

Для цитирования: Б.В. Соболев, Е.В. Рашидова, П.В. Васильев, А.И. Новикова. Равновесные внутренние трещины в упругих телах, подкреплённых тонкими гибкими покрытиями. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020; 47 (3):111-121. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-3-111-121

For citation: B.V. Sobol, E.V. Rashidova, P.V. Vasiliev, A.I. Novikova. Equilibrium internal fractures in elastic bodies supported by thin flexible coatings. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2020; 47(3):111-121. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-3-111-121

**СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE**

УДК 539.3

DOI: 10.21822/2073-6185-2020-47-3-111-121

**РАВНОВЕСНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ТРЕЩИНЫ В УПРУГИХ ТЕЛАХ,
ПОДКРЕПЛЁННЫХ ТОНКИМИ ГИБКИМИ ПОКРЫТИЯМИ**

Б.В. Соболев, Е.В. Рашидова, П.В. Васильев, А.И. Новикова

Донской государственной технической университет,
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, Россия

Резюме. Цель. В предлагаемой публикации проведено исследование задач о плоской деформации упругих тел, содержащих внутренние прямолинейные трещины. В каждом случае границы рассматриваемых областей подкреплены тонкими гибкими накладками. Первая часть работы посвящена задаче о бесконечном упругом клине, грани которого с внешней стороны свободны и усилены тонким гибким материалом, а биссектриса содержит прямолинейную трещину, к берегам которой приложены нормальные силы, и исследованию концентрации напряжений в вершинах трещины. Во второй части работы рассмотрена задача о равновесной радиальной внутренней трещине в сечении круглой трубы. Внутренняя поверхность трубы испытывает гидростатическое давление; внешняя – усилена тонким гибким покрытием. Целью исследования в каждой из представленных задач является определение значений фактора влияния. **Метод.** Задачи объединяет единый подход, в котором наличие покрытия моделируется математически, с использованием специальных граничных условий, полученных на основе асимптотического анализа точного решения для полосовой или кольцевой гибкой накладки малой относительной толщины. В первой задаче вывод сингулярного интегрального уравнения (СИУ) проведен с помощью преобразования Меллина, позволившего перейти к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и получить СИУ, относительно производной функции разрыва, I-го рода с ядром Коши. Во второй задаче разрывные решения строятся с помощью рядов Фурье, в результате чего выводится сингулярное интегральное уравнение аналогичной структуры. Ранее аналогичные идеи были успешно реализованы авторами при исследовании задачи о равновесном состоянии полосы с покрытием, ослабленной внутренней поперечной трещиной, при произвольных условиях на нижней грани полосы. **Вывод.** Получены СИУ для рассматриваемых задач. Методом коллокации построены решения СИУ для различных комбинаций геометрических и физических характеристик задач. Во всех рассмотренных случаях рассчитаны значения фактора влияния. Проведен анализ изменения фактора влияния в зависимости от различных комбинаций геометрических параметров и механических характеристик задач. С ростом жесткости покрытия и увеличения его толщины значения фактора влияния уменьшаются; увеличение значения фактора влияния обеспечивается приближением трещины к границе тела и увеличением ее относительной длины.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №19-08-00074 и №19-38-90248.

Ключевые слова: трещина, бесконечный упругий клин, упругое кольцо, тонкое покрытие, тригонометрические ряды, интегральное преобразование Меллина, метод разрывных решений, коэффициент интенсивности напряжений, фактор влияния, метод коллокации

**EQUILIBRIUM INTERNAL FRACTURES IN ELASTIC BODIES SUPPORTED BY THIN
FLEXIBLE COATINGS**

B.V. Sobol, E.V. Rashidova, P.V. Vasiliev, A.I. Novikova

Don State Technical University,
1 Gagarin Square, Rostov-on-Don 344000, Russia

Abstract. Objective. In this paper, the authors study problems of a plane strain of elastic bodies containing internal rectilinear fractures. In each case, the margins of the considered areas are supported by thin flexible coatings. The first part of the paper is devoted to the problem of an infinite elastic wedge, the faces of which are free from the outside and reinforced with a thin flexible material, and the bisector contains a rectilinear fracture with regular forces applied to the margins, and to the study of the stress concentration at the fracture vertices. In the second part of the paper, the authors consider the problem of an equilibrium radial internal fracture in the cross-section of a round pipe. The inner surface of the pipe experiences hydrostatic pressure; the outer surface is reinforced with a thin flexible coating. The purpose of the study in each of the presented tasks is to determine the values of the influence factor. **Methods.** Both problems are united by a single approach, in which the presence of a coating is modeled mathematically, using special marginal conditions obtained based on an asymptotic analysis of the exact solution for a strip or ring flexible coating of small relative thickness. In the first issue, the singular integral equation is derived using the Mellin transform, which allows proceeding to the solution of a system of ordinary differential equations and obtaining a singular integral equation relative to the derivative of the discontinuity function of the first kind with a Cauchy kernel. In the second issue, discontinuous solutions are constructed using the Fourier series, resulting in a singular integral equation of a similar structure. Previously, similar ideas were successfully implemented by the authors in the study of the problem of the equilibrium state of a strip with a coating weakened by an internal transverse fracture under arbitrary conditions on the lower edge of the strip. **Conclusion.** Singular integral equations for the considered problems are obtained. The collocation method is used to construct solutions of singular integral equations for various combinations of geometric and physical characteristics of issues. In all the considered cases, the values of the influence factor were calculated. The analysis of changes in the influence factor depending on various combinations of geometric parameters and mechanical characteristics of problems is carried out. It is noted that with increasing rigidity of the coating and increasing its thickness, the values of the influence factor decrease; the increase in the value of the influence factor is provided by approaching the fracture to the body margin and increasing its relative length.

