G(l_2, l_2) = G(l_1, l_1).$$

Такие соотношения – естественны, когда нагрузка $q = const$, а промежуточные упруго-податливые опоры (рис. 2.a) – симметричны относительно середины пролета шпренгельной балки.

При значениях (26 и 27) из дробей (14) следует, что $N_1 = N_2$.

Подставляя выражения (26 и 27) в первую дробь из (14) и выполняя некоторые преобразования, будем иметь:

$$N_1 = N_2 = \frac{-q \cdot l \frac{11}{12 \cdot 3^4} \cdot \left(k + \frac{1}{6 \cdot 3^4}\right)}{\left(\frac{7}{6 \cdot 3^4}\right)^2 - \left(k + \frac{1}{3 \cdot 3^4}\right)}, \quad (28)$$

где
$$k = \frac{EJ}{r \cdot l^3}, \quad (29)$$

r – коэффициент жесткости (1).

Далее рассмотрим два частных случая:

1. при $r = 0$, $k \rightarrow \infty$ из равенства (28) следует, что $N_1 = N_2 = 0$;
2. при $r \rightarrow \infty$, $k = 0$ из равенства (24) получим

$$N_1 = N_2 = \frac{ql}{30} \cdot 11. \quad (30)$$

В общем случае, когда коэффициенты r и k – произвольные и реакции упруго-податливых опор (при $l_1 = \frac{l}{3}$, $l_2 = \frac{2 \cdot l}{3}$, $q = const$), значения N_1 и N_2 определяются по формуле (28). Эту формулу с достаточно высокой точностью можно представить приближенно так:

$$N_1 = N_2 = \frac{-ql \cdot \left(\frac{1}{80} \cdot k + \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{486}\right)}{-\left(k^2 + \frac{1}{30}k + \frac{1}{565}\right)}$$

или

$$N_1 = N_2 \approx \frac{\frac{1}{80}qlk}{k^2 + \frac{1}{30}k} \approx \frac{ql}{2,7 + 80k},$$

Далее примем

$$N_1 = N_2 = \frac{ql}{2,7 + 80k}. \quad (31)$$

При $k = 0$ из (31) имеем $N_1 = N_2 = \frac{ql}{2,7}$.

Эта величина совпадает со значением $N_1 = N_2$, которое дано формулой (30). При $k \rightarrow \infty$ ($r = 0$) из (31) следует, что $N_1 = N_2 = 0$.

Такой вывод вытекает и из формулы (28).

Далее вернёмся к равенствам (17) и (18). Пользуясь выражениями (6 - 9) и (25), найдем производные функций, входящих в равенства (17) и (18). Пропуская промежуточные операции, приводим окончательные выражения:

$$\begin{cases} y_0''(x) = -\frac{q}{EJ} \left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right), \\ y_0'''(x) = -\frac{q}{EJ} \left(\frac{l}{2} - x\right). \end{cases} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 G(x, \varepsilon)}{\partial x^2} = [1 - e(x - \xi)] \cdot \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + e(x - \xi) \cdot \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial^3 G(x, \varepsilon)}{\partial x^3} = [1 - e(x - \xi)] \cdot \frac{\partial^3 G_1}{\partial x^3} + e(x - \xi) \cdot \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^3}.$$

Здесь:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \cdot x, \quad \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} = -\frac{1}{EJ} \left(-\frac{\xi}{l}x + \xi\right), \quad \frac{\partial^3 G_1}{\partial x^3} = -\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right), \quad \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^3} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{\xi}{l}. \quad (34)$$

При $\xi = l_1$ и $\xi = l_2$ из формул (23) и (34) имеем:

$$\frac{\partial^2 G(x, l_1)}{\partial x^2} = [1 - e(x - l_1)] \cdot \left[-\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) x \right] + e(x - l_1) \left[-\frac{1}{EJ} \left(-\frac{l_1}{l} x + l_1 \right) \right], \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 G(x, l_2)}{\partial x^2} = [1 - e(x - l_2)] \left[-\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) x \right] + e(x - l_2) \left[-\frac{1}{EJ} \left(-\frac{l_2}{l} x + l_2 \right) \right].$$

$$\frac{\partial^3 G(x, l_1)}{\partial x^3} = [1 - e(x - l_1)] \left[-\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) \right] + e(x - l_1) \left(\frac{1}{EJ} \cdot \frac{l_1}{l} \right),$$

$$\frac{\partial^3 G(x, l_2)}{\partial x^3} = [1 - e(x - l_2)] \left[-\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) \right] + e(x - l_2) \left(\frac{1}{EJ} \cdot \frac{l_2}{l} \right). \quad (36)$$

