

**Для цитирования** М.А. Кальмова. Нестационарная задача обратного пьезоэффекта для длинного пьезокерамического термоупругого цилиндра. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020;47 (4):57-68. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-57-68

**For citation:** M.A. Kalmova. Dynamic inverse piezo-effect problem for a long piezoceramic thermoelastic cylinder. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2020;47(4):57-68.(In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-4-57-68

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ, МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОЕ И ХИМИЧЕСКОЕ МАШИНОСТРОЕНИЕ POWER, METALLURGICAL AND CHEMICAL MECHANICAL ENGINEERING

УДК 539.3

DOI: 10.21822/2073-6185-2020-47-4-57-68

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ОБРАТНОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

**М.А. Кальмова**

Самарский государственный технический университет,  
443001 г. Самара, ул. Молодогвардейская 244, Россия

**Резюме. Цель.** Целью работы является решение несвязанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра при действии на его поверхностях электрической нагрузки в виде разности потенциалов. **Метод.** Математическая формулировка рассматриваемой задачи термоэлектроупругости включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений. Для ее решения на первом этапе рассматривается связанная задача обратного пьезоэффекта без учета влияния температурного поля, а на следующем – исследуется гиперболическая задача теплопроводности (LS–теория) при заданном (определенном) электроупругом поле. **Результат.** Построено новое замкнутое решение динамической задачи обратного пьезоэффекта для длинного пьезокерамического термоупругого цилиндра. Рассматривается случай действия на его лицевых поверхностях нестационарной электрической нагрузки в виде разности потенциалов. Заданы температура окружающей среды и закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3– рода). Расчетные соотношения, полученные с помощью обобщенного метода конечных интегральных преобразований, дают возможность определить напряженно–деформированное состояние и термоэлектрические поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном электрическом внешнем воздействии. **Вывод.** Построенное решение позволяет определить напряженно–деформированное состояние и электрическое поле в пьезокерамическом цилиндре, а также проанализировать с помощью гиперболической LS–теории теплопроводности влияние индуцируемого температурного поля на электроупругое состояние рассматриваемой системы. Анализ численных результатов позволяет сделать вывод о незначительных потерях энергии, связанных с нагревом электроупругой системы. Разработанный алгоритм расчета находит свое применение при проектировании нерезонансных и резонансных пьезоэлектрических измерительных приборов.

**Ключевые слова:** длинный пьезокерамический цилиндр, задача термоэлектроупругости, нестационарное воздействие, конечные интегральные преобразования

### DYNAMIC INVERSE PIEZO-EFFECT PROBLEM FOR A LONG PIEZOCERAMIC THERMOELASTIC CYLINDER

**M.A. Kalmova**

Samara State Technical University,  
244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443001, Russia

**Abstract. Objective.** The objective of this work is to solve an unrelated dynamic problem of thermoelectroelasticity for a long hollow piezoceramic cylinder under the action of an electric load on its surfaces in the form of a potential difference. **Methods.** The mathematical formulation of the con-

sidered problem of thermoelectroelasticity includes a system of non-selfadjoint differential equations. At the first stage, the authors consider the associated inverse piezoelectric effect problem without taking into account the influence of the temperature field, and at the next stage, study the hyperbolic heat conduction problem (Lord–Shulman theory) for a given (defined) electroelastic field. **Result.** A new closed solution to the dynamic inverse piezoelectric effect problem for a long piezoceramic thermoelectric cylinder is constructed. The case of the action of a dynamic electric load in the form of a potential difference on its front surfaces is considered. The ambient temperature and the law of convection heat transfer (3-kind boundary condition) are set. The calculated relations obtained using the generalized method of finite integral transformations allow determining the stress-strain state and thermoelectric fields induced in a piezoceramic element under an arbitrary electrical external influence. **Conclusion.** The constructed solution allows determining the stress-strain state and electric field in a piezoceramic cylinder, as well as analyzing the effect of the induced temperature field on the electroelastic state of the system under consideration using the hyperbolic Lord–Shulman theory of thermal conductivity. Analysis of the numerical results allows concluding that there are insignificant energy losses associated with heating the electroelastic system. The developed calculation algorithm is used in the design of non-resonant and resonant piezoelectric measuring devices.

**Keywords:** long piezoceramic cylinder, thermoelasticity problem, dynamic action, finite integral transformations

**Введение.** Пьезокерамические материалы находят широкое применение при разработке измерительных приборов различного назначения. Их работа основана на связанности электроупругих полей, индуцируемых в элементе [1–6]. Для расширения функциональных возможностей приборов данного типа возникает необходимость углубленного анализа нестационарных процессов, позволяющего понять эффект взаимодействия электрических и упругих полей, а также влияние на них температурных полей.

Математическая формулировка начально-краевых задач термоэлектроупругости включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений, исследование которых, как правило, проводится при использовании численных методов [7–9]. Однако достаточно слабые эффекты взаимодействия полей различной физической природы удастся проанализировать только с помощью замкнутых аналитических решений. Проблема интегрирования исходных расчетных соотношений и построение общего решения приводит к проведению расчетов в упрощенной постановке, а именно, исследуются несвязанные задачи [10,11] или анализируются бесконечно длинные тела [12–14]. При этом в большинстве работ, в качестве внешнего воздействия рассматривается нестационарная температурная нагрузка. В свою очередь, при решении задач прямого и обратного пьезоэффектов, электроупругая конструкция рассматривается, как консервативная система без потери энергии на ее нагрев [15–18].

