

Для цитирования: К.Р. Айдемиров, В.П. Агапов, Г.М. Муртазалиев. Применение многослойных конечных элементов переменной толщины при расчете железобетонных плит в вычислительном комплексе «Принс». Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020; 47 (4):112-121. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-112-121

For citation: K.R. Aidemirov, V.P. Agapov, G.M. Murtazaliev. Application of multilayer finite elements of variable thickness in the calculation of reinforced concrete slabs in the "Prince" computer complex. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2020; 47(4):112-121. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-112-121

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.74:624.075

DOI: 10.21822/2073-6185-2020-47-4-112-121

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ РАСЧЕТЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ КОМПЛЕКСЕ «ПРИНС»

¹К.Р. Айдемиров, ²В.П. Агапов, ¹Г.М. Муртазалиев

^{1,3}Дагестанский государственный технический университет,

^{1,3}367026 г. Махачкала, пр. И.Шамиля, 70, Россия,

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

²1129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, Россия

Резюме. Цель. Описывается семейство многослойных конечных элементов, предназначенных для расчета железобетонных плит и оболочек переменной толщины. Рассматриваются особенности формирования матриц жесткости, связанные с переменностью сечения элементов. **Метод.** В основе семейства лежит простейший плоский треугольный элемент, построенный с использованием гипотезы Кирхгофа. Поперечные перемещения в этом элементе аппроксимируются неполным кубическим полиномом. Такой элемент непригоден для практического применения, но на его основе построены усовершенствованные элементы трех- и четырехугольной формы в плане. Особое внимание уделено учету переменности поперечного сечения. **Результат.** Приводятся результаты тестирования разработанных элементов и показываются преимущества их использования в практике проектирования и расчета конструкций. **Вывод.** Разработанный программный комплекс ПРИНС может оказаться полезным при проектировании и расчете конструкций, содержащих плиты переменной толщины.

Ключевые слова: строительные конструкции, железобетонные плиты постоянного и переменного сечения, метод конечных элементов

APPLICATION OF MULTILAYER FINITE ELEMENTS OF VARIABLE THICKNESS IN THE CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE SLABS IN THE "PRINCE" COMPUTER COMPLEX

¹K.R. Aidemirov, ²V.P. Agapov, ¹G.M. Murtazaliev

¹Daghestan State Technical University,

¹70 Shamil Ave., Makhachkala 367026, Russia,

²National Research Moscow State University of Civil Engineering,

²26 Yaroslavl Highway, Moscow 129337, Russia

Abstract. Objective. A family of multilayer finite elements designed for calculating reinforced concrete slabs and shells of variable thickness is described. The features of the formation of stiffness matrices associated with the variability of the cross-section of elements are considered. **Methods.** The family is based on the simplest planar triangular element constructed using the Kirchhoff hypothesis. The transverse displacements in this element are approximated by an incomplete cubic polynomial. This element is not suitable for practical use, but it is based on improved elements of three- and four-sided shape in the plan. Special attention is paid to the consideration of cross-section variability. **Re-**

sults. *The results of testing the developed elements are presented and the advantages of their use in the practice of design and calculation of structures are shown. Conclusion.* *The developed PRINCE software package can be useful in the design and calculation of structures containing plates of variable thicknesses.*

Keywords: *building structures, reinforced concrete slabs of constant and variable cross-section, finite element method*

Введение. Плиты и оболочки переменной толщины применяются в различных областях техники, как в виде самостоятельных элементов, так и в составе комбинированных систем. В авиации, например, к подобным конструкциям относятся лопасти воздушных винтов самолетов, имеющие сложную пространственную конфигурацию, и некоторые элементы конструкции крыла [1,2]. В строительстве плиты и оболочки переменного сечения используются, главным образом, в железобетонных конструкциях. Классическим примером оболочки переменной толщины является, например, оболочка градирни [3]. Панели переменного сечения используются в пролетных строениях мостов, подпорных стенах, путепроводах, сборных крупноразмерных плитах покрытий промышленных и гражданских зданий типов «Т», «2Т», «П», «ПСР», монолитных и сборных перекрытиях и покрытиях многоэтажных зданий, стенах бункеров и других сооружениях [4,5].

Железобетонные конструкции, работающие как консольные элементы, в своем оптимальном варианте могут иметь переменные поперечные сечения, как по длине, так и по высоте.