Теперь внутренние усилия в сечениях перекладины шпренгельной балки (рис. 3) вполне определены формулами (17) и (18), (35) и (36).

Далее мы переходим к определению оптимального значения коэффициента k (29).

С этой целью найдём координату $x = x_1$ (рис.3.a), при которой изгибающий момент на первом пролёте имеет максимальное значение. Эту координату ($x = x_1$) можно вычислить из условия

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0. \quad (37)$$

Производная функции моментов даётся выражением (18). Подставляя функции (32) и (36) в равенство (18), а полученное – в условие (37), с учётом свойств функции (7), запишем уравнение

$$q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - N_1 \cdot \left(\frac{l_1}{l} + \frac{l_2}{l} \right) = 0$$

или с учётом равенства (31)

$$\frac{l}{2} - x - \frac{l}{2,7+80 \cdot K} = 0. \quad (38)$$

Отсюда

$$x = x_1 = \frac{l}{2} - \frac{l}{2,7+80 \cdot K}.$$

Введём обозначение

$$z = \frac{1}{2,7+80 \cdot K} \quad (39)$$

Тогда $x = x_1 = l \left(\frac{1}{2} - z \right).$ (40)

При $k = 0$ ($r \rightarrow \infty$)

$$x_1 = \frac{l}{2} - \frac{l}{2,7} = l \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2,7} \right) = \frac{l}{7,7}.$$

При значении $x = x_1$ (формула 40) изгибающие моменты на первом пролёте шпренгельной балки (рис.3.a) имеют максимальное значение. Вычислим $M(x_1)$. Подставляя (25), (34) и (35) в равенство (17), находим при $x < l_1$:

$$M(x) = q \cdot \left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2} \right) - N_1 \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) x - N_2 \cdot \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) x.$$

Это выражение упростим с учётом формулы (31) и обозначения (39):

$$M(x) = q \cdot \left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2} \right) - qlzx. \quad (41)$$

Максимальное значение этого момента найдём по формуле (40), приняв $x = x_1$.
 С учётом выражения (40) из равенства (41) определим

$$M(x_1) = \frac{ql^2}{2} \cdot \left(z^2 - z + \frac{1}{4} \right). \quad (42)$$

Из рис. 3.а следует, что наибольшее значение изгибающего момента возникает в сечении перекладины над упруго-податливыми опорами. Вычислим $M\left(\frac{l}{3}\right)$ (рис.3.а). Воспользуемся, как и ранее, выражением (17). Из равенства (32) найдём:

$$y_0''\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{9 \cdot EJ}. \quad (43)$$

Из выражения (35) при $x = l_1$, $l_1 < l_2$ вычислим:

$$\left. \frac{\partial^2 G(x, l_1)}{\partial x^2} \right|_{x=l_1} = -\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) l_1, \quad (44)$$

$$\left. \frac{\partial^2 G(x, l_2)}{\partial x^2} \right|_{x=l_1} = -\frac{1}{EJ} \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) l_1. \quad (45)$$

Из (44) и (45) при $l_1 = \frac{l}{3}$, $l_2 = \frac{2}{3}l$, найдём:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 G(x, l_1)}{\partial x^2} \right|_{x=l_1} = -\frac{2l}{9 \cdot EJ}, \\ \left. \frac{\partial^2 G(x, l_2)}{\partial x^2} \right|_{x=l_2} = -\frac{l}{9 \cdot EJ}. \end{cases} \quad (46)$$

Теперь, подставляя выражения (43) и (46) в равенство (17), находим:

$$M\left(\frac{l}{3}\right) = -EJ \left(-\frac{ql^2}{9 \cdot EJ} + N_1 \frac{2l}{9 \cdot EJ} + N_2 \frac{l}{9 \cdot EJ} \right).$$

Это равенство с учётом формулы (31) и обозначения (39). Запишем так:

$$M\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{9} \cdot (3z - 1). \quad (47)$$

При $r \rightarrow \infty$, $k = 0$ по формуле (39) найдем, что $z = \frac{1}{2,72}$, точное значение $z = \frac{11}{30}$.

