Для цитирования: *М.Г. Магомедов, А.И. Акаев, М.М. Пайзулаев, Д.А. Айламматова. Методологические аспекты теоретического исследования напряженно-деформированного состояния панельно-рамных вертикальных несущих систем. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020; 47 (2):153-165. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-2-153-165*

For citation: *M.G. Magomedov, A.I. Akaev, M.M. Payzulaev, D. A. Ailammatova. Methodological aspects of research into the stress-strain state of panel-frame vertical load-bearing systems. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2020; 47(2):153-165. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-2-153-165*

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.016:693.98
DOI: 10.21822/2073-6185-2020-47-2-153-165

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПАНЕЛЬНО-РАМНЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ НЕСУЩИХ СИСТЕМ

Магомедов М.Г.[1], Акаев А.И.[1], Пайзулаев М.М.[2], Айламматова Д.А.[1]
[1]Дагестанский государственный университет народного хозяйства,
[1]367051, г. Махачкала, ул. Д. Атаева, 5, Россия,
[2]Дагестанский государственный технический университет,
[2]367026, г. Махачкала, пр. И.Шамиля, 70, Россия

Резюме. Цель. *Целью данной статьи является анализ возможностей, предоставляемых исследователям различными расчетными методами (в первую очередь – численными) для теоретического исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) сложных многопроёмных вертикальных несущих систем.* ***Метод****. Раскрыта принципиальная сущность метода конечных разностей (сеток) и метода конечных элементов, описаны их преимущества и недостатки при решении плоской задачи теории упругости, в частности – при расчете НДС панельно-рамных конструкций, объединенных в единую вертикальную многосвязную систему.* ***Результат****. Изложенные в статье материалы позволяют оптимизировать методику теоретического анализа НДС сложных многосвязных систем с учетом имеющихся в наличии средств вычислительной техники и лицензионных пакетов программ автоматизированного расчета строительных конструкций.* ***Вывод.*** *Проведенный авторами анализ показывает, что при наличии достаточно мощных ЭВМ наиболее универсальным и эффективным является метод конечных элементов, с использованием которого составлено большое число программных пакетов, позволяющих исследовать НДС любых конструкций, сложных по своей форме, топологии, характеру нагружения и т.п.*

Ключевые слова: *плоская задача теории упругости, метод сеток, метод конечных элементов, многосвязные панельно-рамные системы, рамная аналогия, бигармоническое уравнение, разностные аналоги, напряженно-деформированное состояние*

METHODOLOGICAL ASPECTS OF RESEARCH INTO THE STRESS-STRAIN STATE OF PANEL-FRAME VERTICAL LOAD-BEARING SYSTEMS

M.G. Magomedov [1], A.I. Akaev [1], M.M. Payzulaev [2], D.A. Ailammatova [1]
[1] Daghestan State University of National Economy,
[1]5 D. Ataev St., Makhachkala 367051, Russia,
[2]Daghestan State Technical University,
[2]70 I. Shamil Ave., Makhachkala 367026, Russia

Abstract Aim. *To analyse the possibilities of various computational methods (primarily numerical) in terms of investigating the stress-strain state of complex multi-dimensional vertical load-bearing systems.* ***Methods.*** *The fundamental essence of the finite-difference method (grids) and the* *finite element method is revealed, their advantages and disadvantages are described in terms of solving the plane problem of elasticity theory, in particular, in calculating the stress-strain state of panel-frame structures united in a single vertical multi-connected system.* ***Results****. The obtained results can be used to optimize the methodology of theoretical stress-strain state analysis of complex multi-connected systems, taking into account available computer equipment and licensed software packages for automated calculation of building structures.* ***Conclusion.*** *The conducted analysis shows that, provided there is a sufficiently powerful computer, the finite element method is the most versatile and effective method. This method was the basis of a large number of software packages permitting analysis of the stress-strain state of any designs characterized by the complexity of form, topology, load, etc.*

Keywords: *plane problem of elasticity theory, grid method, finite element method, multi-connected panel-frame systems, frame analogy, biharmonic equation, difference analogs, stress-strain state*

Введение. В общественных зданиях часто используют панельно-рамную конструктивную систему с «гибким» первым этажом. При этом панели верхних этажей располагаются по схеме балок-стенок. Распределение внутренних усилий в балке-стенке весьма сложно, и, как известно, для получения картины напряженно-деформированного состояния такой конструкции необходимо решить плоскую задачу теории упругости.

В том случае, когда объемные силы отсутствуют или гравитационный потенциал является единственной объемной силой, плоская задача сводится к нахождению решения бигармонического уравнения $\nabla^2\nabla^2\varphi=0$, которое удовлетворяло бы условиям на контуре.

Развернутая запись бигармонического уравнения имеет вид:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}, \tag{1}$$

где φ - функция напряжений (*функция Эри).*

Постановка задачи. Точное решение бигармонического уравнения для различных граничных условий оказывается исключительно трудоемким, а во многих случаях и невозможным. В связи с этим в теории упругости разработаны различные приближенные методы решения плоской задачи - аналитические (метод рядов, вариационные методы), численные (метод сеток, метод конечных элементов), смешанные (метод прямых) и др.

Применение приближенных методов основывается на, так называемом, «смягчении» граничных условий или условий неразрывности. Для получения достаточно точного решения бигармонического уравнения вариационными методами приходится удерживать значительное число неопределенных параметров при координатных функциях, что делает расчет громоздким и неудобным для получения числовых результатов. Метод тригонометрических рядов, основанный на интегрировании бигармонического уравнения при помощи разделения переменных, отличается значительный математической сложностью. В то же время, он не позволяет получить решение для балки-стенки, контур которой отличен от прямоугольника.

