Для цитирования: А.С. Личковаха, Б.А.Шемишур, С.А.Кузнецов. Анализ колебаний нелинейной и линейной упругих систем. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020; 47(4):141-150. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-141-150

For citation: A.S. Lichkovakha, B. A. Shemshura, S. A. Kuznetsov. Vibration analysis of nonlinear and linear elastic systems. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2020; 47(4):141-150. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-141-150

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624. 016.5

DOI: 10.21822/2073-6185-2020-47-4-141-150

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

А.С. Личковаха, Б.А.Шемишур, С.А.Кузнецов

Ростовский государственный университет путей сообщения (РГУПС),
344038, г. Ростов-на-Дону, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2, Россия

Резюме. Цель. В настоящем исследовании поставлена задача установить теоретические предпосылки работоспособности регрессивно-прогрессивного упругого механизма путем сопоставления с линейной упругой системой сопоставимой жесткости в положении статического равновесия сравнением амплитудно-частотной характеристик и фазовых траекторий. **Метод.** В статье проводится сравнительный динамический анализ колебаний упругих систем с линейной жесткостью и с регрессивно-прогрессивной характеристикой, полученной в результате использования упругих элементов в виде стержней большой гибкости с продольным внецентренным сжатием. Такие упругие элементы в различных конструктивных вариантах были испытаны и запатентованы в качестве демпфирующих для использования в конструкции гасителей колебаний строительных сооружений и подвесок транспортных средств и в эксперименте показали свою эффективность в гашении колебаний. **Результат.** Регрессивно-прогрессивная упругая характеристика, полученная методом эллиптических параметров и с помощью расчетного комплекса ANSYS, используется в уравнениях динамики в аппроксимированном виде, что расширяет возможности метода. Показано, что повышение энергоемкости нелинейной системы позволяет уменьшить амплитуду колебаний. **Вывод.** Регрессивно-прогрессивный характер изменения жесткости нелинейной упругой системы, может быть достигнут при использовании упругого элемента с внецентренным продольным сжатием, причем регрессивный участок упругой характеристики достигается именно за счет внецентренного сжатия, а прогрессивный участок – за счет применения поводка или других конструктивных решений. Реализация характеристики позволяет использовать такие упругие механизмы в системах, когда при одном и том же возмущении накопление потенциальной энергии происходит с меньшим ходом сжатия, чем для линейных систем.

Ключевые слова: колебания, линейная механика, нелинейная механика, регрессивно-прогрессивная характеристика, стержень большой гибкости, продольное внецентренное сжатие, демпфирование, фазовые траектории

VIBRATION ANALYSIS OF NONLINEAR AND LINEAR ELASTIC SYSTEMS

A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov

Rostov State Transport University (RSTU),
2 Rostovskogo Strelkovogo Polka Narodnogo Opolcheniya Square, Rostov-on-Don 344038, Russia

Abstract. Objective. In this study, the task is to establish the theoretical prerequisites for the operability of a regressive-progressive elastic mechanism by comparing the amplitude-frequency characteristics and phase trajectories with a linear elastic system of comparable stiffness in a static equilibrium position. **Methods.** The article presents a comparative dynamic analysis of vibrations of

*elastic systems with linear rigidity and regressive-progressive characteristics obtained as a result of the use of elastic elements in the form of high flexibility rods with longitudinal eccentric compression. Such elastic elements in various design variants have been tested and patented as damping elements for use in the construction of vibration dampers for construction structures and vehicle suspensions, and have experimentally shown their effectiveness in damping vibrations. **Results.** The regressive-progressive elastic characteristic obtained by the elliptic parameters method and using the ANSIS calculation complex is used in the dynamics equations in an approximated form, which expands the capabilities of the method. It is shown that increasing the energy intensity of a curvilinear system reduces the vibration amplitude. **Conclusion.** The regressive-progressive change of the stiffness of curvilinear elastic systems can be achieved using an elastic element with eccentric longitudinal compression; the regression plot of elastic properties is achieved due to eccentric compression; the progressive plot – through the use of a guide or other design solutions. The implementation of this characteristic allows using such elastic mechanisms in systems where the accumulation of potential energy occurs with a smaller compression stroke for the same perturbation than for linear systems.*

Keywords: vibrations, linear mechanics, curvilinear mechanics, regressive-progressive characteristic, high flexibility rod, longitudinal eccentric compression, damping, phase paths

Введение. Линейные колебания объектов с упругими элементами имеют место, когда восстанавливающая сила, или восстанавливающий момент пропорциональны величине отклонений колеблющегося объекта от положения равновесия. При этом в процессе движения жёсткость упругих элементов остаётся постоянной.