**Постановка задачи.** Целью настоящей работы является решение несвязанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра при действии на его поверхностях электрической нагрузки в виде разности потенциалов. Построенное решение позволяет определить напряженно–деформированное состояние и электрическое поле в пьезокерамическом цилиндре, а также проанализировать с помощью гиперболической LS–теории теплопроводности влияние индуцируемого температурного поля на электроупругое состояние рассматриваемой системы.

**Методы исследования.** Пусть полый длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z)$  область  $\Omega$ :  $\{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$ . Рассматривается случай действия на лицевых электродированных поверхностях нестационарной нагрузки в виде разности потенциалов  $2V^*(t_*)$ , явля-

ющейся произвольной функцией времени  $t_*$ . При этом известны температура окружающей среды  $\vartheta^*$  и закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3– рода).

В общем случае дифференциальные уравнения термоэлектродупругости и краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме записываются следующим образом [19, 20]:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial U}{\partial r} - n_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - n_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + n_3 \frac{\Theta}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + n_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + n_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + n_6 \nabla \Theta &= 0, \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( n_7 \Theta + n_8 \nabla U - n_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + n_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi = \pm V, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} + n_{11} \Theta = n_{11} \vartheta; \quad (2)$$

$$t = 0 \quad U = \phi = \Theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \{U, \phi, \Theta\} = \{U_0, \phi_0, \Theta_0\}; \quad (3)$$

где  $\{U, U_0, r, R\} = \{U^*, U_0, r_*, a\}/b$ ,  $\{\Theta, \Theta_0, \vartheta\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}}$ ,  $\{\Theta^*, \Theta_0, (\vartheta - T_0)\}$

$$\{\phi, \phi_0, V\} = \frac{e_{33}}{C_{33}b}, \{\phi^*, \phi_0, V^*\}, \quad t = \frac{t_*}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad n_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad n_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad n_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}},$$

$$n_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}\varepsilon_{33}}, \quad n_5 = \frac{e_{31}e_{33}}{C_{33}\varepsilon_{33}}, \quad n_6 = \frac{g_3e_{33}}{\varepsilon_{33}\gamma_{33}}, \quad n_7 = k \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad n_8 = \frac{b\gamma_{33}^2 T_0}{\Lambda \sqrt{C_{33}\rho}},$$

$$n_9 = \frac{b\gamma_{33}g_3T_0}{e_{33}\Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad n_{10} = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad n_{11} = \alpha \frac{b}{\Lambda}, \quad \beta = \frac{\beta_{rel}}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

$U^*(r_*, t_*)$  – радиальная составляющая вектора перемещений;  $\phi^*(r_*, t_*)$  – потенциал электрического поля;  $\Theta^* = T - T_0$ ;  $\Theta^*, T, T_0$  – приращение и текущая температуры, а также температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения;  $C_{ms}, e_{ms}, \varepsilon_{33}$  – модули упругости, пьезомодули и коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого материала ( $m, s = \overline{1, 3}$ );  $\Lambda, k$  – коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости материала;  $\gamma_{11}, \gamma_{33}$  – компоненты тензора температурных напряжений;  $g_3$  – компонента тензора пироккоэффициентов;  $\beta_{rel}$  – время релаксации;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $U_0^*, \phi_0^*, \Theta_0^*$  известные в начальный момент времени скорости перемещения, потенциала и температуры.

Невозможность построения общего решения для несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (1) в связанной постановке приводит к использованию алгоритма, когда на первом этапе рассматривается задача обратного пьезоэффекта без учета влияния температурного поля, а на следующем – исследуется задача теплопроводности при заданном (определенном) электроупругом поле.

**Построение общего решения задачи электроупругости.** Математическая формулировка рассматриваемой задачи на основании расчетных соотношений (1)–(3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial U}{\partial r} - n_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - n_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + n_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + n_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + n_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi = \pm V; \quad (5)$$

$$t = 0 \quad U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = U_0; \quad (6)$$

На первом этапе решения выполняется процедура приведения расчетных соотношений (4) – (6) к виду, позволяющему в дальнейшем использовать метод конечных интегральных преобразований [21]. Для этого вводятся новые функции  $u(r, t)$ ,  $\chi(r, t)$ , связанные с  $U(r, t)$ ,  $\phi(r, t)$  следующими соотношениями:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + u(r, t), \quad \phi(r, t) = H_2(r, t) + \chi(r, t), \quad (7)$$

$$\text{где } \{H_1(r, t), H_2(r, t)\} = \{f_1(r), f_2(r)\} V(t).$$

Подстановка (7) в (4) – (6), при удовлетворении условий

$$r = R, 1 \quad \frac{df_1(r)}{dr} + n_{10} \frac{f_1(r)}{r} + \frac{df_2(r)}{dr} = 0, \quad f_2(r) = \pm 1; \quad (8)$$