Методы исследования. Метод «сеток» и рамная аналогия. В последние десятилетия, в связи с бурным развитием вычислительной техники и появлением пакетов прикладных программ, для решения задач прикладной теории упругости и пластичности все чаще используются численные методы [1]. По мнению большинства исследователей, они являются наиболее перспективными ввиду своей универсальности, а выполнение расчетов многосвязных пластин и оболочек сложной конфигурации практически возможно только численными методами. До настоящего времени среди них остается одним из наиболее распространенных метод «сеток» [2-5], основная идея которого заключается в том, что разрешающее дифференциальное уравнение с частными производными заменяется системой алгебраических уравнений в конечных разностях. Например, бигармоническое уравнение (1) преобразуется в тринадцатичленное алгебраическое уравнение, которое в случае квадратной сетки имеет следующий вид:

$$20\varphi_{i,j} - 8(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1}) +$$
$$+2(\varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}) + \varphi_{i+2,j} + \varphi_{i-2,j} + \varphi_{i,j+2} + \varphi_{i,j-2} = 0. \quad (2)$$

При решении первой краевой задачи, когда требуется определить напряженное состояние пластинки по заданным усилиям на контуре, необходимо составить уравнение типа (2) для каждого внутреннего узла области (например, пластинки) и решить полученную систему уравнений.

Напряжения на контуре, составляющие граничные условия задачи, заменяются функцией напряжений φ и ее нормальной производной $\partial\varphi/_{\partial n}$, значения которых можно определить, используя прием «рамной аналогии», обоснованный в работе [2]. В этом случае контур пластины рассматривают как жесткую рамную систему, тогда:

1) функция напряжения φ на контуре - это изгибающий момент M от приложенной нагрузки;

2) нормальная производная $\partial\varphi/_{\partial n}$ - это нормальная сила N от той же нагрузки.

Рамная аналогия используется также для определения значений функции напряжений и ее нормальной производной на контуре, когда нагрузкой, действующей на пластинку, является гравитационный потенциал, т.е. собственный вес пластинки.

Действию потенциала соответствует гидростатическое давление при погружении тела в перевернутом виде (по отрицательной оси y) в жидкость с удельным весом γ, равным удельному весу материала конструкции. Нижнюю горизонтальную кромку пластинки совмещают при этом с поверхностью жидкости. Аналогия между действием собственного веса и действием гидростатического давления обоснована в работе [3].

Для нахождения значений φ и $\partial\varphi/_{\partial n}$ - на контуре в этом случае строят эпюры M и N от действия нагрузки, имитирующей гидростатическое давление на контур пластинки, разрезанный в любой точке. Эпюра моментов дает значения функции напряжений, а эпюра нормальных сил - значения нормальной производной на контуре.

Использование аналогии действия гидростатического давления с действием собственного веса приводит к некоторым «фиктивным» значениям напряжений σ_x и σ_y. Перейти от них к действительным σ_x и σ_y сравнительно легко:

$$\sigma_x = \sigma'_x + U, \quad \sigma_y = \sigma'_y + U,$$

где U – потенциал, равный в случае собственного веса: $U = -(\gamma y)$.

При решении третьей (смешанной) краевой задачи, когда требуется определить напряженное состояние пластины по условиям на контуре, заданным частично в напряжениях и частично в перемещениях, также может быть использован метод сеток.

Для этого необходимо составить не только систему бигармонических разностных уравнений типа (1), но и включить в нее дополнительные уравнения, отражающие контурные условия, заданные в перемещениях. Например, определяя напряженное состояние балки-стенки на неподвижных цилиндрических опорах, в дополнительном уравнении линейные перемещения опорных участков балки-стенки приравниваются 0. При сопряжении балки-стенки с рамой уравнение отражает равенство перемещений сопрягаемых участков обеих конструкций.

Перемещения участков контура области (пластинки) могут быть определены через функцию напряжений по методу сеток, используя для этой цели развернутые выражения для некоторых обобщенных перемещений, полученные в работе Длугача [4].

Например, перемещение участка контура Δ_N под действием сил 1/2 N (рис. 1), приложенных вдоль контура, определяется по формуле:

$$\Delta_N=\frac{1}{ES^2}\left(-0{,}5\varphi_{0,n}-\sum_{j=1}^{m-1}\varphi_{j,n}-0{,}5\varphi_{m,n}+0{,}5\varphi_{0,n-1}+\sum_{j=1}^{m-1}\varphi_{j,n-1}+\right.$$
$$\left.+0{,}5\varphi_{m,n-1}+0{,}25A_{0,n}^{(y)}+0{,}5\sum_{j=1}^{m-1}A_{j,n}+0{,}25A_{m,n}^{(y)}-0{,}25\mu A_{0,n}^{(x)}-0{,}25\mu A_{m,n}^{(x)}\right), \qquad (3)$$

где $A = 2\,{}^{\partial\varphi}/_{\partial n}$.

Перемещение участка контура Δ_P под действием группы сил, приложенных, как показано на рис.1, определяется по формуле:

$$\Delta_P=\frac{1}{ES^2}\left[(1{,}5m+3)\varphi_{0,n}+(3m-4)\varphi_{1,n}-3\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)\varphi_{j,n}+4\varphi_{m-1,n}-\right.$$
$$-3\varphi_{m,n}-2(1+m)\varphi_{0,n-1}-4\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)\varphi_{j,n-1}+2\varphi_{m,n-1}+\quad 0{,}5m\varphi_{0,n-2}+ \qquad (4)$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)\varphi_{j,n-2}-0{,}5m\,A_{0,n}^{(y)}-\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)A_{j,n}-0{,}5A_{0,n}^{(x)}+0{,}5A_{m,n}^{(x)}+$$
$$\left.+0{,}5\mu A_{0,n}^{(y)}-0{,}5\mu\,A_{m,n}^{(y)}-0{,}5\mu m\left(A_{0,n-1}-A_{0,n}^{(x)}\right)\right],$$