На практике часто возникает необходимость использовать переменную жёсткость упругих элементов с целью организации определённого вида колебаний. Так переменную жесткость системы можно получить, применив в качестве упругого элемента стержень большой гибкости [1-3], который позволяет получать нелинейную упругую характеристику с изменяемой жёсткостью (регрессивно-прогрессивная характеристика).

Постановка задачи. Задачей настоящего исследования является сравнение характера колебаний систем со стержнями большой гибкости (нелинейных систем) и систем с пружинами, имеющими линейную характеристику.

Методы исследования. На основе метода эллиптических параметров, разработанного Е.П. Поповым [4, 5], и геометрического представления эллиптических интегралов, предложенных Е.В. Анфиловьевым и В.М. Замятиным [6], в работах [7] и [8] определено напряжённо-деформируемое состояния стержней большой гибкости от воздействия на них осевых и не осевых нагрузок. В работе [9] разработана методика вычисления энергетического баланса системы со стержнем большой гибкости.

Исследования колебаний систем со стержнем большой гибкости проведём для схемы, изображённой на рис.1.

Она состоит (рис.1 б) из гибкого стержня «ОА», жёсткого рычага «АВ» и жёсткого поводка ВД.

Гибкий стержень «ОА» одним концом закреплён шарниром в т. «О», а другим концом жёстко соединён под прямым углом с рычагом «АВ». Жёсткий рычаг «АВ» (эксцентриситет), соединён шарниром «В» с поводком «ВД», который другим концом закреплён шарнирно в т. «Д». К шарниру «В» прикладывается направленная вертикально сила тяжести груза G .

Деформированное состояние системы определяется величиной силы G и параметрами стержней по методике, разработанной в [4].

Параметры стержней: $AB = 0,04$ м, $ВД = h = 0,08$ м, $l = OA = 0,4$ м, изгибная жёсткость гибкого стержня $H = 0,010728$ Нм². $ОД = d = 0,32$ м.

Рис. 1. Модель (а) и расчётная схема (б) системы со стержнем большой гибкости
Fig.1. Model (a) and design scheme (b) of a system with a rod of great flexibility

В табл.1 приведены результаты расчётов, полученные методом эллиптических параметров необходимые для исследования колебаний.

Таблица 1. Результаты расчетов
Table 1. Calculation results

Вычисляемые параметры Calculated parameters	Значения параметров Parameter values									
F , Н	0,2	0,39	0,45	0,52	0,55	0,6	0,64	0,68	0,71	0,74
ОВ, см	39,6	38	36,89	34,7	33,3	31	28,9	26,77	24,7	24,1
$\zeta = \gamma_{cm} - \gamma$, град	5,2	9,26	10,94	13,3	14,1	14,6	14,1	11,93	6,74	2,33
ζ , град	153,7	131,3	120,9	101,3	92	74	60,7	42,9	20,9	6,9
G , Н	0,162	0,33	0,39	0,485	0,54	0,63	0,7	0,815	0,93	0,97
h_B , см	0,7	2,65	3,9	6,4	7,8	10,3	12	14,1	15,6	16

В таблице обозначено:

γ_{cm} – угол отклонения поводка ВД от вертикали до положения статического равновесия,

γ – обобщённая координата – угол отклонение поводка ВД от положения статического равновесия,

$\zeta = \gamma_{cm} - \gamma$, – угол отклонения поводка ВД от вертикали до произвольного положения.

The table indicates:

γ_{st} is the angle of deflection of the VD leash from the vertical to the position of static equilibrium,

γ - generalized coordinate - angle of deviation of the VD leash from the position of static equilibrium,

$\zeta = \gamma_{st} - \gamma$, is the angle of deviation of the VD leash from the vertical to an arbitrary position.