позволяет получить краевую задачу относительно функций  $u(r, t)$ ,  $\chi(r, t)$  с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial u}{\partial r} - n_1 \frac{u}{r^2} + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - n_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= R_1, \\ -\nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} + n_4 \nabla \frac{\partial u}{\partial r} + n_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} &= R_2; \end{aligned} \quad (9)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial u}{\partial r} + n_{10} \frac{u}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0, \quad \chi = 0; \quad (10)$$

$$t = 0 \quad u = -H_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = U_0 - \frac{\partial H_1}{\partial t}; \quad (11)$$

$$\text{где } R_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + n_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + n_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}, \quad R_2 = \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - n_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - n_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r}.$$

Начально–краевую задачу (9)–(11) решаем, используя структурный алгоритм вырожденного обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) [21]. Для этого вводим на сегменте  $[R, 1]$  КИП с неизвестными компонентами вектор–функции ядра преобразований  $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)$ :

$$G(\lambda_i, t) = \int_R^1 u(r, t) n_4 K_1(\lambda_i, r) r dr, \quad (12)$$

$$\{u(r, t), \chi(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)\} \|K\|^{-2}, \quad \|K_i\|^2 = n_4 \int_R^1 K_1(\lambda_i, r)^2 r dr,$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения.

В результате использования алгоритма КИП получаем задачи для трансформанты  $G(\lambda_i, t)$ :

$$\frac{d^2 G_i}{dt^2} + \lambda_i^2 G_i = R_H, \quad (13)$$

$$t = 0 \quad G_{i|t=0} = G_0, \quad \frac{dG_i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dG_0}{dt}; \quad (14)$$

и компонент ядра преобразований  $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dK_1}{dr} - n_1 \frac{K_1}{r^2} + \nabla \frac{dK_2}{dr} - n_2 \frac{1}{r} \frac{dK_2}{dr} + \lambda_i^2 K_1 &= 0, \\ -\nabla \frac{dK_2}{dr} + n_4 \nabla \frac{dK_1}{dr} + n_5 \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dK_1}{dr} + n_{10} \frac{K_1}{r} + \frac{dK_2}{dr} = 0, \quad K_2 = 0; \quad (16)$$

$$\text{где } R_H = -\int_R^1 (R_1 K_1 + R_2 K_2) r dr, \quad G_0 = -\int_R^1 H_{1|t=0} K_1 r dr, \quad \frac{dG_0}{dt} = \int_R^1 \left( U_0 - \frac{\partial H_1}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} K_1 r dr$$

Общий интеграл уравнения (13), с учетом начальных условий (14), имеет вид:

$$G(\lambda_i, t) = G_0 \cos \lambda_i t + \frac{dG_0}{dt} \frac{\sin \lambda_i t}{\lambda_i} + \lambda_i^{-1} \int_0^t R_H(\tau) \sin \lambda_i (t - \tau) d\tau. \quad (17)$$

Система (15) приводится к следующему разрешающему уравнению относительно функции  $K_1(\lambda_i, r)$ :

$$\frac{d^2 K_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} + \left( A_i^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) K_1 = n_{12} \frac{D_{1i}}{r^2}, \quad (18)$$

решение которого, имеет вид

$$K_1(\lambda_i, r) = D_{1i} n_{12} Q_{v,-1}(A_i r) + D_{2i} J_v(A_i r) + D_{3i} Y_v(A_i r). \quad (19)$$

Здесь  $Q_{v,-1}(\dots), J_v(\dots), Y_v(\dots)$  – неэлементарные функции Ломмеля, обыкновенные функции Бесселя 1-го и 2-го родов порядка  $v$  [22];  $D_{1i} \dots D_{3i}$  – постоянные интегрирования;

$$A_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{1 + n_4}, \quad v^2 = \frac{n_1 + n_2 n_5}{1 + n_3}, \quad n_{12} = \frac{n_2}{1 + n_4}.$$

Интегрирование второго уравнения (15) позволяет определить функцию  $K_2(\lambda_i, r)$ :

$$K_2(\lambda_i, r) = n_4 K_1(\lambda_i, r) + n_5 \int K_1(\lambda_i, r) r^{-1} dr + D_{1i} \ln(r) + D_{4i}. \quad (20)$$

Подстановка  $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)$  в граничные условия (16) формирует систему алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить постоянные интегрирования  $D_{1i} \dots D_{4i}$  и собственные значения  $\lambda_i$ .

Окончательные выражения функций  $U(r, t), \phi(r, t)$  получим, применяя к трансформанте (17) формулы обращения (12). В результате, с учетом (7), имеем:

$$\{U(r, t), \phi(r, t)\} = \{H_1(r, t), H_2(r, t)\} + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)\} \|K_i\|^2. \quad (21)$$

Функции  $f_1(r), f_2(r)$  определяются при решении следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \nabla \frac{df_1(r)}{dr} - n_1 \frac{f_1(r)}{r^2} + \nabla \frac{df_2(r)}{dr} - n_2 \frac{1}{r} \frac{df_2(r)}{dr} &= 0, \\ \nabla \frac{df_2(r)}{dr} - n_4 \nabla \frac{df_1(r)}{dr} - n_5 \frac{1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

и удовлетворение граничных условий (8), что позволяет существенно упростить правые части расчетных соотношений (9).