Перемещение участка контура $\Delta_{\varphi_{\text{уг}}}$ под действием уравновешенной группы сил, приложенных к угловой точке, определяется по формуле:

$$\Delta_{\varphi_{\text{уг}}}=\frac{1}{ES^2}\left[5\varphi_{m,n}-4\left(\varphi_{m-1,n}+\varphi_{m,n-1}\right)+0{,}5\left(\varphi_{m-2,n}+\varphi_{m,n-2}\right)+2\varphi_{m-1,n-1}-\right.$$
$$\left.-0{,}5\left(A_{m,n}^{(x)}+A_{m,n}^{(y)}\right)-0{,}5\mu\left(A_{m,n-1}-A_{m,n}^{(x)}-A_{m,n}^{(y)}+A_{m-1,n}\right)\right]. \qquad (5)$$

Перемещения контура в целом можно определить путем суммирования перемещений его участков, используя формулы (3), (4) и (5) с соответствующими постоянными множителями. Схема суммирования Δ_P, Δ_N и $\Delta_{\varphi_{\text{уг}}}$ для определения линейных перемещений опорных участков балки-стенки дана на рис.1.

Граничные условия в общем случае будут включать как заданные нагрузки на контуре, так и неизвестные усилия, получаемые путем исключения «лишних» связей при переходе к основной (статически определимой) системе.

Описанная методика решения третьей краевой задачи может быть использована для определения напряженного состояния балок-стенок, работающих совместно с опорными рамами [5].

В этом случае балки-стенки являются внешне статически неопределимыми, и расчетные схемы балок-стенок имеют лишнюю связь, так как рама ограничивает горизонтальные перемещения опорных зон панелей.

Отбрасывая лишнюю связь, заменяем ее неизвестным горизонтальным усилием распора H (рис. 1). Неизвестное усилие будет входить в качестве компонента в значения функции напряжений φ и ее нормальной производной ${}^{\partial\varphi}/_{\partial n}$ на контуре.

Для определения перемещений опорных точек балки-стенки от виртуального усилия H = 1 суммируем:

$+2\Delta_P$ боковых вертикальных кромок (высотой m = 5), используя симметрию их перемещений;

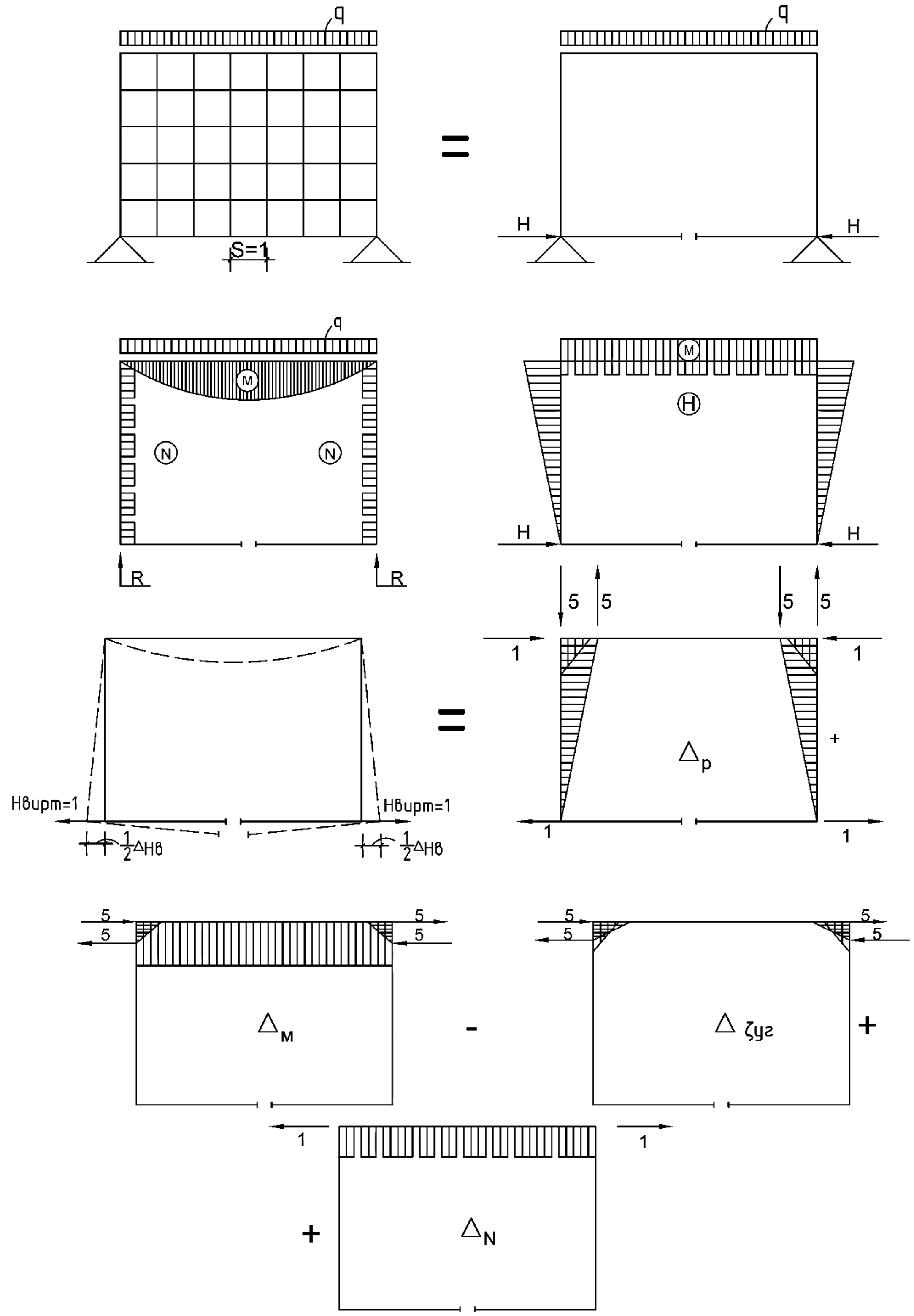

Рис. 1. Схема определения линейных перемещений опорных участков плосконапряженной пластины

Fig. 1. Scheme for determining the linear displacements of the support sections of a plane-stressed plate

$+5\Delta_M \times 5$ верхней горизонтальной кромки, имея в виду плечо приложения силы H, а также расположение перемещающихся точек, отстоящих от верхней кромки на расстояние 5;

$+2\Delta_N$ верхней горизонтальной кромки от усилия $H = 2 \times 0{,}5N = 1$;

$-5\Delta_{\varphi_{\text{уг}}} \times 2$ верхних углов балки-стенки для исключения дополнительных угловых моментов, образующихся в результате суммирования.