Не во всех вычислительных комплексах включен конечный элемент переменной толщины и поэтому проектировщики вынуждены упрощать расчетные схемы плит и представлять их как плиты ступенчато-переменного сечения [6,7]. В таком случае, в узлах излома происходит концентрация напряжений, которая неблагоприятно влияет на результаты расчета конструкций.

Следует отметить, что в работах, посвященных расчету железобетонных плит с учетом нелинейности деформирования, также рассматриваются плиты, в основном, постоянного сечения [8,9]).

Постановка задачи. Постепенные утолщения к линии контура плиты и переменности сечения изменяют условия работы плиты и при искривлении ее срединной поверхности начинает работать как пологая оболочка. При этом в расчетах конструкций необходимо использовать оболочечные конечные элементы, как постоянной, так и переменной толщины.

Отсутствие общедоступных и апробированных методик расчета плит переменной толщины создает проблемы при проектировании и расчете конструкций, содержащих подобные элементы.

Упомянутые выше проблемы решены в вычислительном комплексе ПРИНС, в составе которого имеются разработанные конечные элементы плит и оболочек переменной толщины трех- и четырехугольной формы в плане, предназначенные как для линейных, так и для нелинейных расчетов.

Методы исследования. Ниже описывается семейство многослойных конечных элементов, реализованное в вычислительном комплексе ПРИНС, общее описание которого можно найти в работах [10,11]. В данной статье рассматриваются особенности формирования матриц жесткости, связанные с переменностью сечения элементов.

В основе разработанного семейства лежит простейший многослойный элемент треугольной формы в плане, показанный на рис.1. Предполагается, что толщина элемента изменяется по линейному закону. Принятая при построении алгоритма формирования матричных характеристик конечного элемента разбивка на слои показана на рис.1.

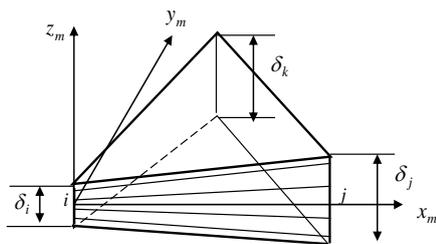


Рис.1. Многослойный треугольный конечный элемент
 Fig.1. Multilayer triangular finite element

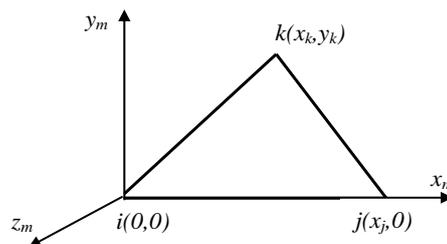


Рис. 2. Местные оси треугольного элемента
 Fig.2. Local axes of a triangular element

В качестве узловых неизвестных принимаются линейные перемещения вдоль осей x_m , y_m , z_m и углы поворота вокруг осей x_m и y_m (рис.2).

Элемент строится на основе гипотезы Кирхгофа, при этом в качестве аппроксимирующих функций перемещений внутренних точек принимаются полиномы первой степени для перемещений в плоскости и неполный кубический полином третьей степени для поперечных перемещений.

Матрица жесткости элемента вычисляется по формуле (например, [10]):

$$\mathbf{K}_{эл} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dv \quad (1)$$

где: \mathbf{B} – геометрическая матрица, связывающая компоненты деформаций и перемещений, и \mathbf{C} – физическая матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций. При использовании гипотезы Кирхгофа матрица \mathbf{B} приводится к виду:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_p \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{M}; -z \mathbf{B}_b \mathbf{A}_b^{-1}] \quad (2)$$

где: при принятых аппроксимирующих функциях перемещений \mathbf{B}_p , \mathbf{A}_p^{-1} и \mathbf{A}_b^{-1} – некоторые числовые матрицы, \mathbf{B}_b – матрица, элементы которой зависят от координат x и y внутренних точек конечного элемента (способы вычисления этих матриц хорошо известны; см., например [10]).

