

Для цитирования: А.П. Лапина, И.М. Зотов, А.С. Чепурненко, Б.М. Языев. Расчет вязкоупругих стержней некруглого поперечного сечения на свободное кручение. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020; 47 (2):144-152. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-2-144-152

For citation: A.P. Lapina, I.M. Zotov, A.S. Chepurnenko, B.M. Yaziev. Calculation of viscoelastic rods of non-circular cross section for free torsion. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2020; 47(2):144-152. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-2-144-152

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624. 04

DOI: 10.21822/2073-6185-2020-47-2-144-152

РАСЧЕТ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ

А.П. Лапина, И.М. Зотов, А.С. Чепурненко, Б.М. Языев

Донской государственный технический университет,
344002, г. Ростов-на-Дону, площадь Гагарина, 1, Россия

Резюме. Цель. В статье представлен вывод разрешающего уравнения для определения напряженно-деформированного состояния стержня некруглого поперечного сечения при кручении с учетом ползучести материала. **Метод.** Решение базируется на гипотезах, введенных Сен-Венаном при рассмотрении упругого стержня. Окончательно задача сводится к дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции напряжений. Решение данного уравнения выполняется методом конечных элементов в комбинации с методом Эйлера. **Результат.** В работе представлены разрешающие уравнения для треугольного конечного элемента. Приведено решение тестовой задачи для полимерного стержня прямоугольного поперечного сечения, материал которого подчиняется нелинейному уравнению Максвелла-Гуревича. Представлены графики изменения во времени относительного угла закручивания, а также максимальных величин касательных напряжений. **Вывод.** Установлено, что напряжения в стержне непостоянны во времени. Касательные напряжения в стержне в процессе ползучести сначала убывают с последующим возвратом к упругому решению.

Ключевые слова: ползучесть, кручение, депланация, метод конечных элементов, уравнение Пуассона

CALCULATION OF VISCOELASTIC RODS OF NON-CIRCULAR CROSS SECTION FOR FREE TORSION

A.P. Lapina, I.M. Zotov, A.S. Chepurnenko, B.M. Yaziev

Don State Technical University,
1 Gagarin Square, Rostov-on-Don 344002, Russia

Abstract. Aim. The article aims to present a solution to a resolving equation for determining the stress-strain state of a rod of non-circular cross-section under torsion, taking into account the material creep. **Methods.** The solution is based on the hypotheses introduced by Saint-Venant when considering an elastic rod. Finally, the problem is reduced to a second-order differential equation in terms of the stress function. The solution of this equation is performed using the finite element method in combination with the Euler method. **Results.** The work presents resolving equations for a triangular finite element. The solution of a test problem for a polymer rod of rectangular cross-section is given, the material of which adheres to the nonlinear Maxwell-Gurevich equation. Graphs of changes in time of the relative twisting angle, as well as the maximum values of tangent stresses, are presented. **Conclusion.** It is established that the stresses in the rod are not constant over time. The tangent stresses in the rod during creep initially decrease followed by a return to the elastic solution.

Keywords: creep, torsion, deplanation, finite element method, Poisson equation

Введение. Решение задачи о свободном кручении упругого стержня произвольного поперечного сечения было получено Сен-Венаном [1].

Постановка задачи. В настоящей статье рассмотрим данную задачу с учетом ползучести материала. Расчетная схема представлена на рис. 1.