В результате такого суммирования получаем дополнительное линейное уравнение, приравниваемое нулю в случае идеализированных опорных связей, исключающих перемещения опорных зон балки-стенки.

В случае, когда балки-стенки опираются на рамы, опоры обладают конечной жесткостью и допускают некоторые перемещения опорных узлов балки-стенки.

Определить величину перемещений узлов рамы, шарнирно сопряженных с балкой-стенкой, можно с помощью интеграла Мора:

$$\Delta_H = \sum \int \frac{M_H M_{H_{\text{вн}}}}{EI} \text{ds} + \sum \int \frac{\mu Q_H Q_{H_{\text{вн}}}}{GA} \text{ds} + \sum \int \frac{N_H N_{H_{\text{вн}}}}{EA} \text{ds}. \quad (6)$$

Дополнительное линейное уравнение приравнивается этой величине и включается, как указывалось, в систему тринадцатичленных разностных аналогов бигармонического уравнения.

Решение совокупной системы уравнений даст значения функции напряжений φ во всех внутренних узлах области с учетом влияния найденных усилий в связях внешне статически неопределимой системы.

Определение напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} в узлах области можно произвести по известным формулам»

$$\sigma_y = \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{S^2}; \quad (7)$$

$$\sigma_x = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{S^2}; \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{(\varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i-1,j+1}) - (\varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i+1,j+1})}{S^2}, \quad (9)$$

где - S шаг сетки.

Получив значения σ_x, σ_y и τ_{xy}, можно определить значения и направление главных напряжений по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y \pm \left((\sigma_x - \sigma_y)^2 + {\tau_{xy}}^2\right)^{0,5}); \quad (10)$$

$$tg2\theta_{1,2} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (11)$$

а значения и направления максимальных касательных напряжений по формулам:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad (12)$$

$$\alpha = \theta - 45°. \quad (13)$$

Следует отметить, что составление дополнительных уравнений для смешанной плоской задачи по методике Длугача отличается определенной трудоемкостью, а сами уравнения получаются довольно громоздкими.

Ввиду этого применение метода сеток для решения смешанной задачи можно считать обоснованным лишь в случаях, когда число дополнительных уравнений невелико, а имеющаяся вычислительная техника ощутимо ограничивает возможности решения систем алгебраических уравнений высоких порядков. В этих случаях становится актуальной проблема резкого сокращения числа неизвестных (уменьшения размерности системы уравнений).

Исследование напряженного состояния многосвязных пластин рациональнее проводить в общем случае методом конечных элементов, хотя использование этого метода, при одинаковой густоте сетки, приводит к значительному (кратному) увеличению числа неизвестных по сравнению с методом конечных разностей.

Указанный недостаток компенсируется универсальностью метода конечных элементов [6, 7], позволяющего рассчитывать многосвязные области без дополнительных уравнений неразрывности. Ниже кратко изложена принципиальная сущность метода конечных элементов.

Метод конечных элементов. Для того чтобы применить метод конечных элементов к решению задачи, необходимо, прежде всего, аппроксимировать фактическую континуальную систему, т.е. реальную конструкцию, совокупностью конечных элементов; затем следует представить упругие и геометрические характеристики, а также характеристики нагружения и закрепления системы в матричной форме.

Наконец, необходимо вычислить параметры напряжений и перемещений системы с помощью аппарата матричной алгебры. Идея использования пластинчатого элемента для дискретизации сплошной конструкции была дана в работе Тернера, Клафа, Мартина и Топпа [8].

Пластинчатые конечные элементы не являются просто кусками, вырезанными из заданной конструкции. Они представляют собой упругие элементы специального типа, на деформации которых наложены сильно ограничивающие условные связи, что приводит к соблюдению условий непрерывности деформаций между элементами по всей длине их сторон (рис. 2).

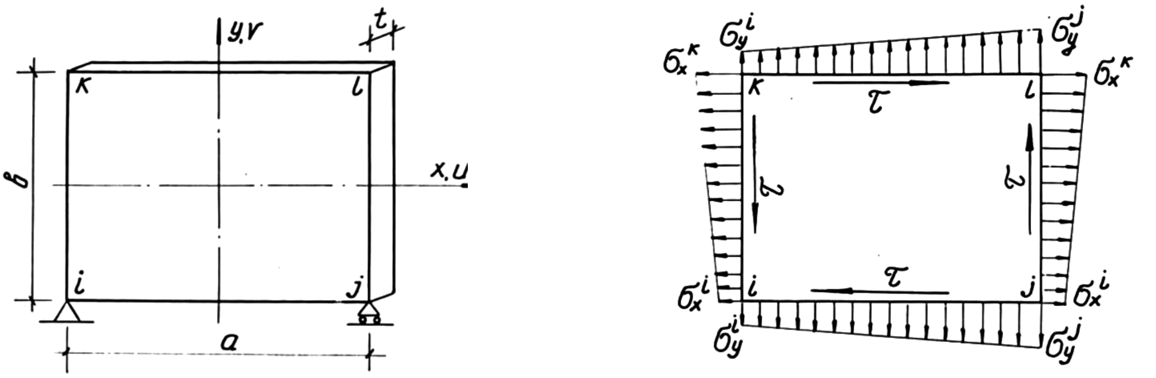

Рис. 2. Упругий пластинчатый конечный элемент для аппроксимации континуальной системы

Fig. 2. Elastic plate finite element for the approximation of a continuous system

Надо, конечно, оговорить то обстоятельство, что непрерывность деформаций по всей длине грани соблюдается приблизительно и лишь в узловых точках - точно. Однако очевиден факт, что можно добиться желаемой точности расчета путем уменьшения размеров элементов.