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\mathbf{K}_{эл} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_{pb} \\ \mathbf{K}_{pb}^T & \mathbf{K}_b \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p &= \int_V [\mathbf{A}_p^{-1}]^T \mathbf{B}_p^T \mathbf{C} \mathbf{B}_p \mathbf{A}_p^{-1} dv; \\ \mathbf{K}_b &= \int_V z^2 [\mathbf{A}_b^{-1}]^T \mathbf{B}_b^T \mathbf{C} \mathbf{B}_b \mathbf{A}_b^{-1} dv; \\ \mathbf{K}_{pb} &= \int_V -z [\mathbf{A}_p^{-1}]^T \mathbf{B}_p^T \mathbf{C} \mathbf{B}_b \mathbf{A}_b^{-1} dv. \end{aligned} \quad (4)$$

Учтем теперь переменность толщины элемента. Ход вычислений рассмотрим на примере матрицы \mathbf{K}_b .

Интегрирование по координате z во второй строке формулы (4) выполним по слоям, предполагая, что в пределах каждого слоя свойства материала по толщине слоя не меняются. Получим:

$$\mathbf{K}_b = [\mathbf{A}_b^{-1}]^T \int_F \mathbf{B}_b^T \sum \left(\mathbf{C}_{cl} \frac{z_{cl,6}^3 - z_{cl,n}^3}{3} \right) \mathbf{B}_b d\mathbf{A}_b^{-1} \quad (5)$$

где: z_{cl}^6 и z_{cl}^n - координаты нижней и верхней границы слоя по оси z .

Интегрирование в формуле (5) выполняется по площади треугольника F . Величины z_{cl}^6 и z_{cl}^n зависят от координат x и y .

Будем считать, что толщина плиты изменяется по линейному закону. Тогда для любого слоя плиты можно записать, что

$$z_{cl} = a_1 + a_2x + a_3y \quad (6)$$

Коэффициенты $a_1 \div a_3$, входящие в формулу (6), можно найти из условия, что координаты z слоя в узловых точках известны. Получаем:

- при $x = 0$ и $y = 0$ $z_{cl} = z_{i,cl} = a_1$;
- при $x = x_j$ и $y = 0$ $z_{cl} = z_{j,cl} = a_1 + a_2x_j$;
- при $x = x_k$ и $y = y_k$ $z_{cl} = z_{k,cl} = a_1 + a_2x_k + a_3y_k$;

Из приведенных выше условий находим:

$$a_1 = z_{i,cl}; \quad a_2 = \frac{z_{j,cl} - a_1}{x_j} = \frac{z_{j,cl} - z_{i,cl}}{x_j}; \quad (7)$$

$$a_3 = \frac{z_{k,cl} - a_1 - a_2x_k}{y_k} = \frac{z_{k,cl} - z_{i,cl} - \frac{z_{j,cl} - z_{i,cl}}{x_j} x_k}{y_k}.$$

С учетом соотношений (7) формула (6) принимает вид:

$$z_{cl} = z_{i,cl} + \frac{z_{j,cl} - z_{i,cl}}{x_j} x + \frac{z_{k,cl} - z_{i,cl} - \frac{z_{j,cl} - z_{i,cl}}{x_j} x_k}{y_k} y. \quad (8)$$

В соответствии с формулой (8) координаты z точек верхней и нижней поверхностей слоя будут определяться формулами:

$$z_{cl}^6 = z_{i,cl}^6 + \frac{z_{j,cl}^6 - z_{i,cl}^6}{x_j} x + \frac{z_{k,cl}^6 - z_{i,cl}^6 - \frac{z_{j,cl}^6 - z_{i,cl}^6}{x_j} x_k}{y_k} y. \quad (9)$$

$$z_{cl}^n = z_{i,cl}^n + \frac{z_{j,cl}^n - z_{i,cl}^n}{x_j} x + \frac{z_{k,cl}^n - z_{i,cl}^n - \frac{z_{j,cl}^n - z_{i,cl}^n}{x_j} x_k}{y_k} y \quad (10)$$