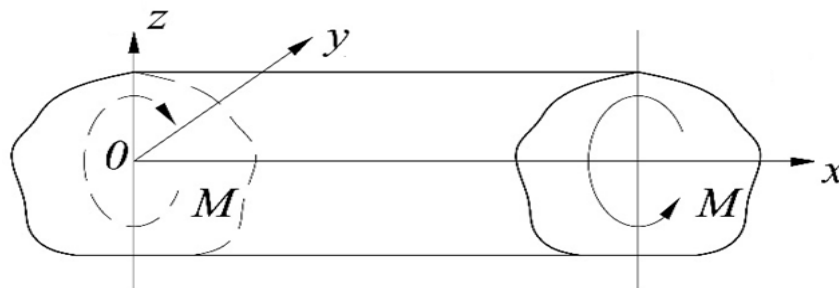


Рис.1. Расчетная схема

Fig. 1. Calculation scheme

При решении будем использовать допущения, введенные Сен-Венаном:

1. Для перемещений v и w в плоскости Oyz справедливы те же соотношения, что и при кручении стержней круглого поперечного сечения[2]:

$$v = -\vartheta xz; w = \vartheta xy, \quad (1)$$

где $\vartheta = \frac{d\theta}{dx}$ – относительный угол закручивания.

2. Величина деформации пропорциональна относительному углу закручивания ϑ , т.е.

$$u = \vartheta \psi(y, z). \quad (2)$$

Вывод разрешающих уравнений

Перемещения и деформации связаны соотношениями Коши [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \vartheta \left(-z + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right); \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \vartheta \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Связь между касательными напряжениями и деформациями сдвига с учетом ползучести записывается в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = G(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*) = G \left(\vartheta \left(-z + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \gamma_{xy}^* \right); \\ \tau_{xz} = G(\gamma_{xz} - \gamma_{xz}^*) = G \left(\vartheta \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \gamma_{xz}^* \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где G – модуль сдвига, γ_{xy}^* и γ_{xz}^* – сдвиговые деформации ползучести.

Крутящий момент определяется следующим образом:

$$M_K = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA, \quad (5)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Подставив (4) в (5), получим:

$$\begin{aligned} M_K = G\vartheta \int_A \left(y^2 + z^2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) dA + G \int_A (\gamma_{xy}^* z - \gamma_{xz}^* y) dA = \\ = \vartheta G I_K - M_K^*, \end{aligned} \quad (6)$$

где I_K – момент инерции при кручении, $M_K^* = G \int_A (-\gamma_{xy}^* z + \gamma_{xz}^* y) dA$.

Уравнения равновесия записываются в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0,\end{aligned}\tag{7}$$

где X, Y, Z – объемные силы. Подставив в третье уравнение (7) выражения для напряжений (4) при отсутствии объемных сил получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= G\vartheta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - G \left(\frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial z} \right) = 0; \\ \vartheta \nabla^2 \psi(y, z) &= \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial y}.\end{aligned}\tag{8}$$

Таким образом, в отличие от упругой задачи, функция $\psi(y, z)$ не является гармонической функцией. Введем функцию напряжений $\Phi(y, z)$ по формулам:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}.\tag{9}$$

Из равенств (4) и (9) получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial z} &= G \left(\vartheta \left(-z + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \gamma_{xy}^* \right); \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= G \left(\vartheta \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \gamma_{xz}^* \right).\end{aligned}\tag{10}$$

Исключим из (10) функцию ψ . Для этого первое равенство продифференцируем по y , а второе по x и вычтем из первого равенства второе:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= G \left(\vartheta \left(-1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right); \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= G \left(\vartheta \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= -2G\vartheta + G \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{11}$$

Граничное условие на контуре для односвязных сечений имеет вид $\Phi = 0$ [2]. Крутящий момент связан с функцией Φ следующим образом [2]:

$$M_K = 2 \int_A \Phi dA.\tag{12}$$

Методы исследования. Перепишем третье равенство в (11) в следующем виде:

$$\nabla^2 \Phi(y, z) + 2G\vartheta - G \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) = 0.\tag{13}$$

Расчет будем выполнять при помощи метода конечных элементов. Решение уравнения (13) удовлетворяет минимуму следующего функционала [3]:

$$\chi = \int_A \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - G \left\{ 2\vartheta - \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \Phi \right] dA.\tag{14}$$

Интервал времени, на котором исследуется процесс ползучести, разбивается на n гов Δt . На каждом шаге по времени деформации ползучести принимаются постоянными. На первом этапе решается упругая задача при $t = 0, \gamma_{yz}^* = \gamma_{xz}^* = 0$.