На рис.2 показаны зависимости вертикального перемещения точки «В» от нагрузки G с использованием метода эллиптических параметров и с помощью расчетного комплекса ANSYS [10]. Анализ этих статических характеристик позволяет установить диапазон силы G , где имеет место нелинейная зависимость перемещений от нагрузок, наименьшую вертикальную жёсткость упругого стержня и соответствующую ей величину статической нагрузки.

Зависимость вертикального перемещения h_B (м) груза от величины его силы тяжести G (Н) при аппроксимации кубической параболой (погрешность 98%), имеет вид.

$$G = 388,3h_g^3 - 101,2h_g^2 + 11,9h_g + 0,056. \quad (1)$$

Жёсткость c_g (Н/м) гибкого стержня при вертикальном перемещении любого груза равна первой производной его по перемещению h_B .

$$c_g = \frac{dG}{dh_g} = 1164,9h_g^2 - 202,4h_g + 11,9. \quad (2)$$

Наименьшее значение жёсткость имеет место, когда первая производная обращается в ноль $\frac{dc_g}{dh_g} = 0 = 2329,8h_g - 202,4$; откуда $h_B = 0,087$ м и из равенства (2) минимальная жёст-

кость $c_g = 3,1 \frac{H}{м}$. Соответствующая этому минимальному значению жёсткости сила G , определяемая по формуле (1), равна $G = 0,6$ Н.

Рис. 2. Зависимости вертикального перемещения точки приложения силы G от величины этой силы (кривые равновесных состояний): 1 – кривая получена с помощью метода эллиптических параметров. 2 – кривая получена с помощью ПК ANSYS

Fig. 2. Dependences of the vertical displacement of the point of application of the force G on the magnitude of this force (curves of equilibrium states): 1 - the curve was obtained using the method of elliptical parameters. 2 - the curve was obtained using the ANSYS PC

Колебания будем рассматривать при постоянной силе $G = 0,6$ (статическая нагрузка). Реакция упругого стержня F (Н), зависящая при колебаниях от положения поводка ВД $F = f(\zeta)$, определяется с помощью аппроксимации из таблицы 1 (погрешность 98%).

$$F = 0,7397 - 0,0307\zeta^3 + 0,0494\zeta^2 - 0,112\zeta, \quad (3)$$

Здесь размерность ζ в радианах.

Вывяим различие колебаний груза весом $G = 0,6$ Н в системах, представленных на рис.1 и рис.3. На рис.3 представлена система, позволяющая исследовать линейные колебания.

Рис. 3. Линейная система
Fig. 3. Linear system

Линейная жёсткость пружины на рис. 3 постоянна и равна жёсткости упругого стержня по вертикальному направлению в положении статического равновесия

$$c = c_e = 3,1 \frac{H}{m}.$$

Начало координат при исследовании колебаний всегда принимается в положении статического равновесия системы. Восстанавливающая сила здесь пропорциональна перемещению груза и равна

$$F = c \cdot y.$$

Для системы, представленной на рис.3, дифференциальное уравнение движения груза весом G без учёта сопротивления имеет вид:

$$\ddot{y} + c \cdot \frac{g}{G} y = 0, \quad (4)$$

Круговая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{c \cdot g}{G}} = \sqrt{\frac{3,1 \cdot 9,8}{0,6}} = 7,1 \frac{1}{c}$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{7,1} = 0,88c.$$

Для системы рис.1 дифференциальное уравнение движения стержня ВД без учёта сил сопротивления примет вид

$$J_b \cdot \ddot{\gamma} = G \cdot h \cdot \sin \zeta - F \cdot d \cdot \sin \delta. \quad (5)$$

Здесь $J_b = \frac{G \cdot h^2}{g}$ – и а момент инерции массы относительно оси вращения поводка ВД.