Как уже указывалось, следующим этапом расчета является получение формул для матриц, характеризующих жесткость или податливость отдельных элементов и всей системы в целом с учетом взаимно расположения конечных элементов в системе [9].

При выводе матриц жесткостей используется способ единичного смещения узловых точек. Число кинематических степеней свободы в общем случае для прямоугольного элемента равно восьми, так как имеется четыре узловые точки и каждая из них обладает двумя независимыми смещениями в плоскости рассматриваемого элемента.

Очевидно, однако, что при построении матрицы жесткости достаточно учитывать только такие степени свободы, которые фактически связаны с деформациями элемента.

По терминологии Дж. Аргриса [10], матрицы жесткостей с уменьшенным порядком называются инвариантными, или естественными, матрицами.

Любое искажение элемента можно представить в виде суммы независимых одиночных перемещений узлов с соответствующими коэффициентами. Или, наоборот, каждое одиночное перемещение можно поставить в зависимость от пяти характерных видов перемещений узлов или соответствующих им независимых напряженных состояний (рис. 3). Линейная зависимость между пятью одиночными (по числу степеней свободы) перемещениями узлов элемента и пятью видами характерных напряженных состояний может быть выражена в матричной форме:

$$[V] = [A] \cdot [\alpha], \tag{14}$$

где $[A]$ - матрица линейных соотношений между узловыми перемещениями $[V]$ и параметрами напряженного состояния $[\alpha]$.

Из матричного уравнения (14) параметры независимых напряженных состояний можно выразить через узловые перемещения, обернув для этой цели матрицу $[A]$

$$[\alpha] = [A]^{-1} \cdot [V]. \tag{15}$$

Так как параметры независимых напряженных состояний носят несколько абстрактный характер, можно найти зависимость между узловыми перемещениями элемента и напряжениями σ_x, σ_y, τ_{xy} во внутренних точках элемента. Для этого напишем матричное уравнение, выражающее напряжения в любой точке через параметры идеализированных независимых напряженных состояний $[\sigma]$:

$$[\sigma] = [B] \cdot [\alpha]. \tag{16}$$

Из уравнений (15) и (16) определим напряжения во внутренних точках через узловые перемещения элемента:

$$[\sigma] = [B] \cdot [A]^{-1} \cdot [V]. \tag{17}$$

Воспользовавшись обобщенным законом Гука для случая плоского напряженного состояния, можно записать в матричной форме зависимость между деформациями и напряжениями в элементе:

$$[\varepsilon] = [c] \cdot [\sigma], \tag{18}$$

где $[c]$ включает множитель *1/E*.

Таким образом, деформации во внутренних точках отдельного элемента могут быть выражены через перемещения его узловых точек из уравнений (17) и (18):

$$[\varepsilon] = [c] \cdot [B] \cdot [A]^{-1} \cdot [V]. \tag{19}$$

Имея полученные зависимости, можно перейти к нахождению жесткости (реакции) элемента, которая выражает зависимость между узловыми силами и узловыми перемещениями элемента. Для этого следует воспользоваться принципом возможных перемещений.

Пластинчатый элемент, как было указано выше, имеет пять степеней свободы относительно узловых перемещений и соответствующих им узловых сил. Обозначим систему сил, действующих на элемент, через $[S]$.

Эти узловые силы находятся в равновесии с системой внутренних напряжений $[\sigma]$. Дадим узлам элемента некоторые возможные перемещения $[\overline{V}]$. Указанным перемещениям соответствуют деформации внутренних точек пластинки $[\varepsilon]$.

Черточка над буквой указывает, что соответствующая величина связана с возможным перемещением.

Так как принцип возможных перемещений справедлив для любой применяемой системы возможных перемещений, удобно принять, что узлы последовательно получают единичное перемещение.

Внешняя работа узловых сил на возможных перемещениях выражается в матричной форме в виде:

$$[W] = [\overline{V}]^T \cdot [S]. \tag{20}$$

где индекс T обозначает операцию транспонирования.

Работа внутренних сил, связанная с возможными перемещениями узлов, будет выражаться через деформации и напряжения во внутренних точках элемента:

$$U = t \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [\overline{\varepsilon}]^T \, [\sigma] dx dy, \tag{21}$$

где t - толщина пластинки.