Для этого случая формула (47) даёт

$$M\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{9} \cdot \left(\frac{3 \cdot 11}{30} - 1 \right) = -\frac{ql^2}{90}.$$

Мы получили известное решение. Это говорит о правильности выбора алгоритма исследования.

В середине второго пролёта (рис. 3.а) изгибающие моменты меньше значения $M(x_1)$ – формула (42). Поэтому расчётными моментами служат $M(x_1)$ и $M\left(\frac{l}{3}\right)$ – формулы (42) и (47). Выпишем эти формулы:

$$\begin{cases} M(x_1) = \frac{ql^2}{2} \cdot \left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right), \\ M\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{9} \cdot (3z - 1). \end{cases} \quad (48)$$

Здесь параметр z определяется равенством (39), а коэффициент k – обозначением (29).

Таким образом, мы имеем два расчётных сечения: первое – на первом пролёте, в сечении $x = x_1$; второе – над упруго-податливой опорой (рис. 3.а). Соответствующие значения расчётных моментов даны формулами (48).

Далее необходимо говорить о конструировании. Поскольку расчётные изгибающие моменты (48) различны по своей величине, мы имеем два подхода к конструированию перекладины шпренгельной балки (рис. 1).

С целью уменьшения собственного веса конструкции (экономии металла) перекладину можно проектировать переменного сечения: на участках с большими изгибающими моментами сечение можно взять с большой высотой и, наоборот, – с меньшей высотой, где моменты незначительны. Такой подход позволяет уменьшить вес конструкции, сэкономить металл и снизить стоимость затрачиваемого металла. Однако при этом усложняется технология изготовления конструкции и возрастает стоимость технологических затрат. Всё это существенно снижает эффективность шпренгельных балок. Поэтому мы предлагаем здесь другой подход к конструированию.

С целью уменьшения технологических затрат и упрощения изготовления конструкции перекладины рационально назначать её сечение постоянным по всему пролёту шпренгельной балки (в виде прокатного широкополочного двутавра, или в виде коробчатого сечения из 2- прокатных швеллеров на сварных швах, или в виде гнуто-сварного профиля, ГСП).

При этом с целью экономии металла, снижения собственного веса конструкции, параметр z , входящий в формулы (48), можно оптимизировать: меняя его значения, добиться равенства (по абсолютной величине) расчётных изгибающих моментов (48).

Другими словами, варьируя значением параметра z , можно перераспределить изгибающие моменты: разгрузить перегруженные участки и догрузить недогруженные. Это позволит уменьшить расчётный изгибающий момент, то есть позволит уменьшить сечение перекладины, снизить затраты металла. Далее мы займёмся этим вопросом подробно.

Условие минимума расхода металла на перекладину, при постоянном её сечении по всему пролёту шпренгельной балки, запишем в виде:

$$M(x_1) = \left| M\left(\frac{l}{3}\right) \right|. \quad (49)$$

Подставляя в условие (49) изгибающие моменты (48), получаем уравнение:

$$\frac{ql^2}{2} \cdot \left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) = \frac{ql^2}{9} \cdot (3z - 1).$$

Упростив это уравнение, будем иметь:

$$z^2 - \frac{5}{3}z + \frac{17}{4 \cdot 9} = 0. \quad (50)$$

Корни этого уравнения:

$$z_1 = \frac{5 + \sqrt{8}}{6}, \quad z_2 = \frac{5 - \sqrt{8}}{6}. \quad (51)$$

Далее из равенства (39) определим:

$$k = \frac{1 - 2,7 \cdot z}{80 \cdot z}. \quad (52)$$

При $z = z_1 = \frac{5 + \sqrt{8}}{6}$ (формула (51)) – коэффициент k (52) получается отрицательным.