**Построение общего решения задачи теплопроводности.** Математическая формулировка данной задачи записывается следующим образом:

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - n_7 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta = R_3; \quad (23)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} + n_{11} \Theta = n_{11} \mathcal{G}; \quad (24)$$

$$t = 0 \quad \Theta = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Theta_0; \quad (25)$$

$$\text{где} \quad R_3 = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( n_8 \nabla U - n_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right).$$

Процедура стандартизации граничных условий (24) выполняется с помощью замены  $\Theta(r, t)$  новой функцией  $L(r, t)$  с помощью такого разложения:

$$\Theta(r, t) = \mathcal{G} + L(r, t), \quad (26)$$

Подстановка (26) в (23) – (25) позволяет получить краевую задачу относительно функций  $L(r, t)$  с однородными граничными условиями:

$$\nabla \frac{\partial L}{\partial r} - n_7 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) L = R_3; \quad (27)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial L}{\partial r} + n_{11} L = 0; \quad (28)$$

$$t = 0 \quad L = -\mathcal{G}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = \Theta_0; \quad (29)$$

Использование обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) [21] путем введения неизвестной функции ядра преобразований  $N(\mu_i, r)$ :

$$Y(\mu_i, t) = \int_R^1 L(r, t) N(\mu_i, r) r dr, \quad (30)$$

$$L(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y(\mu_i, t) N(\mu_i, r) \|N_i\|^{-2}, \quad \|N_i\|^2 = \int_R^1 N(\lambda_i, r)^2 r dr,$$

позволяет получить задачи для трансформанты  $Y(\mu_i, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) Y_i + \frac{\mu_i^2}{n_7} Y_i = F_H, \quad (31)$$

$$t = 0 \quad Y_0 = -\mathcal{G} \int_R^1 N r dr, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \int_R^1 \Theta_0 r N dr; \quad (32)$$

и функции ядра преобразований

$$\frac{d^2 N}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dN}{dr} + \mu_i^2 N = 0, \quad (33)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial N}{\partial r} + n_{11} N = 0; \quad (34)$$

где  $F_H = -\frac{1}{n_7} \int_R^1 R_3 r N dr$ ,  $\mu_i$  – собственные значения.

Общий интеграл уравнения (31), с учетом начальных условий (32), имеет вид:

$$Y(t) = (p_1 - p_2)^{-1} \left\{ \frac{\partial Y_0}{\partial t} (\exp p_2 t - \exp p_1 t) + \int_0^t F_H(\tau) [\exp p_1(t - \tau) - \exp p_2(t - \tau)] d\tau \right\}, \quad (35)$$

а решение равенства (33) записывается следующим образом:

$$N(\mu_i, r) = E_{1i} J_0(\mu_i r) + E_{2i} Y_0(\mu_i r), \quad (36)$$

$$\text{где } p_{1,2} = \frac{-\beta^{-1} \pm \sqrt{\beta^{-2} - 4\mu_i^2 (\beta n_7)^{-1}}}{2}.$$

Подстановка (36) в граничные условия (34) формирует выражения для постоянных интегрирования  $E_{1i}, E_{2i}$ :

$$E_{1i} = n_{11} Y_0(\mu_i R) - \mu_i Y_1(\mu_i R), \quad E_{2i} = \mu_i J_1(\mu_i R) - n_{11} J_0(\mu_i R),$$

и трансцендентное уравнение для определения  $\mu_i$ :

$$E_{1i} [n_{11} J_0(\mu_i) - \mu_i J_1(\mu_i)] + E_{2i} [n_{11} Y_0(\mu_i) - \mu_i Y_1(\mu_i)] = 0.$$

Окончательные выражения функции  $\Theta(r, t)$  получим, применяя к трансформанте (35) формулу обращения (30).

В результате, с учетом (26), имеем:

$$\Theta(r, t) = \mathcal{G} + \sum_{i=1}^{\infty} Y(\mu_i, t) N(\mu_i, r) \|N_i\|^2. \quad (37)$$

**Численный анализ результатов.** В качестве примера рассматривается радиально поляризованный пьезокерамический цилиндр ( $R = 0.8$ ,  $b = 0.02$  м) состава PZT-4, имеющего следующие физические характеристики:  $\{e_{31}, e_{33}\} = \{-5.2, 15.1\}$  Кл/м<sup>2</sup>,

$\varepsilon_{33} = 5.62 \times 10^{-9}$  Ф/м,  $\{C_{11}, C_{33}, C_{13}\} = \{13.9, 11.5, 7.43\} \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\{\gamma_{11}, \gamma_{33}\} = \{4.6, 3.9\} \times 10^5$  Н/(м<sup>2</sup> К),  $g_3 = 2 \times 10^{-4}$  Кл/(м<sup>2</sup> К),  $k = 3 \times 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> К),  $\Lambda = 1.6$  Вт/(м К),  $\alpha = 5.6$  Вт/(м<sup>2</sup> К) [16].

Рассматривается случай действия гармонической электрической нагрузки на поверхностях цилиндра:

$$V(t) = V_0 \sin \theta t,$$

где  $V_0, \theta$  – амплитудное значение потенциала и частота вынужденных колебаний в безразмерной форме.