Запишем формулы (9) и (10) в виде:

$$z_{cl}^6 = a_{0,6} + a_{1,6}x + a_{2,6}y; \quad (11)$$

$$z_{cl}^n = a_{0,n} + a_{1,n}x + a_{2,n}y,$$

$$\text{где: } a_{0,6} = z_{i,cl}^6; a_{1,6} = \frac{z_{j,cl}^6 - z_{i,cl}^6}{x_j}; a_{2,6} = \frac{z_{k,cl}^6 - z_{i,cl}^6 - \frac{z_{j,cl}^6 - z_{i,cl}^6}{x_j} x_k}{y_k}.$$

$$a_{0,n} = z_{i,cl}^n; a_{1,n} = \frac{z_{j,cl}^n - z_{i,cl}^n}{x_j}; a_{2,n} = \frac{z_{k,cl}^n - z_{i,cl}^n - \frac{z_{j,cl}^n - z_{i,cl}^n}{x_j} x_k}{y_k}.$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла в формуле (5) и представляющее собой матрицу порядка 9×9 , обозначим следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_b^T \sum \left(\mathbf{C}_{cl} \frac{z_{cl,6}^3 - z_{cl,n}^3}{3} \right) \mathbf{B}_b.$$

Выражение для матрицы \mathbf{K}_b принимает следующий вид:

$$\mathbf{K}_b = [\mathbf{A}_b^{-1}]^T \int_F \mathbf{R} d\mathbf{f} \mathbf{A}_b^{-1} \quad (12)$$

Вычисление матрицы \mathbf{K}_b в общем виде затруднительно, поэтому интеграл $\int_F \mathbf{R} d\mathbf{f}$ находится численными методами.

Рассмотренный выше треугольный элемент обладает хорошо известными недостатками (например, [10]). Но, на его основе получены усовершенствованные элементы как треугольной, так и четырехугольной формы.

Усовершенствованный треугольный элемент образуется усреднением характеристик трех субтреугольников, описанных выше.

Для каждого из субтреугольников вводится своя местная система координат, как показано на рис.3, и в этой системе вычисляются первоначально все основные характеристики – матрицы жесткости и матрицы перехода от деформаций к напряжениям. В качестве местной системы координат составного треугольника принимается система координат $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ первого субтреугольника.

Затем все характеристики субтреугольников стандартными преобразованиями переводятся к осям первого из них.

Например, матрица жесткости составного треугольника находится по формуле

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1 + \mathbf{L}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3^T \mathbf{K}_3 \mathbf{L}_3) / 3$$

где: $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ и \mathbf{K}_3 - матрицы жесткости субтреугольников 1, 2 и 3 в их местных осях; \mathbf{L}_2 и \mathbf{L}_3 - матрицы направляющих косинусов осей x_2, y_2 и x_3, y_3 в осях $\mathcal{X}\mathcal{Y}$, соответственно.

Аналогичным образом находятся и усредняются остальные характеристики.

Для получения матрицы жесткости четырехугольного КЭ используем методику работы [2].

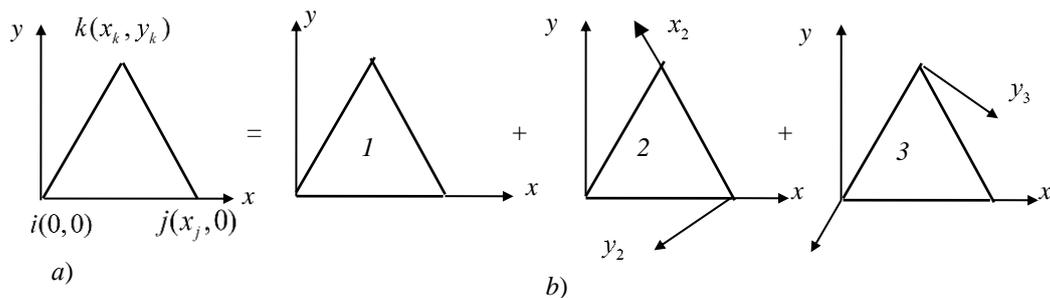


Рис. 3. Усовершенствованный треугольный элемент:
 а) заданный треугольник, б) субтреугольники
Fig. 3. Improved triangular element:
 a) a given triangle, b) subtriangles

Разобьем четырехугольный (не обязательно прямоугольный) конечный элемент на треугольники, как показано на рис.4.