Acknowledgment. The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research within the framework of research projects No. 19-08-00074 and No. 19-38-90248.

Key words: fracture, infinite flexible wedge, elastic ring, thin coating, trigonometric series, integral Mellin transform, discontinuous solutions method, stress intensity ratio, influence factor, collocation method

Введение. Техническое составляющая станков и инструментов в современной промышленности играет существенную роль, так как производство современной техники имеет погрешности, измеряемые в микронах, а утрата заданной точности считается потерей работоспособности. Надежность технических конструкций, их износостойкость, как правило, обеспечиваются характеристиками их поверхностей, так как именно на поверхности приходится наибольшее влияние внешних сил. Одним из приоритетных направлений, связанных с обеспечением надежности и износостойкости, является развитие методов и технологий нанесения специальных тонких покрытий, обеспечивающих специфические характеристики технических конструкций. Относительная малая толщина покрытий позволяет экономить дорогостоящие материалы, при этом само покрытие выполняет защитные функции. Вместе с этим, известно, что наличие малых внутренних дефектов, например, полостей или трещин, неизбежная компонента процесса производства любых механизмов, поэтому усиление поверхностей тонкими покрытиями приводит к увеличению времени эксплуатации. Указанная методика нанесения тонких покрытий определяет перед наукой задачи развития и разработки новых способов и технологий оценивания работоспособности станков с тонкими покрытиями, их напряженного состояния.

Исторически первые научные работы по изучению тонких покрытий проведены зарубежными учеными Эрнстом Меланом [1], Эриком Рейсснером [2], В. Койтером и Т. Уорнером [3], советскими учеными Виктором Михайловичем Александровым [4] и Суреном Мануковичем Мхитаряном [5]. Исследования ученых Армении В. Акоюна [6] и Л. Арутюняна [7], в также работы малазийского ученого Абд эль Фаттах Ризка [8] посвящены проблемам концентрации напряжений в составных телах с трещинами. В работе И. Шацкого изучена прочность пластинок, усиленных гибким покрытием и включающих системы трещин [9]. Проблема влияния

стрингера на упругую полуплоскость, включающую разрез, исследована в работе Ю. Антипова Ю. и Д. Бардзокаса [10]. Целый ряд работ многих исследователей посвящен изучению полубесконечных упругих тел, содержащих поперечные трещины, исследованиям для различных условий на границах концентрации напряжений в вершинах этих трещин, например, работы [11-15].

Постановка задачи. *Постановка задачи для бесконечного упругого клина, границы которого усилены тонким покрытием.* Рассмотрим клинообразную область, ее описание зададим в системе полярных координат: $r \in [0; \infty)$, $|\varphi| \leq \alpha$. На луче $\varphi = 0$, соответствующем биссектрисе клина, при $r \in [c; d]$ расположена трещина. Раскрытие трещины происходит под действием нормальных сил $-f(r)$. Лучи $\varphi = \pm\alpha$, являющиеся гранями клина, усилены тонкими гибкими накладками толщины h . Материал накладки характеризуется модулем сдвига G_1 и коэффициентом Пуассона μ_1 . Считаем, что на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$) отсутствует перемещение и напряжение ($u(r, \varphi) = 0$ – радиальная компонента перемещения и $\vartheta(r, \varphi) = 0$ – тангенциальная компонента; $\sigma_\varphi = 0$ – нормальное напряжение, $\tau_{r\varphi} = 0$ – касательное напряжение). Функции разрыва в области трещины ($r \in [c; d]$, $\varphi = 0$) подлежат определению в процессе решения задачи. Опишем их неизвестными искомыми функциями $\psi(r)$ и $\phi(r)$:

$$[\vartheta(r, \varphi)] = \psi(r), \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] = \phi(r), \quad (1)$$

при $r \in [0; c) \cup (d; \infty)$, $\psi(r) = \phi(r) = 0$.

Здесь и далее $[f(\varphi)] = f(+0) - f(-0)$.

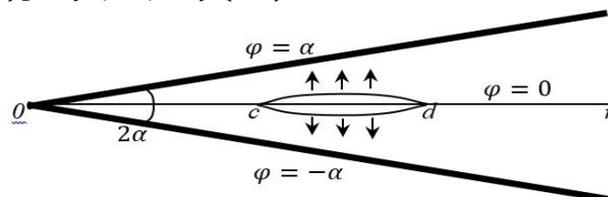


Рис. 1. Модель задачи о клине
 Fig. 1. Wedge problem model

Граничные условия задачи:

$$\varphi = 0: \quad \sigma_\varphi = -f(r) \text{ при } r \in [c; d]; \quad (2)$$

$$\vartheta = 0, \text{ при } r \in [0; c) \cup (d; \infty); \quad (3)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad r \in [0; \infty); \quad (4)$$

$$\varphi = \pm\alpha: \quad 4G_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = (1 - \mu_1) \tau_{r\varphi} - 2\mu_1 h \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r}; \quad (5)$$

$$\sigma_\varphi = 0, \quad (6)$$

Условие (5) реализует математическое моделирование наличия гибкой накладки относительно малой толщины на границах клина [5].