**Обсуждение результатов.** На рис. 1,2 представлены графики изменения перемещений  $U(r, t)$  по времени  $t$ , а также потенциала  $\phi(r, t)$  (кривая 1) и напряженности  $E_r(r, t)$  (2) электрического поля по радиальной координате  $r$  ( $\theta = 0.9\lambda_1$ ). Пунктирной линией обозначена оциллограмма внешней электрической нагрузки.

Анализ представленных графиков позволяет сделать следующие выводы:

1. При высокочастотном внешнем воздействии ( $\theta = 0.9\lambda_1$ ) вследствие наложения волн деформирования в электроупругой системе наблюдается сложная зависимость изменения перемещений во времени (рис. 1). Поэтому обычно применяемое, при исследовании подобных задач, допущение об установившемся режиме вынужденных колебаний можно использовать только при решении задач на собственные значения;
2. Использование гипотез о линейной зависимости потенциала  $\phi(r, t)$  и постоянном значении напряженности  $E_r(r, t) = \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r}$  электрического поля при исследовании задач обратного пьезоэффекта с помощью прикладных теорий не находят свое подтверждение при решении динамических задач (рис. 2).

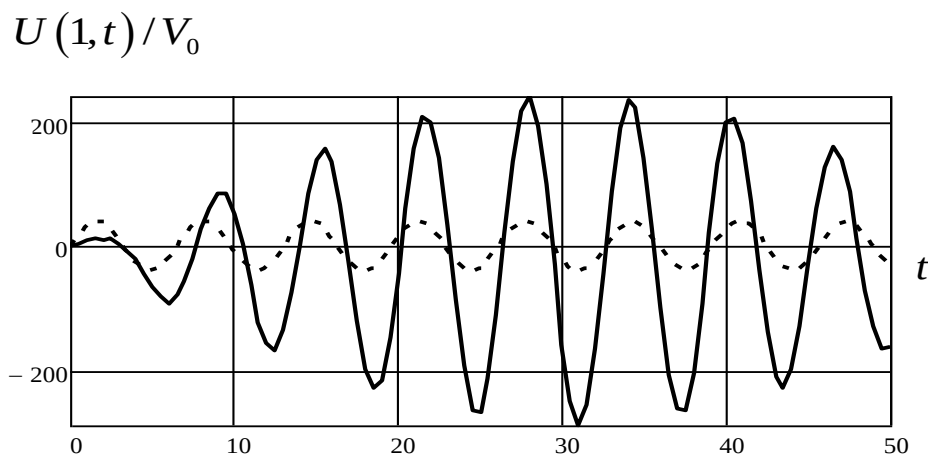


Рис.1. График изменения перемещений  $U(1, t)$  по времени  $t$

Fig.1. Time displacement graph

При решении задачи теплопроводности на первом этапе решается обратная задача, связанная с определением скорости изменения температуры  $\Theta_0(r) = \Theta_0$  в начальный момент времени. Величина  $\Theta_0$  определялась из условия, что в случае действия гармонической нагрузки при установившемся режиме в исследуемом элементе наблюдается постоянное температурное поле.

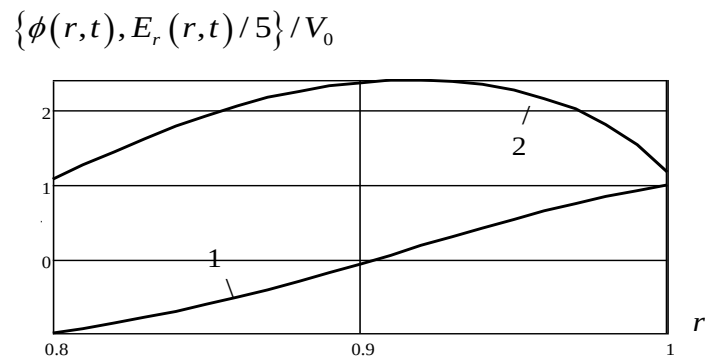


Рис.2. Графики изменения амплитудных значений потенциала  $\phi(r, t)$  (кривая 1) и напряженности  $E_r(r, t)$  (2) электрического поля по радиальной координате  $r$

Fig.2. Graphs of changes in the amplitude values of the potential (curve 1) and intensity (2) of the electric field along the radial coordinate



На рис. 3 представлены графики изменения температуры  $\Theta^*(1,t)$  во времени  $t$ . Очевидно, при  $t > 10$  условие  $\frac{\partial \Theta^*(1,t)}{\partial t} = 0$  выполняется при  $\Theta_0 = 1.9/V_0$  (рис. 3, график 1).

Здесь следует отметить, что полученные качественные результаты можно получить только при использовании гиперболической теории теплопроводности.