Для решения дифференциального уравнения (5) необходимо, чтобы для всех переменных величин была установлена зависимость от обобщённой координаты γ . Для силы F такая зависимость установлена формулой (3), а для угла δ , определяющего направление подвижной оси x' , определяется по теореме синусов.

$$\sin \delta = \frac{h \sin \zeta}{\sqrt{h^2 + d^2 - 2h \cdot d \cos \zeta}}. \quad (6)$$

Угол отклонения поводка ВД от вертикали в зависимости от обобщённой координаты γ равен: $\zeta = \gamma_{cm} - \gamma$

Решение дифференциального уравнения (5) зависит от разности моментов сил F и G относительно оси вращения стержня «ВД». Такая разность, называемая восстанавливающим моментом, для рассматриваемой системы, имеющей стержень большой гибкости (рис.1) равна:

$$M = (0,7397 - 0,0307\zeta^3 + 0,0494\zeta^2 - 0,112\zeta) + 0,0277\gamma + 0,7084 \times \\ \times d \cdot \frac{h \sin \zeta}{\sqrt{h^2 + d^2 - 2h \cdot d \cos \zeta}} - Gh \sin \zeta. \quad (7)$$

По закону изменения восстанавливающего момента в зависимости от начальных условий определяется характер колебательных процессов.

Рис.4. Зависимости моментов силы тяжести и реакции гибкого стержня от угла поворота ($M_B(F)$ – кривая 1 и $M_B(G)$ – кривая 2, $M = M_B(F) - M_B(G)$ – кривая 3)

Fig. 4. Dependences of the moments of gravity and the reaction of a flexible rod on the angle of rotation ($M_V(F)$ - curve 1 and $M_V(G)$ - curve 2, $M = M_V(F) - M_V(G)$ - curve 3)

На рис. 4 приведены графики моментов силы тяжести и реакции гибкого стержня относительно оси вращения рычага «ВД» (кривые 1 и 2) и восстанавливающего момента (кривая 3). При равенстве моментов силы тяжести $M_B(G)$ и реакции гибкого стержня $M_B(F)$ восстанавливающий момент M становится равным нулю (точка «К» на рис.4). При таком мгновенном положении равновесия меняется направление движения груза G.

Сравним колебания двух систем, (рис.1 и рис.3). Пусть системы находятся в положении статического равновесия и подвержены одинаковому возмущению.

В системе с гибким стержнем (рис. 1) примем следующие начальные условия:

Начальная угловая скорость $\dot{\gamma}_0 = 7 \frac{1}{c}$, начальное положение груза $\gamma_0 = 0$.

Тогда кинетическая энергия, сообщаемая системе равна

$$\mathcal{E}_k = \frac{G \cdot h^2}{2g} \cdot \dot{\gamma}_0^2 = \frac{0,6 \cdot 0,08^2}{2 \cdot 9,8} \cdot 7^2 = 0,0096 \text{ Дж.}$$

Начальные условия в линейной системе (рис.3) принимаются из условия, что кинетическая энергия будет такой же, т.е: $0,0096 = \frac{G}{2g} \cdot v_0^2$, откуда начальная скорость равна

$$v_0 = \dot{y}_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 0,0096}{0,6}} = 0,56 \frac{m}{c}, \quad \text{при этом } y_0 = 0.$$

Решения дифференциальных уравнений (4) и (5) с заданными начальными условиями получено в ПО Mathcat.

$$y''(t) + (-0.0307 \cdot y(t)^3 + 0.0494 \cdot y(t)^2 - 0.112 \cdot y(t) + 0.7397) \cdot d \cdot \frac{h \cdot \sin(y(t))}{Jb \cdot \sqrt{h^2 + d^2 - 2 \cdot h \cdot d \cdot \cos(y(t))}} - \frac{G \cdot h \cdot \sin(y(t))}{Jb} = 0$$

$$y(0) = 0^\circ$$

$$y'(0) = 7$$

начальные условия

+

 $y := \text{Odesolve}(t, 10)$ $t := 0, 0.01 \dots 100$

а)

б)

Given

$$y''(t) + \frac{c \cdot g(y(t))}{G} = 0$$

исходное уравнение

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0.56$$

начальные условия

 $y := \text{Odesolve}(t, 10)$
 $t := 0, 0.01 \dots 100$

в)

г)

Рис. 5. Колебания точки приложения силы во времени для нелинейной (а) и линейной (в) систем, фазовые траектории нелинейной (б) и линейной (г) систем

Fig. 5. Oscillations of the point of application of force in time for nonlinear (a) and linear (c) systems, phase trajectories of nonlinear (b) and linear (d) systems

На рис.5 а показана графическая зависимость обобщённой координаты от времени (система на рис. 1), на рис.5 в – такая же зависимость линейной системы (рис.3). Соответствующие фазовые траектории изображены на рис. 5 б и рис 5 г.