Решение задачи строим на основе закона Гука и уравнений равновесия, заданных в перемещениях и записанных в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} (1 - 2\mu)\Lambda u + \frac{\partial \Xi}{\partial r} - \frac{2(1-2\mu)}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} &= 0, \\ (1 - 2\mu)\Lambda \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} + \frac{2(1-2\mu)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$,

$\Xi = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \right)$, μ – коэффициент Пуассона материала клина.

Интегральное уравнение. К уравнениям (7) применим интегральное преобразование Меллина [15].

$$Z(s, \varphi) = \int_0^\infty z(\rho, \varphi) \rho^{s-1} d\rho, \quad z(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} Z(s, \varphi) r^{-s} ds. \quad (8)$$

В результате этого преобразования по переменной r функция $u(r, \varphi)$ переходит в $U(s, \varphi)$, а $\vartheta(r, \varphi)$ в $V(s, \varphi)$, а уравнения Ламе – в систему обыкновенных дифференциальных уравнений II-го порядка:

$$\begin{aligned} (1 + \kappa)(s^2 - 1)U - 2(s + \kappa)V'_\varphi - (1 - \kappa)U''_\varphi &= 0, \\ (1 - \kappa)(s^2 - 1)V + 2(s - \kappa)U'_\varphi - (1 + \kappa)V''_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\kappa = 3 - 4\mu$.

Общее решение системы (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} U &= (s + \kappa)[c_1 \sin(s + 1) \varphi + c_2 \cos(s + 1) \varphi] + (s - 1)[c_3 \sin(s - 1) \varphi + \\ &\quad c_4 \cos(s - 1) \varphi], \\ V &= -(s - \kappa)[c_1 \cos(s + 1) \varphi - c_2 \sin(s + 1) \varphi] - (s - 1)[c_3 \cos(s - 1) \varphi \\ &\quad - c_4 \sin(s - 1) \varphi] \end{aligned} \quad (10)$$

где $c_i, i = 1, \dots, 4$ – произвольные постоянные.

Принимая во внимание определение неизвестного разрыва (1), удовлетворим граничным условиям задачи (3), (5) и (6). Для нахождения $c_i, i = 1, \dots, 4$ имеем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_3 \frac{1-s}{1+s}, \\ c_1(\kappa - s) &= c_3(s - 1) + \psi^*, \\ c_1 \sin(1 + s)\alpha + c_2 \cos(1 + s)\alpha - c_3 \sin(1 - s)\alpha + c_4 \cos(1 - s)\alpha &= 0, \\ ((s + \kappa)[c_1 \sin(s + 1)\alpha + c_2 \cos(s + 1)\alpha] + \\ (s - 1)[c_3 \sin(s - 1)\alpha + c_4 \cos(s - 1)\alpha]) &= \\ = \frac{(1-\mu_1)gr}{2h} (c_1 \cos(s + 1)\alpha - c_2 \sin(s + 1)\alpha - \frac{1-s}{1+s} [c_3 \cos(s - 1)\alpha - c_4 \sin(s - 1)\alpha]) \\ - \mu_1 gr \left[(s - 1)(c_1 \cos(s + 1)\alpha - c_2 \sin(s + 1)\alpha) + \frac{(s-1)^2}{1+s} (c_3 \cos(s - 1)\alpha - c_4 \sin(s - 1)\alpha) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где g - отношение модуля сдвига материала клина к модулю сдвига материала накладки G/G_1 , $\psi^*(s) = \int_0^\infty \psi(\rho) \rho^{s-1} d\rho$.

Удовлетворяя условию (2), получаем

$$\frac{4G}{i\pi(1+\kappa)} \int_c^d \frac{\psi(\rho)}{\rho} d\rho \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} L(s, r) \left(\frac{\rho}{r}\right)^s s ds = -r \cdot f(r). \quad (12)$$

Здесь $L(s, r) =$

$$= -\frac{gr(1 - \mu_1)(s^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 s\alpha) + 2h(1 + s)(1 - \mu)(s \sin 2\alpha - \sin 2s\alpha)}{4h(1 + s)(1 - \mu)(\cos 2\alpha + \cos 2s\alpha) + gr(1 - \mu_1)(s \sin 2\alpha + \sin 2s\alpha)} \quad (13)$$

Используем замену переменных $s = iu, sds = -udu$,

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^{iu} = \cos\left(u \ln \frac{\rho}{r}\right) + i \sin\left(u \ln \frac{\rho}{r}\right).$$

Учитывая, что $\sin(ix) = i \operatorname{sh} x, \cos(ix) = \operatorname{ch} x$, получаем:

$$\tilde{L}(u, r) = -\frac{gr(1 - \mu_1)(\operatorname{sh}^2 u\alpha - u^2 \sin^2 \alpha) + 2i h(1 + iu)(1 - \mu)(u \sin 2\alpha - \operatorname{sh} 2u\alpha)}{4 h(1 + iu)(1 - \mu)(\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2u\alpha) + i gr(1 - \mu_1)(u \sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2u\alpha)} \quad (14)$$