Зная крутящий момент, можно определить величину относительного угла закручивания:

$$\vartheta = \frac{M_K}{GI_K}.\tag{15}$$

Далее величина ϑ подставляется в уравнение (13), и определяется функция Φ .

По функции Φ определяются касательные напряжения. Если закон ползучести задан в дифференциальной форме, то, зная величины напряжений, можно определить скорости роста деформаций ползучести $\frac{\partial \gamma_{yz}^*}{\partial t}$ и $\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial t}$. Деформации γ_{yz}^* и γ_{xz}^* в момент времени $t + \Delta t$ можно найти следующим образом:

$$\gamma_{t+\Delta t}^* = \gamma_t^* + \frac{\partial \gamma^*}{\partial t} \Delta t. \quad (16)$$

Определив величины γ_{xz}^* и γ_{yz}^* , можно путем численного интегрирования найти величину M_k^* . Далее определяется относительный угол закручивания ϑ :

$$\vartheta = \frac{M_k + M_k^*}{GI_k}. \quad (17)$$

Затем все перечисленные выше операции повторяются для момента времени $t + \Delta t$.

Построение системы уравнений МКЭ рассмотрим на примере треугольного конечного элемента, изображенного на рис. 2.

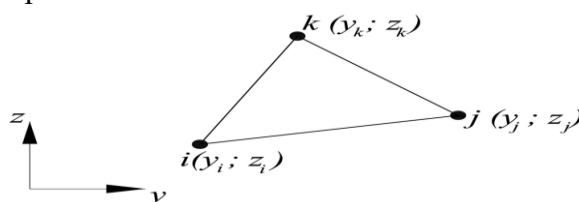


Рис.2 . Используемый конечный элемент

Fig. 2. End element used

Для функции Φ принимается следующая аппроксимация:

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (18)$$

где N_i, N_j, N_k – функции формы.

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i y + c_i z), \quad (19)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \end{vmatrix} \quad \text{— площадь конечного элемента, } a_i = y_j z_k - y_k z_j$$

$$b_i = z_j - z_k, \quad c_i = y_k - y_j.$$

Функции N_j, N_k определяются по аналогии с N_i .

Выражения для коэффициентов $a_j, b_j, c_j, a_k, b_k, c_k$ можно получить циклической заменой индексов $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$.

Градиент функции Φ можно записать в виде:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{\Phi\}. \quad (20)$$

Первые два слагаемых в функционале (14) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \{\Phi\}^T \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{\Phi\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Будем считать, что производные $\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y}$ и $\frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z}$ в пределах конечного элемента постоянны.

Тогда оставшуюся часть функционала (14) можно записать в виде:

$$\int_A G \left\{ 2\vartheta - \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \Phi dA = G \left\{ 2\vartheta - \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \int_A \Phi dA. \quad (22)$$

Интеграл в (19)(22) вычисляется следующим образом:

$$\int_A \Phi dA = \int_A \{N_i \quad N_j \quad N_k\} \{\Phi\} dA = \frac{A}{3} \{1 \quad 1 \quad 1\} \{\Phi\} = \frac{A}{3} \{\Phi\}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

Подставив (23)(23) в (22), а затем (22) и (21) в (14) и далее минимизировав функционал χ по вектору узловых значений функции Φ ($\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = 0$), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{\Phi\} = \{P\}, \quad (24)$$

где $[K]$ – матрица жесткости, $\{P\}$ – вектор нагрузки.

$$[K] = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \cdot A. \quad (25)$$

$$\{P\} = G \left\{ 2\vartheta - \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \frac{A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