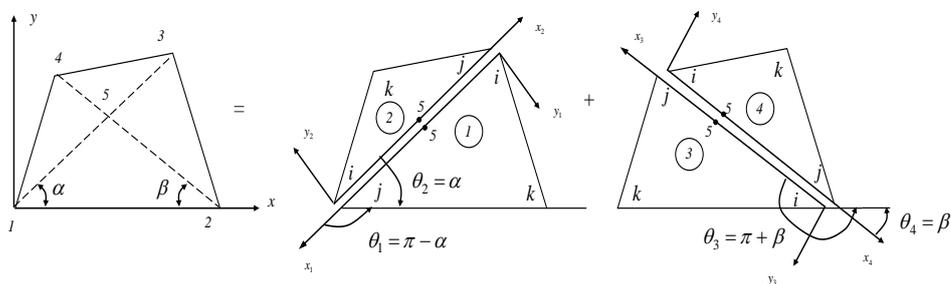


Рис. 4. Четырехугольный конечный элемент
Fig. 4. Quadrangular finite element

Матрица жесткости четырехугольного элемента в его местных осях x_u находится усреднением матриц жесткости треугольников $1 \div 4$, приведенных к этим осям, по формуле:

$$\mathbf{K}_{x-y} = (\mathbf{K}_{1x-y} + \mathbf{K}_{2x-y} + \mathbf{K}_{3x-y} + \mathbf{K}_{4x-y}) / 4$$

Матрицы жесткости треугольников в их местных осях находятся по формуле (1), а переход к местным осям четырехугольника осуществляется стандартным преобразованием:

$$\mathbf{K}_{m_{xy}} = \mathbf{L}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{L}_m, \quad m = 1, 2, 3, 4,$$

где $\mathbf{K}_{m_{xy}}$ – матрица жесткости m -го треугольника в местных осях четырехугольника, \mathbf{K}_m – матрица жесткости m -го треугольника в его местных осях, \mathbf{L}_m – матрица направляющих косинусов местных осей m -го треугольника в местных осях четырехугольника.

Обсуждение результатов. Для проверки точности разработанного семейства элементов решен ряд тестовых задач. Две из них приводятся ниже.

Задача 1. Рассчитывалась консольная пластинка переменной толщины, вытянутая в одном направлении. Размеры пластинки приведены на рис.5.

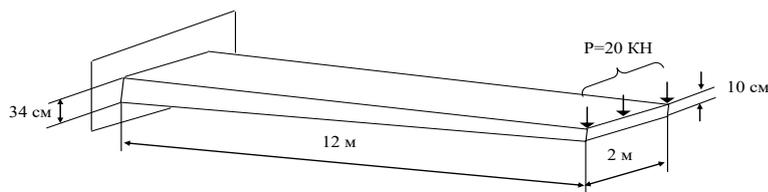


Рис. 5. Консольная плита
Fig. 5. Cantilever plate

Использовались два варианта расчетных схем при сетке узлов 4×4 и 4×12 . На рис.6 показаны напряжения в конечных элементах на верхней поверхности пластины для второго варианта. Результаты расчета сведены в табл.1 (напряжения на поверхности плиты усреднялись по

ряду элементов с одинаковой координатой «у»). Аналитическое решение получено методами сопротивления материалов при модуле упругости $E = 3,2 \times 10^7$ кПа.

Погрешность определения перемещений при сетке узлов 4×4 составила 2,38% при сетке 4×12 - 0,79%. Максимальная погрешность определения напряжений при сетке узлов 4×4 равна 9,8% , при сетке 4×12 - 0,85%. Полученная погрешность вполне допустима для инженерных расчетов.