Интегрирование по частям позволяет перейти к СИУ относительно производной иско- мой функции.

$$\begin{aligned} \frac{4G}{\pi(1 + \kappa)} \left(\int_c^d \psi'(\rho) d\rho \int_0^\infty \left(2\operatorname{Re}(\tilde{L}(u, r)) \cos\left(u \cdot \ln \frac{\rho}{r}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2\operatorname{Im}(\tilde{L}(u, r)) \sin\left(u \cdot \ln \frac{\rho}{r}\right) \right) du = -r \cdot f(r) \end{aligned} \quad (15)$$

Проведен анализ подынтегральных функций при $u \rightarrow \infty$

$$\operatorname{Re}(\tilde{L}(u, r)) = O(e^{-2u\alpha}), \quad \operatorname{Im}(\tilde{L}(u, r)) = -\frac{1}{2} + O(e^{-2u\alpha}), \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Вводим обозначения: $\theta = \frac{G}{1-\nu}$, тогда $\frac{4G}{\pi(1+\kappa)} = \frac{\theta}{\pi}$,

$$K(u, r) = 2 \operatorname{Re} \left(\tilde{L}(u, r) \right) \cos \left(u \ln \frac{\rho}{r} \right) - \left(2 \operatorname{Im} \left(\tilde{L}(u, r) \right) + 1 \right) \sin \left(u \ln \frac{\rho}{r} \right) + \sin \left(u \ln \frac{\rho}{r} \right),$$

$$M(u, r) = 2 \operatorname{Re} \left(\tilde{L}(u, r) \right) \cos \left(u \ln \frac{\rho}{r} \right) - \left(2 \operatorname{Im} \left(\tilde{L}(u, r) \right) + 1 \right) \sin \left(u \ln \frac{\rho}{r} \right),$$

тогда $K(u, r) = M(u, r) + \sin \left(u \ln \frac{\rho}{r} \right)$.

СИУ (15) принимает вид:

$$\int_c^d \psi'(\rho) d\rho \int_0^\infty k(r, \rho) du = -\frac{\pi}{\theta} r \cdot f(r) \quad (16)$$

Здесь $k(r, \rho) = \int_0^\infty \left(M(u, r) + \sin \left(u \ln \frac{\rho}{r} \right) \right) du$.

Следующая замена позволяет свести уравнение к безразмерным переменным и получить СИУ первого рода с ядром Коши:

$$\lambda = 2 \left(\ln \frac{d}{c} \right)^{-1}, \quad r = c \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right), \quad \rho = c \exp \left(\frac{1+\xi}{\lambda} \right), \quad d\rho = c \exp \left(\frac{1+\xi}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda} d\xi,$$

$$\chi(\xi) = \psi'(\xi) c \exp \left(\frac{1+\xi}{\lambda} \right) \exp \left(\frac{1+\xi}{\lambda} \right).$$

Учитывая значение интеграла $\int_0^\infty \operatorname{Sin}(ut) du = \frac{1}{t}$ [16], получаем:

$$\int_{-1}^1 \chi(\xi) \left[\frac{\lambda}{\xi - x} + \int_0^\infty M \left(u, c \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \right) du \right] d\xi = -\frac{\pi \lambda}{\theta} q(x), \quad (17)$$

$$|x| \leq 1, \quad q(x) = \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \cdot f \left(c \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \right).$$

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к решению СИУ (17).

Методы исследования. Решение *сингулярного интегрального уравнения* (СИУ) (17) проведем методом коллокации, который позволяет учитывать особенность функции разрыва в окрестности вершин трещины. Искомую функцию представим в виде произведения множителя, явно учитывающего эту сингулярность, и линейной комбинации $T_j(\xi)$ полиномов Чебышева (ПЧ) первого рода:

$$\chi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{j=1}^N X_j T_j(\xi), \quad (18)$$

здесь X_j – коэффициенты, N – число узлов коллокации.

Для построения узлов используем следующие выражения, являющиеся корнями ПЧ:

$$x_j = \cos \frac{\pi(2j-1)}{2m}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Выражение (18) позволяет привести задачу системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(x_1) \\ z(x_2) \\ \dots \\ z(x_N) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $z(x) = -\frac{\pi \lambda}{\theta} q(x)$,

$$c_{ij} = \int_{-1}^1 T_j(\xi) \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\frac{1}{\xi - x_i} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty M \left(u, c \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \right) du \right] d\xi \quad (20)$$

Решение СЛАУ (19) приводит к построению функции $\chi(\xi)$, которая позволяет определить в окрестности вершин трещины величину коэффициента интенсивности нормальных напряжений (КИНН):

$$K_I = \lim_{\xi \rightarrow \mp 1 \pm 0} \left(\theta \sqrt{2\pi(1+\xi)} \chi(\xi) \right).$$

Количество узлов коллокации и величина безразмерного параметр λ связаны между собой, увеличение λ приводит к потере точности решения. Проведенные численные эксперименты позволили сделать вывод: решение СИУ с точностью 95% для $\lambda = 0.8$ обеспечивается не менее чем 8 узлами; при той же точности и $\lambda = 0.6$ требуется не менее 5 узлов.