Производные от деформаций ползучести в элементе вычисляются по узловым значениям γ_{xz}^* и γ_{xy}^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} &= [b_i \quad b_j \quad b_k] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz,i}^* \\ \gamma_{xz,j}^* \\ \gamma_{xz,k}^* \end{Bmatrix}; \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} &= [c_i \quad c_j \quad c_k] \begin{Bmatrix} \gamma_{xy,i}^* \\ \gamma_{xy,j}^* \\ \gamma_{xy,k}^* \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Касательные напряжения в элементах можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -[b_i \quad b_j \quad b_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = [c_i \quad c_j \quad c_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

Напряжения в узлах определяются по напряжениям в элементах следующим образом: для каждого узла суммируются напряжения в элементах, которым принадлежит узел, и затем полученное число делится на количество элементов, содержащих данный узел. Деформации ползучести в узлах определяются по напряжениям в узлах.

Обсуждение результатов. Был выполнен расчет стержня прямоугольного поперечного сечения размерами $b = 2$ см, $h = 4$ см из вторичного поливинилхлорида ($E = 1480$ МПа, $\nu = 0.3$), испытывающего действие крутящего момента $M_k = 10$ кН · см.

В качестве закона ползучести выбрано обобщенное уравнение Максвелла-Гуревича, имеющее вид [4]:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial t} = \frac{f_{ij}^*}{\eta^*}, \quad i = (x, y, z), j = (x, y, z), \quad (29)$$

где ε_{ij}^* – деформации ползучести, f_{ij}^* – функции напряжений, η^* – релаксационная вязкость.

$$f_{ij}^* = \frac{3}{2} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) - E_\infty \varepsilon_{ij}^*; \quad (30)$$

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp \left(\frac{|f_{\max}^*|}{m^*} \right), \quad (31)$$

где η_0^* – начальная релаксационная вязкость, m^* – модуль скорости, E_∞ – модуль высокоэластичности.

Из формулы (29) видно, что релаксационная вязкость экспоненциально зависит от напряжений, что обуславливает нелинейность задачи.

Реологические параметры вторичного ПВХ приводятся в работах [5-7]: $E_\infty = 5990$ МПа, $m^* = 12.6$ МПа, $\eta_0^* = 9.06 \cdot 10^5$ МПа · мин.

В случае свободного кручения относительно оси x отличны от нуля только напряжения τ_{xz} и τ_{xy} . Уравнения (29) и (30) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t} = \frac{f_{xz}^*}{\eta^*}; \quad \frac{\partial \varepsilon_{xy}^*}{\partial t} = \frac{f_{xy}^*}{\eta^*};$$

$$f_{xz}^* = \frac{3}{2} \tau_{xz} - E_\infty \varepsilon_{xz}^*; \quad f_{xy}^* = \frac{3}{2} \tau_{xy} - E_\infty \varepsilon_{xy}^*.$$
(32)

В формулах (32) $\varepsilon_{xz}^* = \frac{1}{2} \gamma_{xz}^*$, $\varepsilon_{xy}^* = \frac{1}{2} \gamma_{xy}^*$.

На рис. 3 приведен график изменения во времени относительного угла закручивания. Можно показать, что для выбранного закона ползучести отношение углов закручивания при $t \rightarrow \infty$ $t = 0$ равно отношению мгновенного и длительного модуля сдвига. Длительный модуль сдвига при использовании уравнения Максвелла-Гуревича определяется по формуле [8]:

$$G_{дл} = \frac{G \cdot G_\infty}{G + G_\infty},$$
(33)

где $G_\infty = E_\infty/3$.

Отношение $G_{дл}/G$ для рассмотренного примера составило 1.285. Угол закручивания по результатам расчета вырос в 1.28 раз, что близко к указанному значению и свидетельствует о достоверности разработанной методики.