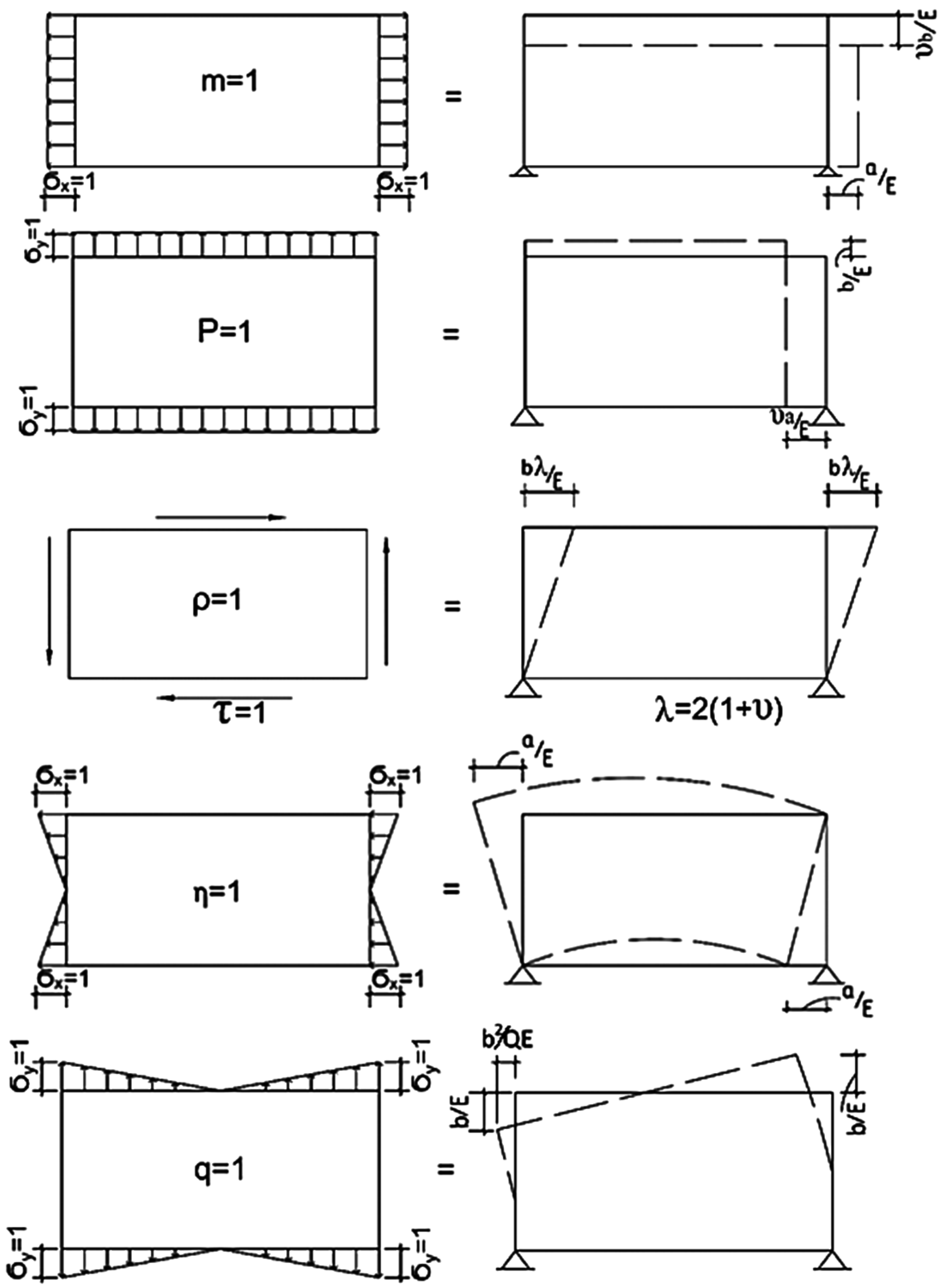

Рис. 3. Связь между независимыми напряженными состояниями элемента и соответствующими им характерными перемещениями узлов

Fig. 3. The relationship between independent stressed states of an element and the corresponding characteristic displacements of nodes

После ряда промежуточных выкладок, приравнивая величины возможной работы внешних и внутренних сил, получим следующее соотношение между узловыми силами и перемещениями узлов:

$$[S] = t \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} [A^{-1}]^T [B]^T \, [C][B][A^{-1}][V]dxdy.$$

Матрицу перемещений узлов $[V]$ можно вынести из-под знака интеграла, так как $[V]$не являются функциями координат, а зависят от величин узловых усилий:

$$[S] = \left(t \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} [A^{-1}]^T [B]^T \, [C][B][A^{-1}] dxdy \right) [V]. \quad (22)$$

Обозначая выражение в скобке одним символом, можно уравнение (22) записать в виде:

$$[S] = [K_i] \cdot [V], \quad (23)$$

где $[K_i]$ - это матрица жесткости конечного i -того элемента, которая определяет величину реакции этого элемента на действие узловых перемещений.

Окончательный результат можно получить, произведя операции обращения и умножения матриц и проинтегрировав полученную результате матрицу по ее элементам в пределах интегрирования:

$$[K_i] = t \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} [A^{-1}]^T [B]^T \, [C][B][A^{-1}] dxdy. \quad (24)$$

Таким образом, мы имеем матрицу, характеризующую упругие свойства отдельного элемента. Необходимо теперь иметь матрицу, которая определяла бы геометрическую форму совокупности элементов пластин, с учетом условий закрепления на контуре системы. Такая матрица (назовем ее матрицей преобразования перемещений) выражает зависимость между деформациями элементов и перемещениями узлов, вызывающими эти деформации.

Деформированное состояние элементов пластинки, вызванное перемещениями всех узлов системы, может быть записано в виде:

$$[U] = [a] \cdot [r], \quad (25)$$

где $[a]$ - матрица преобразования перемещений.

Имея матрицы жесткостей отдельных элементов и матрицу преобразования перемещений системы элементов, можно перейти к определению упругих характеристик (жесткости) всей системы.

Матрица жесткости всей системы конечных элементов входит в состав следующего матричного уравнения:

$$[R] = [K] \cdot [r], \quad (26)$$

где $[R]$ - матрица внешних узловых усилий; $[K]$ - матрица жесткости системы, определяющая реакции системы на узловые перемещения; $[r]$ - матрица узловых перемещений всей системы.

Иными словами, матрица жесткости $[K]$ определяет величины оставляющих узловых сил, вызываемых узловыми перемещениями (в нашем случае - единичными). Получение матрицы реакций $[K]$ можно рассматривать как переход от координат, определяющих деформации отдельных элементов системы $[U]$ к координатам $[r]$, определяющим перемещения узлов конструкции. Оно выполняется по обычной формуле преобразования координат матричной алгебры:

$$[K] = [\alpha]^T \cdot [k] \cdot [a], \quad (27)$$

в которой $[k]$ - диагональная матрица, объединяющая жесткости отельных элементов, не соединенных между собой.