Постановка задачи для равновесной радиальной трещины в сечении трубы с покрытием. Рассмотрим кольцо толщиной $l = b - a$. Сформулируем постановку задачи в полярной системе координат (r, φ) : $r \in [a; b]$. Внешняя граница кольца $r = b$ усилена тонким (относительно ширины кольца) гибким покрытием толщины h и свободна от напряжений. Внутри кольца находится трещина, расположенная вдоль его радиуса на луче $\varphi = 0$ при $r \in [c; d]$. Сила f действует на внутреннюю границу и обеспечивает раскрытие трещины. Считаем, что на берегах трещины отсутствуют напряжения.

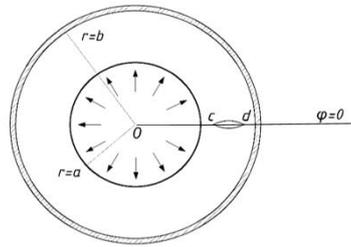


Рис. 2. Модель задачи о кольце
 Fig. 2. Ring problem model

Аналогично задаче о клине, функции разрыва в области трещины ($r \in [c; d]$, $\varphi = 0$) подлежат определению. Описываем их неизвестными искомыми функциями $\psi(r)$ и $\phi(r)$, определенными в выражении (1).

Граничные условия задачи:

$$r = a: \quad \sigma_r = -f(r), \text{ при } r \in [c; d]; \quad (21)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0, \text{ при } r \in [a; b]; \quad (22)$$

$$r = b: \quad \sigma_r = 0, \text{ при } r \in [a; b]; \quad (23)$$

$$\frac{h}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi^{(1)}}{\partial \varphi} = \tau_{r\varphi}; \quad (24)$$

$$\varphi = 0: \quad \sigma_\varphi = 0, \text{ при } r \in [c; d]; \quad (25)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0, \text{ при } r \in [c; d]. \quad (26)$$

Верхний индекс (1) соответствует покрытию внешней границы кольца.

Решение уравнений равновесия построим в виде тригонометрических рядов Фурье. Будем учитывать симметрию задачи вдоль луча $\varphi = 0$.

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \cos k\varphi, \quad \vartheta(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(r) \sin k\varphi$$

А коэффициенты разложения имеют вид

$$a_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad b_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi$$

Это позволяет свести решение задачи к решению СИУ с ядром Коши вида (17). Его решение также строится методом коллокации.

Обсуждение результатов. Равновесная прямолинейная внутренняя трещина в клиновидной области с покрытием. Проведено исследование концентрации напряжений в вершинах трещины. В качестве показателя их интенсивности рассматривался *фактор влияния* $N(\pm 1)$ [17]:

$$N(\pm 1) = K_I / K_{I\infty},$$

где K_I – КИНН в исследуемом случае; $K_{I\infty}$ – соответствующая величина в классическом случае, для задачи об изолированной трещине в неограниченной упругой среде [17]. Фактор влияния характеризует влияние геометрических параметров и механических характеристик задачи на значения КИНН.

В безразмерных величинах удаление трещины от вершины клина определяется параметром $\lambda = \frac{d-c}{d+c}$ ($\lambda \in (0; 1)$, приближение трещины к вершине клина соответствует величине λ близкой к 1). Проведено изучение зависимости величины фактора влияния от угла при вершине клина. В исследовании рассмотрена безразмерная величина $\frac{h}{d-c} = 0.01$ – отношение толщины накладки к длине трещины. Удаление трещины от вершины клина характеризуется величиной λ ($\lambda=0.75, \lambda=0.65, \lambda=0.55$). Замечено, что увеличение угла при вершине клина приводит к уменьшению влияния накладки на КИНН.

Выявлено, что для тупых углов значения фактора влияния не зависят от угла при вершине клина. Результаты исследования приведены на рис.3.

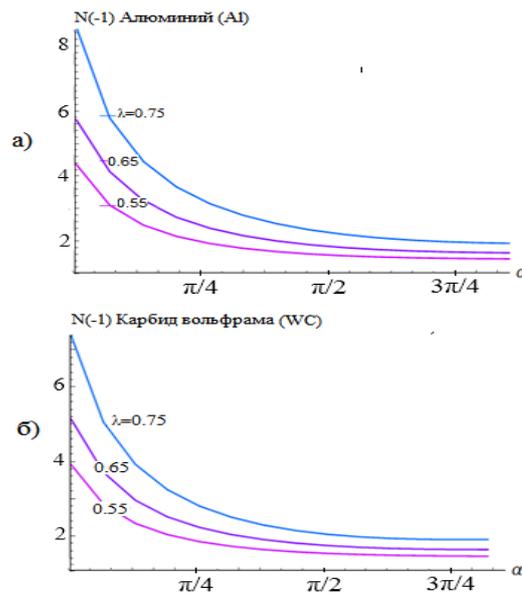


Рис. 3. Результаты исследования взаимосвязи фактора влияния в вершине трещины $N(-1)$ и угла при вершине клина для разного размещения трещины

сверху рис. а) накладка – алюминий; снизу: б) накладка – карбид вольфрама

Fig. 3. Results of the study of the relationship between the influence factor at the crack vertex $N(-1)$ and the angle at the wedge vertex for different crack placement

From above: fig. a) cover plate-aluminum, below: b) the cover plate is tungsten carbide

Рассмотрены известные частные случаи поставленной задачи, такие как:

- толщина накладки равна нулю;
- угол при вершине клина равен π , клин раскрывается в полуплоскость;
- угол при вершине клина равен 2π , клин раскрывается в плоскость.