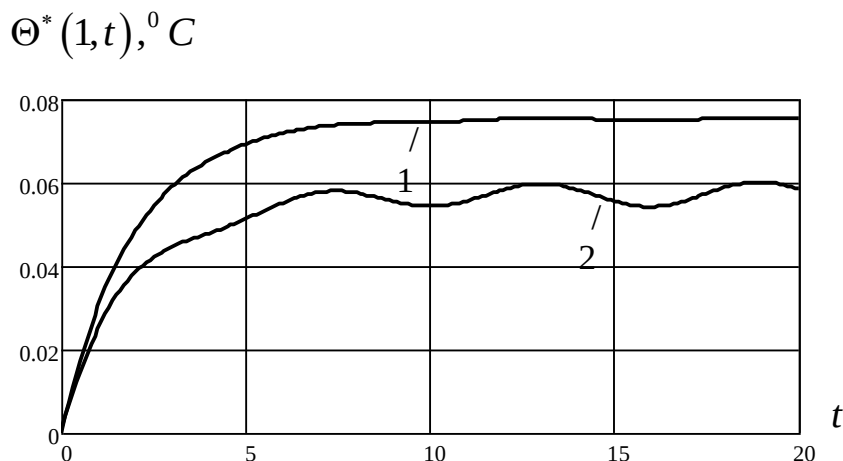


Рис.3. Графики изменения температуры  $\Theta^*(1,t)$  по времени  $t$

Fig.3. Temperature graphs over time  
 (1 –  $\Theta_0 = 1.9/V_0$ , 2 –  $\Theta_0 = 1.4 V_0$ )

Принимая  $T_0 = 295 \text{ K}$  ( $22^\circ \text{C}$ ),  $\Theta_0 = 1.9/V_0$ ,  $V_0^* = 10 \text{ В}$ , получаем следующую картину изменения температурного поля по радиальной координате в цилиндре (рис. 4). Цифрами 1,2 обозначены результаты для времени  $t = 30, 7$ .

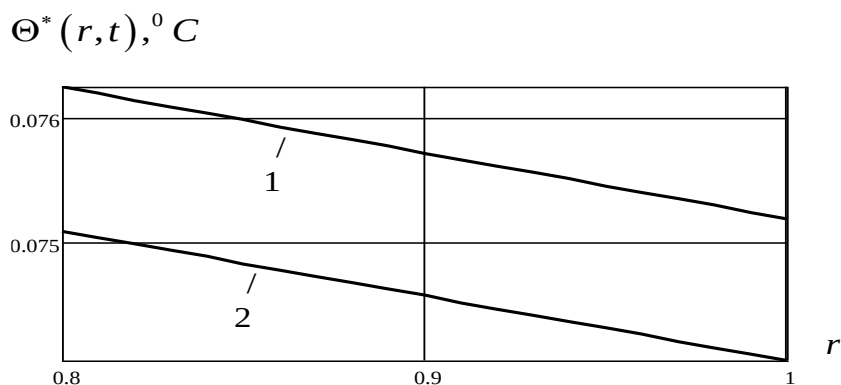


Рис.4. Графики изменения температуры  $\Theta^*(1,t)$  по радиальной координате

$r$  (1–  $t = 30$ , 2–  $t = 7$ )

Fig.4. Temperature graphs  $\Theta^*(1,t)$  along the radial coordinate  $r$  (1–  $t = 30$ , 2–  $t = 7$ )

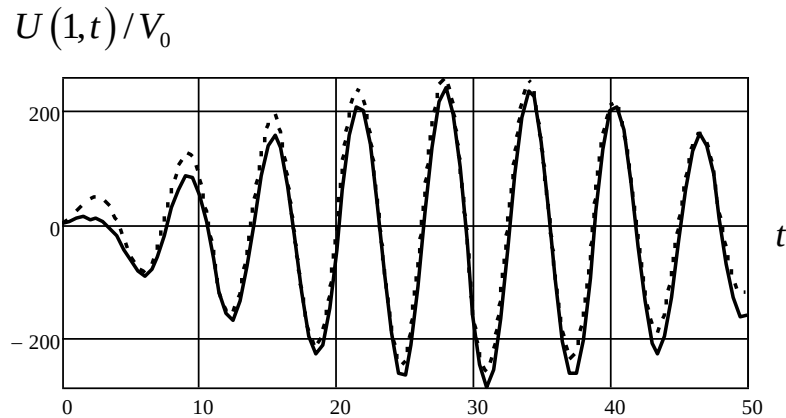
Был выполнен эксперимент, где измерения температуры проводились с помощью прибора Center 301. Результаты показали, что температура на лицевых поверхностях исследуемого элемента при внешнем воздействии повысилась на  $0.1^\circ \text{C}$ , что практически повторяет результаты теоретических расчетов (рис.3,4).

Для оценки влияния температуры на электроупругое поле правые части дифференциальных уравнений  $R_1, R_2$  (9), с учетом равенств (1), записываются следующим образом:

$$R_1 = \nabla \Theta - n_3 \frac{\Theta}{r} - \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + n_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + n_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2},$$

$$R_2 = -n_6 \nabla \Theta + \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - n_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - n_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r}.$$

На рис.5 представлены зависимости " $U(1,t) - t$ " с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) влияния температуры на радиальные перемещения. Численный анализ результатов показывает, что температурное поле практически не влияет на величину  $U(1,t)$ , т.е. в задачах обратного пьезоэффекта можно пренебречь потерями энергии на нагрев электроупругой системы.



**Рис.5. Графики изменения температуры  $U(1,t)$  по времени  $t$**   
(сплошная и пунктирная линии – с учетом и без учета влияния температурного поля)  
**Fig.5. Temperature graphs  $U(1,t)$  over time  $t$**

(solid and dotted lines - with and without taking into account the influence of the temperature field)

**Вывод.** Следует отметить, что при решении динамических задач прямого и обратного пьезоэффекта пьезокерамические элементы можно рассматривать, как консервативные системы.