Для того чтобы сформулировать задачу расчета конструкций, необходимо, кроме полученных выше матриц, построить матрицу условий нагружения конструкции, или грузовую матрицу. Обозначим ее условно символом $[R]$.

Имея указанные матрицы, можно рассчитывать усилия и перемещения, возникающие в системе, т.е. можно получить картину напряженно-деформированного состояния плоской конструкции.

Расчет представляет собой последовательность операций над имеющимися матрицами по законам матричной алгебры.

Первым шагом в расчетах по методу перемещений является определение величины перемещений узлов системы от действия внешней нагрузки R. Для этого нужно решить систему линейных уравнений, которая в матричной форме может быть записана в виде уравнения (26). Получив значения величин r, можно перейти к определению напряженного состояния конструкции.

Помня, что мы наложили на деформации элементов условие линейности распределения напряжений по всей поверхности каждого элемента, мы можем напряжения по граням выразить через величины, σ_x^k, σ_x^i, σ_y^i, σ_y^j и τ , как показано на рис. 2.

Свяжем эти величины с параметрами напряженных состояний $[\alpha]$:

$$[R] = [N] \cdot [\alpha], \tag{28}$$

где $[\alpha]$ выражается через деформации элемента по формуле (15). После некоторых преобразований можно получить матрицу напряжений $[\sum]$ на гранях всей совокупности элементов:

$$[\sum] = [M] \cdot [U] = [M] \cdot [a] \cdot [r], \tag{29}$$

где $[M]$ - диагональная матрица, составленная из матриц $[M_i] = [N] \cdot [A^{-1}]_i$ для каждого элемента.

Таким образом, уравнения (26) и (29) определяют весь расчет по методу конечных элементов для совокупности прямоугольных элементов. Приведенные рассуждения носят аналогичный характер для элементов любой формы.

Обсуждение результатов. Изложенные методы могут быть применены к расчету любых континуальных конструкций [8], имеющих разного рода нерегулярности (геометрического и топологического характера). В таких случаях, с целью сохранения однообразия в закономерностях построения матриц и, следовательно, универсализации программ для расчета конструкций на электронных машинах, применяются принципы регуляризации, обоснованные и разработанные в работах Аргириса [10, 11].

Основы регуляризации заключаются в следующем. Если система имеет ослабления в виде отверстий, то удобно эти отверстия заполнить фиктивными элементами, имеющими нулевую жесткость.

Введение указанных элементов никак не отразится на результатах расчета, но позволяет сохранить универсальной закономерность формирования матрицы $[a]$. Кроме того, для той же цели разумно устранить вначале все связи, наложенные на перемещения узлов конструкции, с тем, чтобы затем вычеркнуть лишние столбцы в регуляризованной матрице $[a]$. Если при построении регуляризованной матрицы $[a]$ было введено n фиктивных элементов и m фиктивных степеней свободы, то необходимо вычеркнуть из нее n соответствующих строк и m столбцов. Затем можно формировать матрицу жесткости всей системы $[K]$ по формуле (27).

Вывод. Каждый из описанных выше численных методов исследования плоских несущих систем имеет, как было отмечено, свои преимущества при решении различных типов задач. Важное значение при выборе методики расчета обретают характеристики доступной для пользования вычислительной техники и наличие автоматизированных программных комплексов. Эти факторы, являясь сильными ограничителями, могут сыграть решающую роль в выборе метода конечных разностей (метод «сеток») для исследования пластин.

Особенно возрастают преимущества метода конечных разностей (в плане уменьшения числа неизвестных) при исследовании напряженного состояния панельных балок-стенок, сочлененных с рамами. В этом случае рама может рассматриваться как стержневая система, что дополнительно уменьшает число неизвестных по сравнению с методом конечных элементов, где раму приходится задавать в виде совокупности плоских конечных элементов.

Тем не менее, в связи с быстро возрастающими в последние годы возможностями вычислительной техники, напряженное состояние балок-стенок, опертых на рамы и работающих в составе многопроёмных стеновых конструкций, предпочтительнее исследовать с помощью автоматизированных расчетных комплексов с использованием метода конечных элементов, если технические характеристики наличных ЭВМ позволяют решать полученную в результате математического моделирования систему линейных алгебраических уравнений высокого порядка.

Библиографический список:

1. Магомедов М.Г., Пайзулаев М.М. Использование метода конечных элементов для теоретического моделирования плоских бетонных систем // Научное обозрение. – Москва, 2015. №1, С. 77-81.
2. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок: некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях / Часть I. Изд. АН УССР, Ин-т строительной механики. -Киев, 1949. 136 с.
3. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок: некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях / Часть II. Изд. АН УССР, Ин-т строительной механики. -Киев, 1953. 115 с.
4. Длугач М.И. Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости / Изд. АН УССР, Ин-т механики. - Киев: Наукова думка, 1964. 260 с.
5. Магомедов М.Г. Напряженное состояние и прочность балок-стенок в каркасно-панельных зданиях. Канд. дисс. М.: 1972. 161 с.
6. Клаф Р.У. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин, М.: 1967 (пер. с англ. под ред. А.Ф. Смирнова).
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. В 2 т. Пер. с нем. Т.1. Изд.3, исп. 1951. 476 с.
8. Turner, M. I., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. T., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 25, No. 9, 1956, pp. 805-823.
9. Магомедов М.Г., Акаев А. И., Мирзоева А. Р. О вариационной сущности метода конечных элементов / Строительство: проблемы и перспективы: сборник статей по материалам II международной научно-практической конференции. – Махачкала: АЛЕФ (ИП Овчинников М.А.), 2016. С. 56-64.
10. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. М.: Стройиздат, 1968. -241 с. (пер. с англ. под ред. А.Ф. Смирнова).
11. Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций. / Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем: сборник статей. Ленинград: Судпромгиз, 1961. 876 с. (Пер. с англ. Л. И. Филиной).