Проанализируем для каждой схемы, как преобразуется кинетическая энергия груза G в потенциальную энергию системы.

Для положений статического равновесия потенциальная энергия обеих систем (рис.1 и рис.3) равна нулю. При максимальном отклонении колеблющегося груза от положения равновесия скорость груза и, следовательно, кинетическая энергия становятся равной нулю. Согласно закону сохранения энергии механических колебаний, в этом случае кинетическая энергия, сообщённая каждой системе, полностью переходит в потенциальную энергию, равную 0,0096 Дж.

Определим при этом, как нарастает потенциальная энергия в зависимости от хода сжатия (вертикальное отклонения от положения равновесия груза G .) Для нелинейной системы из рис.5 а и 5 б следует, что максимальное отклонение стержня ВД от положения равновесия (обобщенная координата) в одну сторону равно $\gamma_1 = 1,2 \text{ рад} = 68,8^\circ$, а в противоположную $\gamma_2 = 0,77 \text{ рад} = 44,1^\circ$.

Потенциальная энергия для нелинейной системы (рис.1) равна работе восстанавливающего момента при перемещении поводка ВД от максимального отклонения $\gamma_{\max} = 68,8^\circ$ до первоначального $\gamma_0 = 0$.

$$E_n = \int_{68,8}^0 M d\gamma = 0,0096 \text{ Дж.}$$

Здесь значение M определяется по формуле (7).

Размах вертикальных колебаний для системы на рис.1 равен:

$$R_n = h[\cos(\gamma_{\text{ст}} - \gamma_1) - \cos \gamma_{\text{ст}}] + h[\sin(90^\circ - \gamma_{\text{ст}}) + \sin(\gamma_2 - 90^\circ + \gamma_{\text{ст}})]. \quad (8)$$

$$R_n = 0,1233 \text{ м.}$$

Потенциальная энергия для системы на рис.3 равна

$$E_n = \int_{0,0788}^0 c_g y dy = 0,0096 \text{ Дж.}$$

Для системы рис. 3 максимальное вертикальное отклонение груза G от положения равновесия равно амплитуде гармонических колебаний

$$A = h_g = \frac{v_0}{\omega} = \frac{\dot{y}_0}{\omega} = \frac{0,56}{7,1} = 0,0788 \text{ м.}$$

Размах линейных колебаний равен:

$$R_n = 0,1576 \text{ м.}$$

Обсуждение результатов. Свободные колебания сравниваемых систем при одной и той же сообщаемой энергии существенно различны (рис. 5 а, в). Это связано с тем, что для линейных колебаний восстанавливающий силовой фактор возрастает пропорционально величине отклонения груза от положения равновесия.

В то время как для схемы на рис. 1 он им пропорционален только при небольших отклонениях от положения равновесия, а при больших отклонениях эта пропорциональность нарушается (кривая 3 на рис.4).

Поэтому отклонения груза от положения равновесия нелинейной системы становятся не симметричным и движения таких систем по сравнению с линейными более «вальжными». При этом размах колебаний более чем на 20% меньше, чем для линейной системы.

Фазовые траектории линейных колебаний имеют форму правильных эллипсов (рис. 5 г), а для нелинейных колебаний форма эллипсов искажается (рис. 5 б).

Вывод. Регрессивно-прогрессивный характер изменения жесткости нелинейной упругой системы, может быть, достигнут при использовании упругого элемента с внецентренным продольным сжатием, причем регрессивный участок упругой характеристики достигается именно

за счет внецентренного сжатия, а прогрессивный участок – за счет применения поводка или других конструктивных решений.

Реализация характеристики позволяет использовать такие упругие механизмы в системах, когда при одном и том же возмущении накапливание потенциальной энергии происходит с меньшим ходом сжатия, чем для линейных систем.