Поскольку этот коэффициент по своему смыслу (29) – величина сугубо положительная, то корень $z = z_1$ мы отбрасываем и принимаем корень

$$z = z_2 = \frac{5 - \sqrt{8}}{6} \approx 0,3625.$$

Обсуждение результатов. Из равенства (52) находим

$$k = \frac{1 - 2,7 \cdot 0,362}{80 \cdot 0,362} \approx 0,7 \cdot 10^{-3}. \quad (53)$$

С учётом (53) равенство (29) запишем так:

$$\frac{EJ}{r \cdot l^3} = k = 0,69 \cdot 10^{-3} \quad (54)$$

или

$$r = \frac{EJ}{l^3 \cdot 0,7 \cdot 10^{-3}}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (1), получаем

$$\frac{E_3 \cdot A_3 \cdot h^2}{l_3^3} = \frac{EJ}{l^3 \cdot 0,7 \cdot 10^{-3}}, \quad (55)$$

где l_3 – даётся формулой (2).

Если пролёт l шпренгельной балки (рис.1) диктуется условиями эксплуатации (назначением конструкции), то в распоряжении проектировщика остаются параметры A_3, h .

Варьируя этими параметрами, можно обеспечить выполнение условия (55), то есть можно обеспечить экономию металла, уменьшить собственный вес конструкции в целом и стоимость затрачиваемого металла, при сохранении постоянства сечения перекладины по всему пролёту балки.

Для наглядности рассмотрим изменения расчётных изгибающих моментов (48) в зависимости от параметра z . При $z = \frac{11}{30}$ коэффициент k , определяемый формулой (52), равен нулю, то есть при $z = \frac{11}{30} = \frac{1}{2,72}$ коэффициент $k=0$, а коэффициент жесткости (25) упруго-податливой опоры $r \rightarrow \infty$.

Это – случай расчетной схемы по упрощённой модели (рис. 2.б). Вычислим по формулам (48) соответствующие этой схеме изгибающие моменты, приняв $z = \frac{11}{30} = \frac{1}{2,72} = 0,36666$.

$$\begin{cases} M(x_1) = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{64}{900} = \frac{ql^2}{112,5} \\ M\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{9} \cdot \frac{1}{10} = -\frac{ql^2}{90} \end{cases}$$

Из этих значений видно, что перекладина перегружена над упруго-податливой опорой (рис. 3.a) и недогружена в сечении $x = x_1$.

Теперь уменьшим коэффициент z , приняв его, равным оптимальному значению $z = z_2 = 0,362$.

При $z=0,362$ из выражений (48) найдём:

$$\begin{cases} M(x_1) = \frac{ql^2}{105,26} \\ M\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{104,64} \end{cases} \quad (56)$$

Вывод. При $z = 0,362$ изгибающие моменты $M(x_1)$ и $M\left(\frac{l}{3}\right)$ по абсолютной величине выравнились: на перегруженном участке (над упруго-податливой опорой, рис. 3.a) момент с величины $M\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{90}$ уменьшился (по абсолютной величине) до $-\frac{ql^2}{104,64}$.

И, наоборот, на недогруженном участке, при $x = x_1$ (рис. 3.a), изгибающий момент увеличился с $\frac{ql^2}{112,5}$ до $\frac{ql^2}{105,26}$.

Отсюда следует вывод: при $z = 0,362$ и $q = const$ расчётный изгибающий момент уменьшается на 14%.

Библиографический список:

1. Акаев Н.К., Юсупов А.К. Алгоритм расчета шпренгельных подкрановых балок. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2016; 42(3): 119-131. DOI:10.21822/2073-6185-2016-42-3-119-131.
2. Ажермачев С.Г. Приближенный метод расчета шпренгельных подкрановых балок. Строительство и техногенная безопасность. Выпуск 37, 2011 г. С.34-39.
3. Клыков В.М., Я.М. Лихтарников. Расчет стальных конструкций. М–75г. С.30-41.
4. Ливановский Н.Н., Богатырева И.В. Усиление железобетонных балок шпренгельными затяжками и вложенными шпренгелями. XII международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук» Россия, Томск, 21-24 апреля 2015 г. С.1338-1340.
5. Муселемов Х.М., Устарханов О.М., Юсупов А.К. Разработка и исследование шпренгельных балок новой раскройки. V Международная научно-практической конференции "Научные исследования: от теории к практике". Технические науки. Том 2. Г. Чебоксары. 2015. С.62-70.
6. Металлические конструкции. под ред. Е.И. Беленя, Москва, Стройиздат, 1986 г. С.382-384.
7. Металлические конструкции. под ред. Ю.И. Кудишина, Москва, Академия, 2011г. С.439-442.
8. Пат. 130333 РФ. МПК E04G 23/02. Шпренгель для усиления и обеспечения живучести изгибаемого железобетонного элемента / В.С. Плевков, Г.И. Однокопылов, И.В. Богатырева. Заявлено 08.02.2013; Опубл. 20.07.2013, Бюл. № 20. – 5 с.
9. Стальные конструкции. Справочник конструктора. Под ред. Мельникова Н.П. М.: Стройиздат, 1980. С.195-196.
10. СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции». М.: Стандартинформ, 2017. АО "НИЦ "Строительство" – ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 92 с.
11. Устарханов О.М., Юсупов А.К., Муселемов Х.М. Шпренгельные подкрановые балки. Махачкала: ДГТУ, 2016. 120 с.
12. Ф. Харт (Мюнхен), В. Хенн (Брауншвайг), Х. Зонтаг (Берлин), Москва, Стройиздат, 1977г. «Атлас стальных конструкций». С. 37-84
13. Юсупов А.К. «Металлические конструкции в вопросах, в ответах и в проектировании». Махачкала, Дагестанский государственный технический университет. ГУП «Типография ДНЦ РАН», 2010.

14. Юсупов А.К. «Методы прикладной математики в строительной механике», том 1. Махачкала, Дагестанский государственный технический университет. ГУП «Типография ДНЦ РАН», 2008.
15. Юсупов А.К. «Методы прикладной математики в строительной механике», том 4. Махачкала, Дагестанский государственный технический университет. ГУП «Типография ДНЦ РАН», 2008.
16. Юсупов А.К., Муселемов Х.М., Устарханов Т.О., Джалалов Ш.Г. «Исследование металлодеревянной балки». «Вестник Машиностроения», №12, 2019
17. Юсупов А.К., Муселемов Х.М., Устарханов Т.О. Оптимизация параметров шпренгельной балки. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020; 47(4): 119-131. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-119-131.
18. Юсупов А.К., Муселемов Х.М., Устарханов Т.О. Эффективность шпренгельных балок с оптимальными параметрами. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2021; 48 (1):141-153. DOI:10.21822/2073-6185-2021-48-1-141-153

References:

1. Akayev N.K., Yusupov A.K. [Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki] *Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences.* 2016; 42(3): 119-131. DOI:10.21822/2073-6185-2016-42-3-119-131. (In Russ)]
2. Azhermachev S.G. Approximate method for calculating truss crane beams. [Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost]. *Construction and man-made safety.* 2011; 37: 34-39. (In Russ)]
3. Klykov V.M., YA.M. Likhtarnikov Calculation of steel structures M.:75; 30-41. (In Russ)
4. Livandovskiy N.N., Bogatyreva I.V. Reinforcement of reinforced concrete beams with truss ties and embedded trusses. XII International Conference of Students and Young Scientists "Prospects for the Development of Fundamental Sciences" Russia, Tomsk, April 21-24, 2015;1338-1340. (In Russ)
5. Muselemov KH.M., Ustarkhanov O.M., Yusupov A.K. Development and research of new cut truss beams. V International scientific-practical conference "Scientific research: from theory to practice". Technical science. G. Cheboksary. 2015; 2:62-70. (In Russ)
6. Metal structures. Edited by E.I. Belenya, Moscow, Stroyizdat, 1986; 382-384. (In Russ)
7. Metal structures. Edited by Yu.I. Kudishina, Moscow, Academy, 2011; 439-442. (In Russ)
8. Pat. 130333 RF. MPK E04G 23/02. Shprengel' dlya usileniya i obespecheniya zhivuchesti izgibayemogo zhelezobetonnoy elementa / V.S. Plevkov, G.I. Odnokopylov, I.V. Bogatyreva. Zayavleno 08.02.2013; Opubl. 20.07.2013, Byul. № 20. 5 s. [Pat. 130333 RF. IPC E04G 23/02. Sprengel for strengthening and ensuring the survivability of a bent reinforced concrete element / V.S. Plevkov, G.I. Odnokopylov, I.V. Bogatyrev. Stated 02/08/2013; Publ. 20.07.2013; 20: 5 p. (In Russ)]
9. Steel structures. Constructor reference. Ed. Melnikova N.P. M.: Stroyizdat, 1980;195-196. (In Russ)
10. SP 16.13330.2017 "Steel structures". M.: Standartinform, JSC "Research Center" Construction "- TsNIISK named after V.A.Kucherenko, 2017; 92. (In Russ)
11. Ustarkhanov OM, Yusupov AK, Muselemov Kh.M. Sprengel crane beams. Makhachkala: DSTU, 2016; 120. (In Russ)]
12. F. Hart (Munich), W. Henn (Braunschweig), H. Sontag (Berlin), Moscow, Stroyizdat, [Atlas stal'nykh konstruksiy».] *Atlas of Steel Structures.* 1977; 37-84 (In Russ)]
13. Yusupov A.K. Metal structures in questions, answers and design." Makhachkala, Daghestan State Technical University. State Unitary Enterprise "Printing House of the DSC RAS", 2010. (In Russ)]
14. Yusupov A.K. Dagestanskiy gosudarstvennyy tekhnicheskyy universitet. GUP «Tipografiya DNTS RAN» [Yusupov A.K. "Methods of Applied Mathematics in Structural Mechanics", Volume 1. Makhachkala, Daghestan State Technical University. State Unitary Enterprise "Printing House of the DSC RAS", 2008. (In Russ)]
15. Yusupov A.K. Methods of Applied Mathematics in Structural Mechanics, Daghestan State Technical University. *State Unitary Enterprise "Printing House of the DSC RAS"*, 2008; 4. (In Russ)]
16. Yusupov A.K., Muselemov KH.M., Ustarkhanov T.O., Dzhahalalov SH.G. Vestnik Mashinostroyeniya, [Yusupov A.K., Muselemov H.M., Ustarkhanov T.O., Dzhahalalov Sh.G. "Study of a metal-wood beam". *"Bulletin of Mechanical Engineering"*, 2019; 12: 112 (In Russ)]
17. Yusupov A.K., Muselemov KH.M., Ustarkhanov T.O. Optimizatsiya parametrov shprengel'noy balki. Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki, [Yusupov A.K., Muselemov H.M., Ustarkhanov T.O. Optimization of truss beam parameters. [Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki] *Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences.* 2020; 47(4): 119-131. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-119-131. (In Russ)]
18. Yusupov A.K., Muselemov KH.M., Ustarkhanov T.O. Efficiency of strut-framed beams with optimal parameters. [Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki] *Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences.* 2021; 48(1):141-153. DOI:10.21822/2073-6185-2021-48-1-141-153. (In Russ)

Сведения об авторах:

Юсупов Абусуян Курашевич, доктор технических наук, профессор, кафедра «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; e-mail: hairulla213@mail.ru

Муселемов Хайрулла Магомедмурадович, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; e-mail: hairulla213@mail.ru

Устарханов Тагир Османович, ассистент, кафедра «Строительные материалы и инженерные сети».

Information about the authors:

Abusuryan K.Yusupov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Department of Building Structures and Hydraulic Structures, e-mail: hairulla213@mail.ru

Khairulla M.Muselemov, Cand.Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Department of Building Structures and Hydraulic Structures, e-mail: hairulla213@mail.ru

Tagir O. Ustarkhanov, Assistant, Department of Building Materials and Engineering Networks.

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 02.09.2021.

Одобрена после рецензирования/ Reved 16.09.2021.

Принята в печать/Accepted for publication 17.09.2021.