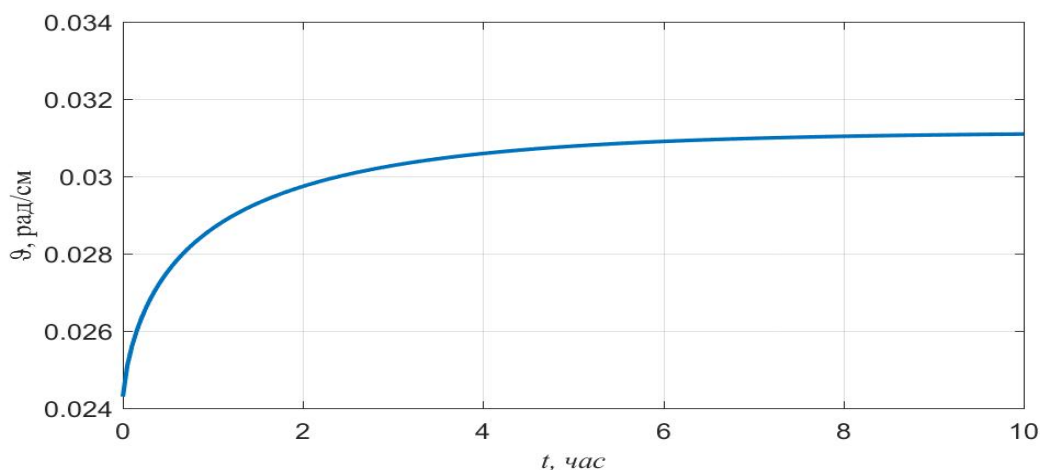


Рис.3. Изменение во времени относительного угла закручивания
Fig. 3. Time variation of the relative twist angle

На рис. 4 представлено изменение во времени наибольшей величины касательных напряжений τ_{xy} . Напряжения τ_{xy} принимают свое максимальное значение на серединах коротких сторон прямоугольника. Рис. 5 – то же для напряжений τ_{xz} , которые принимают максимальные значения на серединах длинных сторон.

Из рис. 4 и рис. 5 видно, что в начале процесса ползучести напряжения в стержне быстро убывают, и затем происходит возврат к упругому решению. Данный эффект связан с неустановившейся ползучестью.