Однако при решении нестационарных задач термоэлектроупругости в случае действия температурной нагрузки необходимо исследовать расчетные соотношения с учетом связанности упругих, электрических и тепловых полей [13].

#### Библиографический список:

1. Бобцов А.А. Исполнительные устройства и системы для микроперемещений. СПб ГУ ИТМО, 2011.131 с.
2. Джагуров Р.Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления. СПб.: Политехника, 1994. 608 с.
3. Евсейчик Ю.Б., Медведев К.В. Чувствительность гидроакустического датчика давления // Гидравлика и гидротехника. Науч.- техн. сб. Киев: НТУ. 2008. Вып. 62. С. 10-16.
4. Янчевский И.В. Управление колебаниями изгиба круглого асимметричного биморфного пьезопреобразователя с разрезными электродами // Пробл. машиностроения. 2012. Т.15, № 2. С. 37-43.
5. Abedi M., Jafari-Talookolaei R., Valvo P. A new solution method for free vibration analysis of rectangular laminated composite plates with general stacking sequences and edge restraints // Computers & Structures. 2016. Vol. 175. pp. 144-156.
6. Berndt E.A., Sevostianov I. Action of a smooth flat charged punch on the piezoelectric half-space possessing symmetry of class // International Journal of Engineering Science. 2016. Vol. 103. pp. 77-96.
7. Abbas I.A., Youssef H.M. Finite element analysis of two-temperature generalized magneto-thermoelasticity/ Arch Appl Mech. 2009.79. 917–925.
8. He T. et al. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder/ European Journal of Mechanics A–Solids. 24 (2005). pp.349–359.
9. Youssef H.M. Theory of two-temperature generalized thermoelasticity/ IMA J.Appl.Math. 71(3) (2006)/383–390.
10. Фирсанов В.В., Нгуен, Ле Хунг. Напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термо-электрического воздействия на основе уточненной теории// Тепловые процессы в технике. 2010. №3. С.110–117.

11. Abbas I.A., Zenkour A.M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder/ Composite Structures. 96. (2013) 89–96.
12. Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкин А.В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектрорупругости // ПМТФ. 1996. Т.37. №5. С.135–142.
13. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектрорупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т.10. №2. С.117–126.
14. Белянкова Т.И., Калинин В.В. К моделированию преднапряженного термоэлектрорупругого полупространства с покрытием // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 117–135.
15. Ватульян А.О., Рынкова А.А. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях // Изв. РАН. МТТ. 2007. №4. С. 114–122.
16. Бардзюкас Д.И. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. II: Статические и динамические задачи электрорупругости для составных многосвязных тел. М.: Комкнига, 2005. 376 с.
17. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамической тонкой биморфной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2013. №2. С. 77–85.
18. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины // Изв. РАН. МТТ. 2014. №4. С. 90–100.
19. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
20. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
21. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Матем., механ., информатика, 2011. № 3(1). С. 61–89.
22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