Проведено сравнение расчетов указанных известных случаев [12, 14, 18 - 19] с расчетами, проведенными на основе решения интегрального уравнения (17) методом коллокации. С точностью до двух процентов полученные результаты совпадают с известными.

В данном исследовании проведен анализ сходимости решения СИУ методом коллокации, который основывался на сравнении величин значений $N(\pm 1)$ фактора влияния в вершинах

трещин при расчетах с разным количеством точек коллокации (варианты расчетов: $N = 8, 9, \dots, 15$). Выявлено, что во всех вариантах числовых расчетов (при условии, что $\lambda < 0.75$), отклонения результатов вычислений не превосходит трех процентов.

Равновесная радиальная трещина в сечении трубы с покрытием. Задача содержит значительный набор геометрических и физических параметров и большое число их сочетаний, представляемые результаты расчетов носят, преимущественно, иллюстративный характер и не претендуют на полноту.

На рис.4 представлены значения фактора влияния в ближней к покрытию вершине трещины, в зависимости от $\lambda = \frac{d-c}{2b-c-d} < 1$, характеризующим удаление трещины от внешней границы кольца, усиленной покрытием, и $q = \frac{b-a}{b}$, относительной толщины кольца.

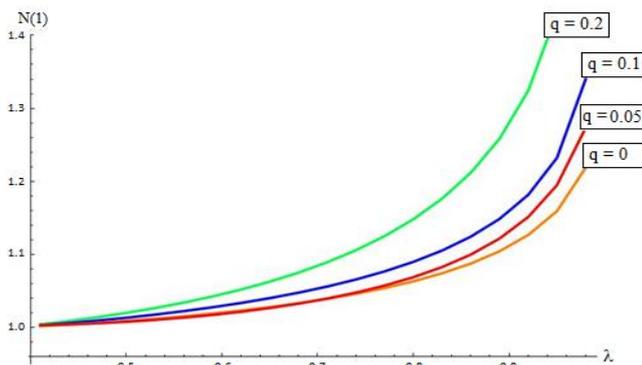


Рис. 4 Изменение фактора влияния в ближней к покрытию вершине трещины в зависимости от параметра λ , для различных значений параметра q , характеризующего геометрию сечения трубы. При вычислениях принято: относительная толщина покрытия $l = \frac{h}{b-a} = 0.02$; относительная длина трещины $t = \frac{d-c}{b-a} = 0.2$; материал трубы – конструкционная сталь; материал покрытия – вольфрам.

Fig. 4. Change of the influence factor in the crack vertex closest to the coating, depending on the parameter λ , for different values of the parameter q , which characterizes the geometry of the pipe section. When calculating, it is assumed that the relative thickness of the coating is $l = \frac{h}{b-a} = 0.02$. Relative crack length $t = \frac{d-c}{b-a} = 0.2$.

Material – structural steel; coating material – tungsten.

Как нетрудно заметить, при прочих равных условиях, при большей кривизне трубы, значения фактора влияния ниже. Предельный случай $q=0$ соответствует задаче для полосы.

На рис.5 показано влияние различных материалов накладки на концентрацию напряжений в вершине трещины, ближней к покрытию. Анализ результатов показывает, что при приближении вершины трещины к поверхности, наличие покрытия сдерживает рост фактора влияния, а в некоторых случаях (WC), приводит к его снижению.

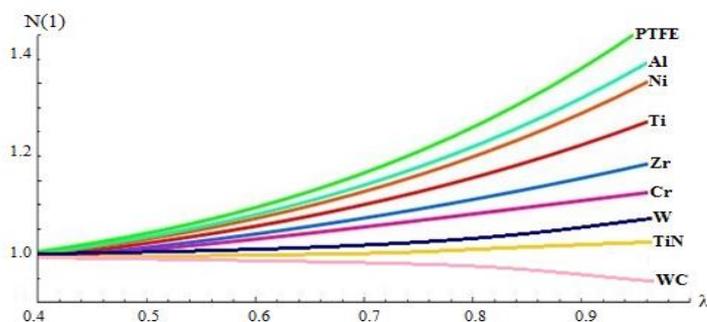


Рис.5. Влияние различных материалов. Во всех случаях: кольцо – конструкционная сталь; материал накладки: PTFE – тефлон, Al – алюминий, Ti – титан, Zr – цирконий, Ni – никель, Cr – хром, W – вольфрам, TiN – нитрид титана, WC – карбид вольфрама. Значения геометрических параметров были приняты равными: $l=0.01, q=0.4, t=0.2$.