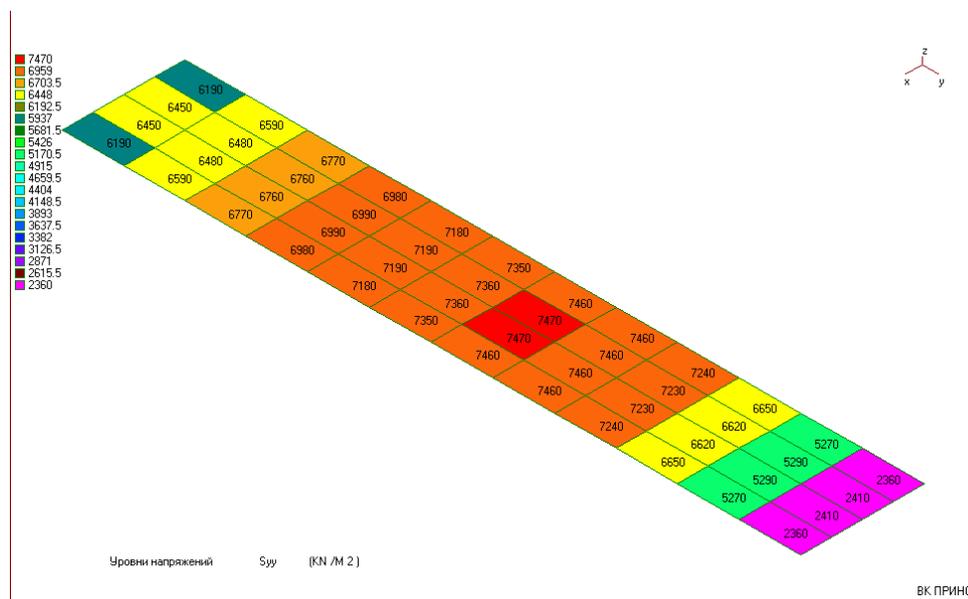


Рис. 6. Напряжения на верхней поверхности при сетке 4×12
 Fig. 6. Stresses on the upper surface of the grid

Таблица 1. Сопоставительный анализ результатов
 Table 1. Comparative analysis of results

Y (м)	Grid Сетка 4×4			Grid Сетка 4×12			Аналитическое решение Analytical solution		
	M_y (Нм)	σ_y (кПа)	w (см)	M_y (Нм)	σ_y (кПа)	w (см)	M_y (Нм)	σ_y (кПа)	w (см)
1,5	207	6460		210	6535		210	6556	
4,5	147,7	7090		148,8	7185		150	7200	
7,5	88,2	7325		89,8	7460		90	7479	
10,5	27,0	4800		29,8	5280		30	5325	
12,0			0,123			0,125	0		0,126

Задача 2. В качестве тестовой задачи рассчитана плита треугольной формы в плане, имеющая размеры и нагруженная, как показано на рис.7. В качестве материала использовался бетон со следующими характеристиками: $E = 3,2 \times 10^7$ кПа; $\nu = 0,2$. Плита защемлялась по левому краю. Расчетная схема плиты представлена на рис.8.

Напряжения выводились в центре тяжести каждого треугольного элемента и для верхней поверхности плиты показаны на рис.9.

Для оценки точности разработанного элемента был выполнен аналитический расчет по балочной теории. Плита рассматривалась как балка переменной жесткости. Прогобы определялись из дифференциального уравнения, которое составлялось в осях $x_1 y_1$ (см. рис.7).