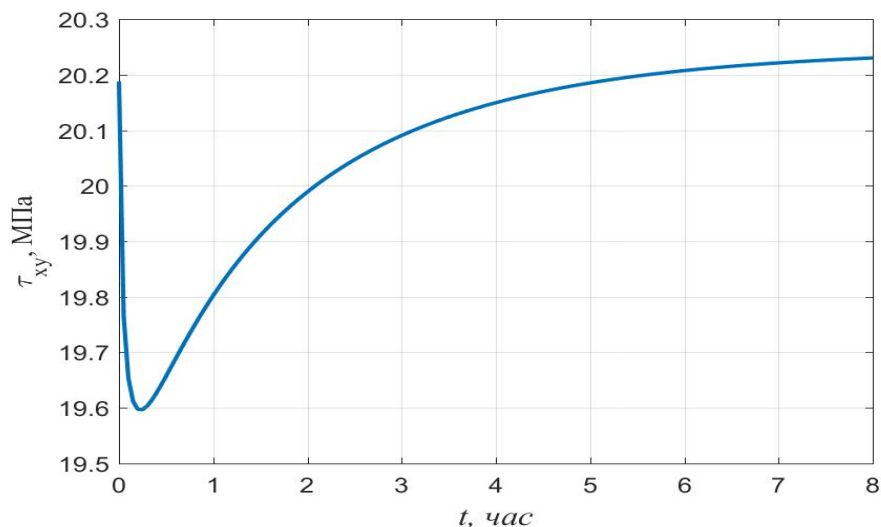


Рис.4. Изменение во времени наибольшей величины касательных напряжений τ_{xy}

Fig. 4. Time variation of the largest value of shear stresses τ_{xy}

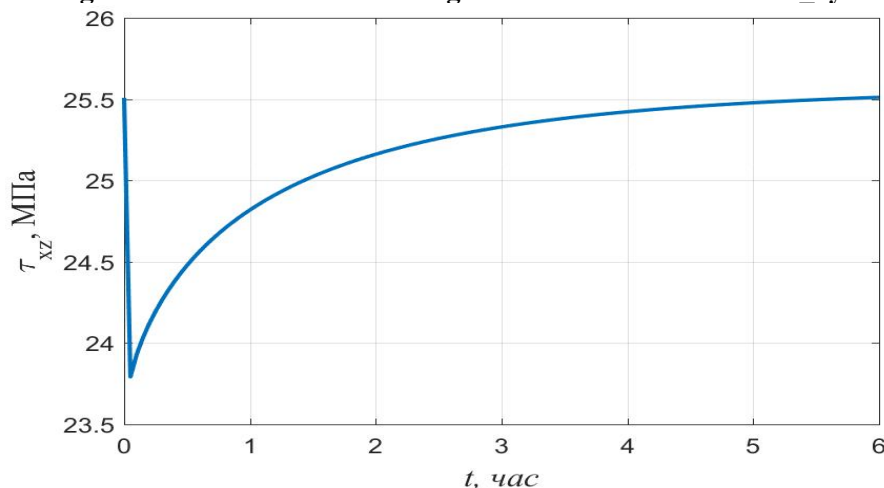


Рис. 5. Изменение во времени наибольшей величины касательных напряжений τ_{xz}

Fig. 5. Change in time of the largest value of shear stresses τ_{xz}

Ранее он был выявлен для полимерных пластин при изгибе и плоском напряженном состоянии в работах [9-12], а также в осесимметричных задачах для полимерных тел в статьях [13-20].

Вывод. Получено разрешающее уравнение относительно функции напряжений для определения напряженно-деформированного состояния стержней некруглого поперечного сечения при кручении с учетом вязкоупругости материала.

Представлена конечно-элементная реализация задачи. Приведено решение тестовой задачи, подтверждающее достоверность разработанной методики расчета.

Установлено, что касательные напряжения в стержне в процессе ползучести сначала убывают с последующим возвратом к упругому решению.

Библиографический список:

1. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. М.: Высшая школа, 1982. 264 с.
2. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян [и др.] — М.: Издательство АСВ, 2015. 568 с.
3. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
4. Andreev, V.I. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep / V. I. Andreev, B.M. Yazyev, A. S. Chepurmenko // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. pp. 707-710.
5. Chepurmenko, A.S. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures / A.S. Chepurmenko, V.I. Andreev, A.N. Beskopylny, B.M. Jazyev // MATEC Web of Conferences. 2016. Vol. 67. Article No. 06059.