Fig. 5. Influence of different materials. In all cases: ring-structural steel; lining material: PTFE-teflon, Al-aluminum, Ti-titanium, Zr-zirconium, Ni-nickel, Cr-chromium, W-tungsten, TiN-titanium nitride, WC-tungsten carbide. The values of the geometric parameters were assumed to be: $l=0.01, q=0.4, t=0.2$.

На рис. 6 представлены кривые изменения фактора влияния в вершине трещины в зависимости от относительной толщины покрытия l , при различных значениях параметра λ .

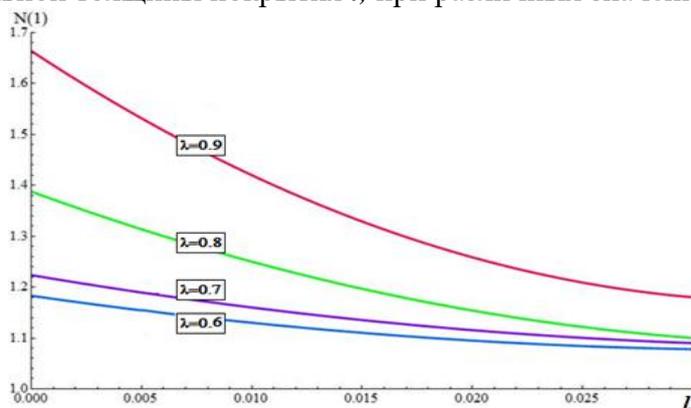


Рис.6. Кривые изменения фактора влияния. Модельная задача: материал накладки – вольфрам, кольца – конструкционная сталь. Остальные геометрические и физические параметры имеют те же значения, что и для рис.5.

Fig. 6. Variation curves of the factor of influence. Model task: the lining material is tungsten, the rings are structural steel. The other geometric and physical parameters have the same values as for Fig. 5.

Как нетрудно заметить, во всех рассмотренных случаях увеличение толщины покрытия приводит к снижению значений фактора влияния, причем, для случаев, когда трещина достаточно близко расположена к покрытию, это снижение более выражено.

Вывод. Для каждой из представленных задач рассчитано значение фактора влияния в вершинах трещины. Проведен анализ изменения фактора влияния в зависимости от различных комбинаций геометрических параметров и механических характеристик задач. Замечено, что с ростом жесткости покрытия и увеличение его толщины значения фактора влияния уменьшаются; увеличение значения фактора влияния обеспечивается приближением трещины к границе тела и увеличением ее относительной длины.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №19-08-00074 и №19-38-90248.

Библиографический список:

1. Melan, E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums // Archive of Applied Mechanics, 1938. № 9/2. P. 116-126.
2. Рейсснер, Э. Некоторые проблемы теории оболочек. Упругие оболочки. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 263 с.
3. Koiter, W., Warner T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1966. № 69.1. P. 1-54.
4. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976, с. 493
5. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука 1979. 486 с.
6. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №4. С.57–65.
7. Арутюнян Л.А. Плоские задачи со смешанными краевыми условиями для составной плоскости с трещинами // Изв. АН Арм. ССР. Механика, 2012. Т.65 №3. С. 5-9.
8. Rizk A. Stress intensity factor for an edge crack in two bonded dissimilar materials under convective cooling // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2008. No. 49.3. pp. 251-267.
9. Шацкий И.П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // Журн. Прикладной механики и техн. физики, 1989. № 5. С. 163-65.
10. Antipov Y., Bardzokas D., Exadaktylos G. Partially stiffened elastic half-plane with an edge crack // International journal of fracture, 1997 № 85.3 P. 241-263.
11. Cook, T.S., Erdogan, F. Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface. Int.J. Engng. Sci., 1972,10, 677-697.
12. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка 1976. 443 с.
13. Греков М.А., Даль Ю.М., Курочкин В.А. Предельное состояние упругой полосы с внутренней трещиной. Известия РАН, МТТ, 1992, №6, С. 148-155.

14. Краснощеков А.А., Соболев Б.В. Равновесное состояние внутренней поперечной трещины в полубесконечном упругом теле с тонким покрытием. Известия РАН, МТТ, 2016, №1, С. 136-150.
15. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: «Физматгиз». 1963. 1100 с.
17. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. No. 3. pp. 361 – 364.
18. Сметанин Б.И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 708-714.
19. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Под ред. В.В. Панасюка. Киев: Наук. думка, 1988. 619 с. (Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2).
20. V. Sobol, A. Soloviev, A. Krasnoschekov The transverse crack problem for elastic bodies stiffened by thin elastic coating. ZAMM. 2015. № 11. pp. 1302-1314.
21. Блинов А.В. Определение напряженно-деформированного состояния двухслойной трубы// Международный научно-исследовательский журнал. 2015. № 11-3 (42). С. 9 - 11.