$$EI(x_1)y_1'' = Px_1, \quad a)$$

Момент инерции сечения определялся по формуле

$$I(x_1)_1 = \frac{b(x_1)h^3(x_1)}{12}. \quad б)$$

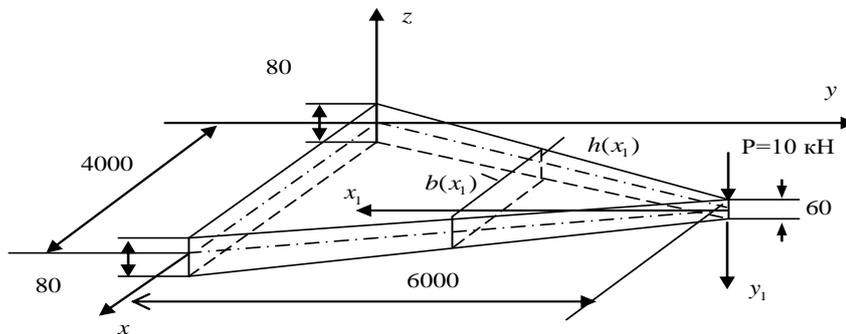


Рис. 7. Консольная плита
 Fig. 7. Cantilever plate

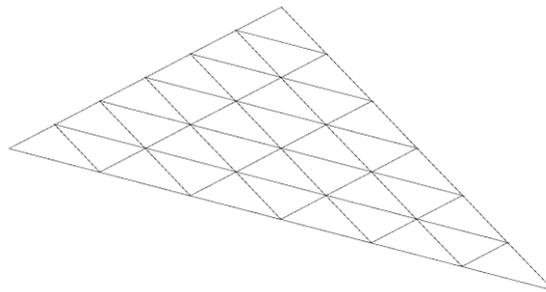


Рис. 8. Расчетная схема плиты
 Fig.8. Design scheme of the slab

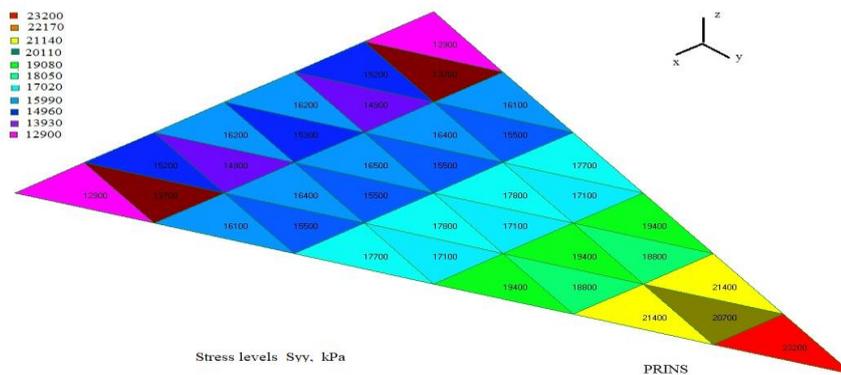


Рис. 9. Напряжения на верхней поверхности плиты, кПа
 Fig. 9. Stresses on the upper surface of the slab, kPa

При принятых размерах плиты максимальное значение прогиба, найденное из уравнения (а), составило 0,2637 м. Максимальное значение прогиба при расчете плиты методом конечных элементов равно 0,267 м. Расхождение по максимальному значению прогиба составило 1,25%.

Аналитические значения напряжений находились в предположении их равномерного распределения по ширине сечения по формуле

$$\sigma_{y,\max} = \frac{M(x_1)}{W(x_1)} = \frac{6M(x_1)}{b(x_1)h^2(x_1)} \quad в)$$

Среднее значение напряжений σ_y в центрах тяжести ряда элементов, прилегающего к заделке, полученное расчетом методом конечных элементов, составило 14766 КПа.

По формуле (6) найдено значение σ_y равное 14461 КПа. Расхождение составило 2.1%. Напряжение в центре тяжести элемента, прилегающего к вершине клина, из расчета МКЭ равно 23200 КПа.

По формуле (6) в этом сечении найдено $\sigma_{y,max} = 22987$ кПа. Расхождение напряжений в этом сечении равно 0,93%.

Вывод. Таким образом, разработанный элемент обеспечивает приемлемую точность результатов, как по перемещениям, так и по напряжениям.

Также представляет интерес задача расчета железобетонной консольной прямоугольной плиты с размерами 3x1 (в метрах) постоянного и переменного сечения по толщине на действие равномерно распределенной нагрузки и собственный вес, где получены результаты и дана их сравнительная оценка [11].

На основе проведенных расчетов можно сделать вывод, что программный комплекс ПРИНС, на основе разработанного конечного элемента переменного сечения, может оказаться полезным при проектировании и расчете конструкций, содержащих плиты переменной толщины.

Библиографический список:

1. J.K.Lee, A.W.Leissa, A.J.Wang. J. of Engineering for Gas Turbines and Power, 106, Jan(1084).
2. V.P.Agapov. The analysis of the Turbo-Propeller Aviation Engines Blades by Finite Element Method. NWC 2013 (2013)
3. Конструкции железобетонные и бетонные градирен. Правила проектирования. Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства, Свод правил (Москва, 2016).
4. Современные пространственные конструкции (железобетон, металл, дерево, пластмассы): Справочник / Ю. А. Дыховичный, Э.З. Жуковский, В. В. Ермолов и др.; Под ред. Ю. А. Дыховичного, Э.З. Жуковского.М.: Высш. шк., 1991.543 с.
5. SP 52-117-2008. Железобетонные пространственные конструкции покрытий и перекрытий. Часть II. Методы расчета и конструирование (Москва. 2008).
6. К.А.Басов. ANSYS: Справочник пользователя (Москва: ДМК Пресс, 2005). 640с.
7. С. Городецкий, И.Д. Евзеров. Компьютерные модели конструкций (Киев: Факт, 2007).
8. Карпенко С.Н.. Модели деформирования бетона в приращениях и методы расчета конструкций (Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Москва, 2010).
9. H.G.Kwak, F.C.Filippou. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads (Department of Civil Engineering University of California Berkeley, California, Report NO.UCB/SEMM-90/14, 2004).
10. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций (Изд-во АСВ, Москва, 2005).
11. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. О расчете железобетонных плит переменной толщины в вычислительном комплексе "ПРИНС".