Библиографический список:

1. Пат. № 2706770 Российская Федерация, МПК В 60G 11/10. Упругий механизм с регрессивно-прогрессивной характеристикой / С.А. Кузнецов, А.С. Личковаха, Б. А. Шемшура . Заявл. 09.01.2019; опубл. 20.11.2019, Бюл. № 32.
2. Пат. № 2486065 Российская Федерация, МПК В 60G 11/04. Упругая подвеска с регрессивно-прогрессивной характеристикой / С.А. Кузнецов, В.Н. Семенов, Я.А. Лысенко, Ю.Ю. Олейничева. Заявл. 15.02.2012; опубл. 27.06.2013, Бюл. № 18.
3. Пат. № 2521879 Российская Федерация, МПК В 60G 3/16. Упругая подвеска с регрессивно-прогрессивной характеристикой / В.Н. Семенов, С.А. Кузнецов, А.А. Галушкин. Заявл. 13.12.2012; опубл. 10.07.2014, Бюл. № 19.
4. Попов, Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е.П. Попов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 296с.
5. Пономарёв, С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении /С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, В.И. Феодосьев. М.: Mashgiz, 1956. Т.1. 886с
6. Анфилофьев А. В. Геометрическое представление эллиптических интегралов / А. В. Анфилофьев, В. М. Замятин // Известия Томского политехнического университета [Известия ТПУ]. 2005. Т. 308, № 5. С. 11-14.
7. Личковаха, А.С. Исследование деформации стержня большой гибкости при осевом нагружении /А.С. Личковаха, Б.А. Шемшура, С.А. Кузнецов // Известия высших учебных заведений. Северо-кавказский регион. Технические науки. 2016. №3. С. 71-76.
8. Личковаха А.С., Исследование напряжённо-деформированного состояния внецентренно сжатого стержня большой гибкости: / А.С. Кузнецов, Б.А.Шемшура, А.С. Личковаха. Электронный научный журнал Инженерный вестник Дона №1, 2018 ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2018/4773-0,9п.л.
9. А.С. Личковаха, Б. А. Шемшура, С.А. Кузнецов. К определению энергетического баланса нелинейной упругой системы// А.С. Личковаха, Б.А. Шемшура, С.А. Кузнецов// Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения , 2018. №2. С.137-143.
10. Басов, К. А. ANSYS для конструкторов / К. А. Басов. М. : ДМК Пресс, 2009. 248 с.
11. Охорзин, В. А. Прикладная математика в системе Mathcad / В. А. Охорзин М. :, Лань, 2009. 352 с.

References:

1. Pat. № 2706770 Rossiyskaya Federatsiya, MPK B 60G 11/10. Uprugiy mekhanizm s regressivno-progressivnoy kharakteristikoy / S.A. Kuznetsov, A.S. Lichkovakha, B. A. Shemshura . Zayavl. 09.01.2019; opubl. 20.11.2019, Byul. № 32. [Pat. No. 2706770 Russian Federation, IPC B 60G 11/10. Elastic mechanism with a regressive-progressive characteristic / S.A. Kuznetsov, A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura. Applied. 01/09/2019; publ. 20.11.2019, Bul. No. 32.
2. Pat. № 2486065 Rossiyskaya Federatsiya, MPK B 60G 11/04. Uprugaya podveska s regressivno-progressivnoy kharakteristikoy / S.A. Kuznetsov, V.N. Semenov, YA.A. Lysenko, YU.YU. Oleynicheva. – Zayavl. 15.02.2012; opubl. 27.06.2013, Byul. № 18. [Pat. No. 2486065 Russian Federation, IPC B 60G 11/04. Elastic suspension with a regressive-progressive characteristic / S.A. Kuznetsov, V.N. Semenov, Ya.A. Lysenko, Yu. Yu. Oleinicheva. Applied. 02/15/2012; publ. 06/27/2013, Bul. No. 18.
3. Pat. № 2521879 Rossiyskaya Federatsiya, MPK B 60G 3/16. Uprugaya podveska s regressivno-progressivnoy kharakteristikoy / V.N. Semenov, S.A. Kuznetsov, A.A. Galushkin. Zayavl. 13.12.2012; opubl. 10.07.2014, Byul. № 19. [Pat. No. 2521879 Russian Federation, IPC B 60G 3/16. Elastic suspension with a regressive-progressive characteristic / V.N. Semenov, S.A. Kuznetsov, A.A. Galushkin. Applied. 12/13/2012; publ. 07/10/2014, Bul. No. 19.
4. Popov, Ye.P. Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhney / Ye.P. Popov. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. 296s. [Popov, E.P. Theory and calculation of flexible elastic rods / E.P. Popov. M. : Science. Ch. ed. physical-mat. lit., 1986. 296s.
5. Ponomarev, S.D. Raschoty na prochnost' v mashinostroyenii /S.D. Ponomarev, V.L. Biderman, V.I. Feodos'yev. M.: Mashgiz, 1956. T.1. 886 s. [Ponomarev S. D. Strength calculations in mechanical engineering / S.D. Ponomarev, V.L. Biderman and V.I. Feodosiev. M. : Mashgiz, 1956 . Vol. 1. 886p.
6. Anfilof'yev A. V. Geometricheskoye predstavleniye ellipticheskikh integralov / A. V. Anfilof'yev, V. M. Zamyatin // Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta [Izvestiya TPU]. 2005. T. 308, № 5. S. 11-14. [Anfilofiev