References:

1. Melan, E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums // Archive of Applied Mechanics, 1938. № 9/2. pp. 116-126.
2. Reissner, E. Nekotorye problemy teorii obolochek. Uprugie obolochki [Some problems of the theory of shells. Elastic shells]. Moscow, Foreign Literature Publisher, 1962. 263 p. (In Russ)]
3. Koiter, W., Warner T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1966. № 69.1. pp. 1-54.
4. Razvitie teorii kontaknykh zadach v SSSR [Development of the theory of contact problems in the USSR]. Moscow, Science, 1976, 493 p. (In Russ)]
5. Aleksandrov V. M., Mkhitarian S. M. Kontaknyye zadachi dlia tel s tonkimi pokrytiami i prosloikami [Contact tasks for bodies with thin coatings and interlayers]. Moscow, Science, 1979. 486 p. (In Russ)]
6. Akopian V.N. Ob odnoi smeshannoi zadache dlia sostavnoi ploskosti, oslablennoi treshchinoi [On a mixed problem for a composite plane weakened by a crack]. Armenia SSR, Publishing Academy of Sciences. Mechanic, 1995, vol. 48, no. 4. pp. 57-65.
7. Arutyunyan L.A. Plane problems with mixed boundary conditions for a compound plane with cracks. Proceedings of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, Mechanics, 2012. Vol. 65, No.3. pp. 5-9.
8. Rizk A. Stress intensity factor for an edge crack in two bonded dissimilar materials under convective cooling // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2008. No. 49.3. pp. 251-267.
9. Shatskiy I.P. Rastyazhenie plastiny, soderzhashchej pryamolinejnyj razrez s sharnirno soedinennymi kromkami // [Shatskiy I.P. Stretching a plate containing a rectilinear section with hinged edges. Journal of Applied mechanics and technology. Physics, 1989. No. 5. pp. 163-65. (In Russ)]
10. Antipov Y., Bardzokas D., Exadaktylos G. Partially stiffened elastic half-plane with an edge crack // International journal of fracture, 1997 No. 85.3, pp. 241-263.
11. Cook, T.S., Erdogan, F. Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface. Int.J. Engng. Sci., 1972, 10, pp. 677-697.
12. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Dacyshin A.P. Raspredelenie napryazhenij okolo treshchin v plastinah i obolochkah. Kiev: Naukova Dumka 1976. pp.443
13. Grekov M.A., Dal' YU.M., Kurochkin V.A. Predel'noe sostoyanie uprugoj polosy s vnutrennej treshchinoj [Grekov M.A., Dal' Yu.M., Kurochkin V.A. Limiting state of an elastic strip with an internal crack. Izvestia RAN, MTT, 1992, No.6, pp.148-155. (In Russ)]
14. Krasnoschekov A.A., Sobol' B.V. Ravnovesnoe sostoyanie vnutrennej poperechnoj treshchiny v polubeskonechnom uprugom tele s tonkim pokrytiem. Izvestiya RAS, Solid mechanics, [Equilibrium state of an internal transverse crack in a semi-infinite elastic body with a thin coating. Izvestia RAN, MTT, 2016, No. 1, pp. 136-150. (In Russ)]
15. Lur'e A. I. Teoriya uprugosti. Moscow: Nauka, 1970, P.940 (In Russ)]
16. Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij. Moscow: "Fizmatgiz", 1963, s.1100 [Tables of integrals, sums, series and products. M.: "Fizmatgiz".1963. 1100p. (In Russ)]
17. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. No. 3. pp. 361 – 364.
18. Smetanin B.I. Ob odnoj smeshannoj zadache teorii uprugosti dlya klina // PMM. 1968. Vol. 32. Issue 4. pp. 708-714. [Smetanin B.I. On a mixed problem in the theory of elasticity for a wedge. Prikl. 1968. T. 32. 4.S. 708-714. (In Russ)]
19. Savruk M.P. Koeffitsienty intensivnosti napryazhenij v telah s treshchinami / Edited by V. V. Panasyuk. Kiev: Nauk. Dumka, 1988. 619 p. (Fracture mechanics and strength of materials, vol. 2).

20. B. Sobol, A. Soloviev, A. Krasnoschekov The transverse crack problem for elastic bodies stiffened by thin elastic coating. ZAMM. 2015. No. 11. pp. 1302-1314.
21. Blinov A.V. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya dvuhslojnoj trubyy // International research journal. 2015. No. 11-3 (42). s. 9-11. [Blinov. Determination of the stress-strain state of a two-layer pipe // International research journal. 2015. No. 11-3 (42). pp. 9 - 11. (In Russ)]

Сведения об авторах:

Соболь Борис Владимирович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информационные технологии», e-mail: b.sobol@mail.ru

Рашидова Елена Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Информационные технологии» e-mail: el.rash@mail.ru

Васильев Павел Владимирович, старший преподаватель кафедры «Информационные технологии», e-mail: lyftzeigen@mail.ru

Новикова Анна Ивановна, ассистент кафедры «Информационные технологии», e-mail: novikova.anna16@ya.ru

Information about the authors:

Boris V. Sobol, Dr. Sci. (Technical), Prof., Head of the Department of Information Technologies, e-mail: b.sobol@mail.ru

Elena V. Rashidova, Cand.Sci (Physical and Mathematical), Assoc. Prof., Assoc. Prof. of the Department of Information Technologies e-mail: el.rash@mail.ru

Pavel V. Vasiliev, Senior lecturer of the Department of Information Technologies, e-mail: lyftzeigen@mail.ru

Anna I. Novikova, Assistant of the Department of Information Technologies, e-mail: novikova.anna16@ya.ru

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 19.06.2020.

Принята в печать 18.07.2020.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 19.06.2020.

Accepted for publication 18.07.2020.