6. Dudnik, A.E. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account / A.E. Dudnik, A.S. Chepurnenko, S.V. Litvinov // *International Polymer Science and Technology*. 2017. Vol. 44. pp. 30-33.
7. Дудник, А.Е. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры / А.Е. Дудник, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов // *Пластические массы*. 2016. № 1-2. С. 30-33.
8. Зотов, И.М. Расчет на устойчивость плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения с учетом ползучести / И.М. Зотов, А.С. Чепурненко, С.Б. Языев // *Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки*. 2019. Т. 46 (1). С. 169-176.
9. Чепурненко, А. С. Моделирование реологических процессов в трехслойных плитах с пенополиуретановым заполнителем / А.С. Чепурненко, А.А. Савченко // *Пластические массы*. 2018. № 5-6. С. 24-27.
10. Андреев, В.И. Осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести / В. И. Андреев, Б. М. Языев, А. С. Чепурненко // *Вестник МГСУ*. 2014. № 5. С. 16-24.
11. Савченко, А.А. Концентрация напряжений в вязкоупругой полимерной пластинке с отверстием / А.А. Савченко // *Научно-технический вестник Поволжья*. 2017. №4. С. 44-47
12. Chepurnenko, A.S. Calculation for the Circular Plate on Creep Considering Geometric Nonlinearity / A.S. Chepurnenko, B.M. Yazyev, A.A. Savchenko // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. pp. 1680–1685.
13. Litvinov, S.V. Flat axisymmetrical problem of thermal creepage for thick-walled cylinder made of recyclable PVC / S.V. Litvinov, L.I. Trush, S.B. Yazyev // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. С. 1686–1693.
14. Литвинов, С.В. Плоская деформация неоднородных многослойных цилиндров с учетом нелинейной ползучести / С.В. Литвинов, С.Б. Языев, С.Б. Языева // *Вестник МГСУ*. 2010. № 1. С. 128-132.
15. Литвинов, С.В. Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке / С.В. Литвинов, Л.И. Труш, А.Е. Дудник // *Инженерный вестник Дона*. —2016. — № 2.—URL: <http://ivdon.ru/rumagazine/archive/n2y2016/3560>
16. Труш, Л.И. Оптимизация решения плоской задачи полимерного цилиндрического тела в термовязкоупругой постановке / Л.И. Труш, С.В. Литвинов, Е.Н. Пищереко, А.Е. Дудник // *Новые полимерные композиционные материалы Материалы XIII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки РФ и КБР, проф. Микитаева А.К.* 2017. С. 246-253.
17. Литвинов, С.В. Напряженно-деформированное состояние тел вращения в вязкоупругой постановке / С.В. Литвинов, Л.И. Труш, А.А. Аваков // *Строительство и архитектура-2017. Материалы научно-практической конференции*. 2017. С. 186-194.
18. Trush, L. Optimization of the solution of a plane stress problem of a polymeric cylindrical object in thermoviscoelastic statement / L. Trush, S. Litvinov, N. Zakieva, S. Bayramukov // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2018. Vol. 692. pp. 885-893.
19. Литвинов, С.В. Прогнозирование прочности адгезионного соединения в течение длительного периода времени / С.В. Литвинов, Л.И. Труш, Е.Н. Пищереко, А.А. Аваков // *Новые полимерные композиционные материалы Материалы XIII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки РФ и КБР, проф. Микитаева А.К.* 2017. С. 162-167.
20. Litvinov, S. Forecasting the strength of an adhesive bond over a long period of time / S. Litvinov, A. Zhuravlev, S. Yazyev, S. Bajramukov // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2018. Vol. 692. Pp. 902-907.

References:

1. Samul', V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti / V.I. Samul'. — М.: Vysshaya shkola, 1982. — 264 s. [V.I. Samul. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. М.: Vysshayashkola, 1982. 264 p. (In Russ)]
2. Vardanyan, G.S. Soprotivleniye materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti / G.S. Vardanyan [i dr.] — М.: Izdatel'stvo ASV, 2015. — 568 s. [G.S. Vardanyan, V.I. Andreev, N.M. Atarov, A.A. Gorshkov Soprotivleniye materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti [Strength of materials with the basics of the theory of elasticity and plasticity]. М.: Izdatel'stvo ASV, 2015. 568 p. (In Russ)]
3. Segerlind, L. Primeneniye metoda konechnykh elementov / L. Segerlind. — М.: Mir, 1979. — 392 s [L. Segerlind. Application of the finite element method [Primeneniye metodakonechnykh elementov]. М.: Mir, 1979. 392 p. (In Russ)]
4. V. I. Andreev, B.M. Yazyev, A. S. Chepurnenko. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 900. pp. 707-710.
5. A.S. Chepurnenko, V.I. Andreev, A.N. Beskopylny, B.M. Jazyev. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures. *MATEC Web of Conferences*. 2016. Vol. 67. Article No. 06059.
6. A.E. Dudnik, A.S. Chepurnenko, S.V. Litvinov. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account. *International Polymer Science and Technology*. 2017. Vol. 44. Pp. 30-33.
7. Dudnik, A.Ye. Opredeleniye reologicheskikh parametrov polivinilkhlorida s uchetoм izmeneniya temperatury / A.Ye. Dudnik, A.S. Chepurnenko, S.V. Litvinov // *Plasticheskiye massy*. 2016. № 1-2. С. 30-33. [A.E. Dudnik, A.S. Chepurnenko, S.V. Litvinov. Determination of rheological parameters of polyvinyl chloride taking into account temperature changes. *Plasticheskiye massy*. 2016. No. 1-2. pp. 30-33. (In Russ)]
8. Zotov, I.M. Raschet na ustoychivost' ploskoy formy izgiba balok pryamougol'nogo secheniya s uchetoм polzuchesti / I.M. Zotov, A.S. Chepurnenko, S.B. Yazyev // *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki*. 2019. Т. 46 (1). С. 169-176. [I.M. Zotov, A.S. Chepurnenko, S.B. Yazyev. Calculation of the flat bending shape stability of rectangular cross section beams with regard to creep. *Bulletin of the Dagestan State Technical University. Technical science*. 2019. Vol. 46 (1). Pp. 169-176. (In Russ)]
9. Chepurnenko, A. S. Modelirovaniye reologicheskikh protsessov v trekhslaynykh plitakh s penopoliretanovym zapolnitelem / A.S. Chepurnenko, A.A. Savchenko // *Plasticheskiye massy*. 2018. № 5-6. С. 24-27. [A.S. Chepurnenko, A.A. Savchenko. Modeling of rheological processes in three-layer plates with polyurethane foam aggregate. *Plasticheskiye massy*. 2018. No. 5-6. pp. 24-27. (In Russ)]