References:

1. J.K. Lee, A. W. Leissa, A. J. Wang. J. of Engineering for Gas Turbines and Power, 106, Jan (1084).
2. V.P. Agapov. The analysis of the Turbo-Propeller Aviation Engines Blades by Finite Element Method. NWC 2013. 2013.
3. Konstruktsii zhelezobetonnyye i betonnyye gradiren. Pravila proyektirovaniya. Ministerstvo stroitel'stva i zhilishchno-kommunal'nogo khozyaystva, Svod pravil (Moskva, 2016). [Reinforced concrete and concrete cooling tower structures. Design rules. Ministry of Construction and Housing and Communal Services, Code of Rules (Moscow, 2016) (In Russ)]
4. Sovremennyye prostranstvennyye konstruktsii (zhelezobeton, metall, derevo, plastmassy): Spravochnik / YU. A. Dykhovichnyy, E.Z. Zhukovskiy, V. V. Yermolov i dr.; Pod red. YU. A. Dykhovichnogo, E.Z. Zhukovskogo.M.: Vyssh. shk., 1991.543 s. [Modern spatial structures (reinforced concrete, metal, wood, plastics): Handbook / Yu. A. Dykhovichny, E.Z. Zhukovsky, V.V. Ermolov and others; Ed. A. Dykhovichny, E.Z. Zhukovsky), Moscow: Vyssh. shk., 1991.543 p. (In Russ)]

5. SP 52-117-2008. Zhelezobetonnyye prostranstvennyye konstruksii pokrytiy i perekrytiy. Chast' I. Metody rascheta i konstruirovaniye (Moskva. 2008). [SP 52-117-2008. Reinforced concrete spatial structures of roofs and floors. Part I. Calculation methods and design (Moscow. 2008). (In Russ)]
6. K.A.Basov ANSYS: Spravochnik pol'zovatelya (Moskva: DMK Press, 2005 [K.A.Basov ANSYS: User's Guide (Moscow: DMK Press, 2005. 640p.). (In Russ)]
7. S. Gorodetskiy, I.D. Yevzerov. Komp'yuternyye modeli konstruksiy (Kiyev: Fakt, 2007). [S. Gorodetskiy, I.D. Yevzerov. Computer models of structures (Kiev: Fakt, 2007). (In Russ)]
8. Karpenko S.N.. Modeli deformirovaniya betona v prirashcheniyakh i metody rascheta konstruksiy (Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora tekhnicheskikh nauk, Moskva, 2010). [Karpenko S.N. Models of concrete deformation in increments and methods of calculating structures (Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, Moscow, 2010). (In Russ)]
9. H.G. Kwak, F.C. Filippou. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads (Department of Civil Engineering University of California Berceley, California, Report NO.UCB / SEMM-90/14, 2004).
10. Agapov V.P. Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti konstruksiy (Izd-vo ASV, Moskva, 2005 [Agapov V.P. Finite Element Method in Statics, Dynamics and Stability of Structures (ASV Publishing House, Moscow, 2005). (In Russ)]
11. Agapov V.P., Aydemirov K.R. O raschete zhelezobetonnykh plit peremennoy tolshchiny v vychislitel'nom komplekse "PRINS". [Agapov V.P., Aydemirov K.R. On the calculation of reinforced concrete slabs of variable thickness in the "PRINS" computer complex. (In Russ)]

Сведения об авторах:

Айдемиров Курбан Рабаданович, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; e-mail: kyrayd@mail.ru

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики и математики; e-mail: agapovpb@mail.ru

Муртазалиев Гелани Муртазалиевич, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; e-mail: smdstu@mail.ru

Information about the authors:

Kurban R. Aidemirov, Cand. Sci. (Technical), Assoc. Prof., Department of Resistance of Materials, Theoretical and Structural Mechanics; e-mail: kyrayd@mail.ru

Vladimir P. Agapov, Dr. Sci., (Technical), Prof., Department of Applied Mechanics and Mathematics; e-mail: agapovpb@mail.ru

Gelani M. Murtazaliev, Dr. Sci. (Technical), Prof., Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics; e-mail: smdstu@mail.ru

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 29.10.2019.

Принята в печать 21.11.2019.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 29.10.2019.

Accepted for publication 21.11.2019.