#### References:

1. Bobtsov A.A. Ispolnitelnyye ustroystva i sistemy dlya mikroperemescheniy. SPb GU ITMO, 2011. 131 s. [Bobtsov A.A. Actuators and systems for micromovements. - SPb GU ITMO, 2011. 131 p. (In Russ)]
2. Dzhagurov R.G. Pezoelektronnyye ustroystva vyichislitel'noy tehniki, sistem kontrolya i upravleniya. SPb.: Politehnika, 1994. 608 s. [Dzhagurov R.G. Piezoelectronic devices of computer technology, control and management systems. SPb.: Polytechnic, 1994. 608 p. (In Russ)]
3. Yevseychik Y.B., Medvedev K.V. Sensitivity of the hydroacoustic pressure sensor // Hydraulics and hydraulic engineering. Scientific and technical Sat. Kiev: NTU. 2008. Issue. 62. pp. 10–16
4. Yanchevskiy I.V. Upravlenie kolebaniyami izgiba kruglogo asimmetrichnogo bi-morf'nogo pezo-preobrazovatelya s razreznymi elektrodami // Probl. mashinostroeniya. 2012. T.15, № 2. S. 37–43 [Yanchevsky I.V. Control of bending vibrations of a circular asymmetric bi-morphic piezoelectric transducer with split electrodes // Probl. mechanical engineering. 2012. T.15, No. 2. pp. 37–43 (In Russ)]
5. Abedi M., Jafari-Talookolaei R., Valvo P. A new solution method for free vibration analysis of rectangular laminated composite plates with general stacking sequences and edge restraints // Computers & Structures. 2016. Vol. 175. pp. 144–156.
6. Berndt E.A., Sevostianov I. Action of a smooth flat charged punch on the piezoelectric half-space possessing symmetry of class // International Journal of Engineering Science. 2016. Vol. 103. pp. 77–96.
7. Abbas I.A., Youssef H.M. Finite element analysis of two-temperature generalized magneto-thermoelasticity/ Arch Appl Mech. 2009.79. 917–925.
8. He T. et al. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder / European Journal of Mechanics A–Solids. 24 (2005).pp.349–359.
9. Youssef H.M. Theory of two-temperature generalized thermoelasticity/ IMA J.Appl.Math. 71(3) (2006)/383–390.
10. Firsanov V.V., Nguen, Le Hung. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye proiz-volnykh obolochek s uchetoм termoelektricheskogo vozdeystviya na osnove utochnennoy teorii // Teplovyye protsessy v tehnike. 2010. – №3. pp.110–117.
11. Abbas I.A., Zenkour A.M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder/ Composite Structures. 96. (2013) 89–96.
12. Vatulyan A.O., Kiryutenko A.Yu., Nasedkin A.V. Ploskie volny i fundamentalnyye resheniya v lineynoy termoelektro-ruprugosti // PMTF. –1996. –Т.37. –№5. – С.135–142 [Vatulyan A.O., Kiryutenko A.Yu., Nasedkin A.V. Plane waves and fundamental solutions in linear thermoelectroelasticity // PMTF. 1996. T.37. №5. pp.135–142 (In Russ)]
13. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Dinamicheskaya zadacha termoelektro-ruprugosti dlya funktsionalno-gradientnogo sloya// Vyichislitel'naya mehanika sploshnykh sred. 2017. T.10. №2. S.117–126 [Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Dynamic problem of thermoelectroelasticity for a functional-gradient layer // Computational mechanics of continuous media. 2017. T.10. №2. pp.117–126 (In Russ)]
14. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. K modelirovaniyu prednapryazhennogo termoelekt-rouprugogo poluprostranstva s pokrytiem // Izv. RAN. MTT. 2017. № 1. S. 117–135 [Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. On modeling a prestressed thermoelectroelastic half-space with a coating. Izv. RAS. MTT. 2017. No. 1. pp. 117–135 (In Russ)]
15. Vatulyan A.O., Ryinkova A.A. Ob odnoy modeli izgibnykh kolebaniy pezo-elektri-cheskikh bimorfov s razreznymi elektrodami i ee prilozheniyah// Izv. RAN. MTT. 2007. №4. S. 114–122 [Vatulyan A.O., Rynkova A.A. On one model of bending vibrations of piezoelectric bimorphs with split electrodes and its applications // Izv. RAN. MTT. 2007. No. 4. pp. 114–122 (In Russ)]
16. Bardzokas D.I. Matematicheskoe modelirovanie v zadachah mehaniki svyazannykh po-ley. T.II: Sticheskie i dinamicheskie zadachi elektro-ruprugosti dlya sostavnykh mnogo-svyaznykh tel. – М.: Komkniga, 2005. 376 s. [Bardzokas D.I. Mathematical

- modeling in problems of mechanics of coupled fields. Vol. II: Static and dynamic problems of electroelasticity for compound multi-connected bodies. M.: Komkniga, 2005. 376 p. (In Russ)]
17. Shlyahin D.A. Vyinuzhdenyie osesimmetrichnyie kolebaniya pezoeramicheskoy ton-koy bimorfnoy plastiny // Izv. RAN. MTT. 2013. №2. S. 77–85 [Shlyahin D.A. Forced axisymmetric vibrations of a piezoceramic thin bimorph plate // Izv. RAS. MTT. 2013. №2. pp. 77–85. (In Russ)]
  18. Shlyahin D.A. Vyinuzhdenyie osesimmetrichnyie kolebaniya tolstoy krugloy zhestko zakreplennoy pezoeramicheskoy plastiny // Izv. RAN. MTT. 2014. №4. S. 90-100 [Shlyahin D.A. Forced axisymmetric vibrations of a thick circular rigidly fixed piezoceramic plate // Izv. RAS. MTT. 2014. №4. pp. 90–100. (In Russ)]
  19. Kovalenko A.D. Vvedenie v termouprugost. –Kiev: Nauk. dumka, 1965. –204 s. [Kovalenko A.D. Introduction to thermoelasticity. Kiev: Nauk. dumka, 1965. 204 p. (In Russ)]
  20. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. Mechanics of linked fields in structural elements. Kiev: Nauk. dumka, 1989. 279 p.
  21. Senitskiy Yu.E. Metod konechnykh integralnykh preobrazovaniy – obobshchenie klassicheskoy protsedury razlozheniya po sobstvennyim vektor-funktsiyam // Izv. Saratovskogo un-ta. Novaya seriya. Matem., mehan., informatika, 2011. № 3(1). S. 61–89. [Senitskiy Yu.E. The method of finite integral transformations is a generalization of the classical procedure for expansion in eigenvector functions // Izv. Saratovskiy University. New series. Mat., Mechan., Informatics, 2011. No. 3 (1). pp. 61-89. (In Russ)]
  22. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam. M.: Nauka, 1965. 703 s. [Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. M.: Nauka, 1965. 703 p. (In Russ)]

**Сведения об авторе:**

Кальмова Мария Александровна, старший преподаватель кафедры строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты, e-mail: [kalmova@inbox.ru](mailto:kalmova@inbox.ru)

**Information about the authors:**

Kalmova Maria Aleksandrovna, senior lecturer of the department of structural mechanics, engineering geology, foundations and foundations, e-mail: [kalmova@inbox.ru](mailto:kalmova@inbox.ru)

**Конфликт интересов:**

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 12.10.2020.

Принята в печать 14.11.2020.

**Conflict of interest.**

The author declare no conflict of interest.

Received 12.10.2020.

Accepted for publication 14.11.2020.