- AV Geometric representation of elliptic integrals / AV Anfilofiev, VM Zamyatin // Bulletin of the Tomsk Polytechnic University [Bulletin of TPU]. 2005. T. 308, No. 5. pp. 11-14.
7. Lichkovakha, A.S. Issledovaniye deformatsii sterzhnya bol'shoy gibkosti pri osevom nagruzhenii /A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-kavkazskiy region. Tekhnicheskiye nauki. 2016. №3. S. 71-76. [Lichkovakha, A.S. Investigation of the deformation of a rod of great flexibility under axial loading / A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // News of higher educational institutions. North Caucasian region. Technical science. 2016. No. 3. pp. 71-76.
 8. Lichkovakha A.S., Issledovaniye napryazhonno-deformirovannogo sostoyaniya vnetsentrenno szhatogo sterzhnya bol'shoy gibkosti: / A.S. Kuznetsov, B.A.Shemshura, A.S. Lichkovakha. Elektronnyy nauchnyy zhurnal Inzhenernyy vestnik Dona №1, 2018 ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2018/4773-0,9p.1. [Lichkovakha AS, Investigation of the stress-strain state of an eccentrically compressed rod of great flexibility: / A.S. Kuznetsov, B.A. Shemshura, A.S. Lichkovakha. Electronic scientific journal Engineering Bulletin of Don No. 1, 2018 ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2018/4773-0.9 pp.
 9. A.S. Lichkovakha, B. A. Shemshura, S.A. Kuznetsov K opredeleniyu energeticheskogo balansa nelineynoy uprugoy sistemy// A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov// Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya , 2018. №2. S.137-143. [A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov On the determination of the energy balance of a nonlinear elastic system. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // Bulletin of Rostov State University of Railways, 2018. No. 2. pp. 137-143.
 10. Basov K. A. ANSYS dlya konstruktorov / K. A. Basov. M. : DMK Press, 2009. 248 c. [Basov, K. A. ANSYS for designers / K. A. Basov M.: DMK Press, 2009. 248 p.
 11. Okhorzin, V. A. Prikladnaya matematika v sisteme Mathcad / V. A. Okhorzin. M. :, Lan', 2009. 352 c. Bibliographic list [Okhorzin, V. A. Applied mathematics in the Mathcad system / V. A. Okhorzin. M., Lan, 2009. 352 p.

Сведения об авторах:

Личковаха Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, доцент; кафедра «Строительная механика»; e-mail: lichkovaha@yandex.ru

Шемшура Борис Андреевич, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Строительная механика»; e-mail: stoi_meh@rgups.ru

Кузнецов Сергей Анатольевич, доктор технических наук, профессор, кафедра «Общеинженерные дисциплины», e-mail: sergey-kuznecov-57@mail.ru

Information about the authors:

Andrey S. Lichkovakha, Cand. Sci. (Technical), Assoc. Prof., Department of Building Mechanics; e-mail: lichkovaha@yandex.ru

Boris A. Shemshura, Cand. Sci. (Technical), Assoc. Prof., Department of Construction Mechanics; e-mail: stoi_meh@rgups.ru

Sergey A. Kuznetsov, Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of General Engineering Disciplines, e-mail: sergey-kuznecov-57@mail.ru

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 09.11.2020.

Принята в печать 30.11.2020.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 09.11.2020.

Accepted for publication 30.11.2020.