References:

1. Magomedov M.G., Payzulayev M.M. Ispol'zovaniye metoda konechnykh elementov dlya teoretiche-skogo modelirovaniya ploskikh betonnykh sistem // Nauchnoye obozreniye. – Moskva, 2015. №1, S. 77-81. [Magomedov M. G., Paizulaev M. M. Using the finite element method for theoretical modeling of flat concrete systems / / Scientific review. - Moscow, 2015. No. 1, pp. 77-81. (In Russ)]
2. Varvak P.M. Razvitiye i prilozheniye metoda setok k raschetu plastinok: nekotoryye zadachi pri-kladnoy teorii uprugosti v konechnykh raznostyakh / Chast' I. Izd. AN USSR, In-t stroitel'noy mekhaniki. -Kiyev, 1949.-136 s. [Varvak P. M. Development and application of the grid method to the calculation of plates: some problems of the applied theory of elasticity in finite differences / Part I. Ed. As of the Ukrainian SSR, In-t of construction mechanics. - Kiev, 1949. 136 p. (In Russ)]
3. Varvak P.M. Razvitiye i prilozheniye metoda setok k raschetu plastinok: nekotoryye zadachi pri-kladnoy teorii uprugosti v konechnykh raznostyakh / Chast' II. Izd. AN USSR, In-t stroitel'noy mekhaniki. -Kiyev, 1953.-115 s. [Varvak P. M. Development and application of the grid method to the calculation of plates: some problems of the applied theory of elasticity in finite differences / Part II. Ed. As of the Ukrainian SSR, In-t of construction mechanics. Kiev, 1953. 115 p. (In Russ)]
4. Dlugach M. I. mesh Method in a mixed plane problem of elasticity theory / Ed. An of the USSR, in-t mechanics. - Kiev: Naukova Dumka, 1964. 260 p.
5. Magomedov M.G. Napryazhennoye sostoyaniye i prochnost' balok-stenok v karkasno-panel'nykh zda-niyakh. Kand. diss. – M.: 1972. – 161 s. [Magomedov M. G. Stress state and strength of beams-walls in frame-panel buildings. Cand. Diss. - Moscow: 1972. 161 p. (In Russ)]
6. Clough R. U. finite element Method in solving the plane problem of elasticity theory / / Calculation of building structures using electronic machines, M.: 1967 (TRANS. from English. edited by A. F. Smirnov).
7. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. In 2 vols. Vol. 1. Ed.3, Spanish 1951. 476 P.
8. Turner, M. I., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. T., " Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 25, No. 9, 1956, pp. 805-823.
9. Magomedov M.G., Akayev A. I., Mirzoyeva A. R. O variatsionnoy sushchnosti metoda konechnykh ele-mentov / Stroitel'stvo: problemy i perspektivy: sbornik statey po materialam II mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. – Makhachkala: ALEF (IP Ovchinnikov M.A.), 2016. - S. 56-64. [Magomedov M. G., Akaev A. I., Mirzoeva A. R. on the variational essence of the finite element method / Construction: problems and prospects:

collection of articles based on the materials of the II international scientific and practical conference. - Makhachkala: ALEF (IP Ovchinnikov MA), 2016. pp. 56-64. (In Russ)]

10. Argiris Dzh. Sovremennyye dostizheniya v metodakh rascheta konstruktsiy s primeneniyem matrits. M.: Stroyizdat, 1968. -241 s. (per. s angl. pod red. A.F. Smirnova). [Argyris George. Recent advances in methods of analysis of structures using matrices. Moscow: Stroizdat, 1968. -241 S. (translated from English. edited by A. F. Smirnov). (In Russ)]
11. Argiris Dzh. Energeticheskiye teoremy i raschet konstruktsiy. / Sovremennyye metody rascheta slozhnykh staticheski neopredelimykh sistem: sbornik statey. Leningrad: Sudpromgiz, 1961. -876 s. (Per. s angl. L. I. Filinoy). [Argyris George. Energy theorems and design calculations. / Modern methods for calculating complex statically indeterminate systems: a collection of articles. Leningrad: Sudpromgiz, 1961. -876 p. (Per.with English. L. I. Filina). (In Russ)]

Сведения об авторах:

Магомедов Магомед Гаджиевич, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Сейсмостойкое строительство»; e-mail: aabduldzhafar@mail.ru

Акаев Абудулджафар Имамусейнович, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Сейсмостойкое строительство»; декан инженерного факультета; e-mail: aabduldzhafar@mail.ru

Пайзулаев Магомед Муртазалиевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, теоретическая и строительная механика»; e-mail: smdstu@mail.ru

Айламматова Дагмара Айламматовна, старший преподаватель, кафедра «Сейсмостойкое строительство»; e-mail:osstikk@mail.ru

Information about the authors:

Magomed G. Magomedov, Cand. Sc.(Technical), Assoc.Prof., Department of Earthquake Resistant Construction; e-mail: aabduldzhafar@mail.ru

Abduljafar I. Akaev, Cand. Sc.(Technical), Assoc. Prof., Department of Earthquake Resistant Construction; Dean of the Faculty of Engineering; e-mail: aabduldzhafar@mail.ru

Magomed M. Payzulaev, Cand. Sc.(Technical), Assoc. Prof., Head of the department "Resistance of materials, theoretical and structural mechanics"; e-mail: smdstu@mail.ru

Dagmara A. Ailammatova, Senior Lecturer, Department of Earthquake Resistant Construction; e-mail: osstikk@mail.ru

Конфликт интересов.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Поступила в редакцию 11.04.2020.
Принята в печать 18.05.2020.

Conflict of interest.
The authors declare no conflict of interest.
Received 11.04.2020.
Accepted for publication 18.05.2020.