10. Andreyev, V.I. Osesimmetrichnyy izgib krugloy gibkoy plastinki pri polzuchesti / V. I. Andreyev, B. M. Yazyev, A. S. Chepurnenko // Vestnik MGSU. 2014. № 5. S. 16-24. [V.I. Andreev, B.M. Yazyev, A.S. Chepurnenko. Axisymmetric bending of a round flexible plate during creep. Vestnik MGSU. 2014. No. 5. pp. 16-24. (In Russ)]
11. Savchenko, A.A. Kонтсентрати́а напры́зheniy v vyazkoupругoy polimernoy plastinke s otverstiyem / A.A. Savchenko // Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya. 2017. №4. S. 44-47 [A.A. Savchenko. The stress concentration in a viscoelastic polymer plate with a hole // Scientific and Technical Bulletin of the Volga Region. 2017. No. 4. pp. 44-47]
12. A.S. Chepurnenko, B.M. Yazyev, A.A. Savchenko. Calculation for the Circular Plate on Creep Considering Geometric Nonlinearity. Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. Pp. 1680–1685.
13. S.V. Litvinov, L.I. Trush, S.B. Yazyev. Flat axisymmetrical problem of thermal creepage for thick-walled cylinder made of recyclable PVC. Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. Pp. 1686–1693.
14. Litvinov, S.V. Ploskaya deformatsiya neodnorodnykh mnogosloynnykh tsilindrov s uchetoм nelineynoy polzuchesti / S.V. Litvinov, S.B. Yazyev, S.B. Yazyeva // Vestnik MGSU. 2010. № 1. S. 128-132. [S.V. Litvinov, S.B. Yazyev, S.B. Yazyeva. Plane deformation of inhomogeneous multilayer cylinders taking into account nonlinear creep. Vestnik MGSU. 2010. No. 1. pp. 128-132. (In Russ)]
15. Litvinov, S.V. Modelirovaniye termopolzuchesti neodnorodnogo tolstostennogo tsilindra v ose-simmetrichnoy postanovke / S.V. Litvinov, L.I. Trush, A.Ye. Dudnik // Inzhenernyy vestnik Dona. 2016. № 2. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560> [S.V. Litvinov, L.I. Trush, A.E. Dudnik. Simulation of thermal creep of an inhomogeneous thick-walled cylinder in an axisymmetric formulation. Inzhenernyyvestnik Dona (Rus). 2016. No. 2. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560> (In Russ)]
16. Trush, L.I. Optimizatsiya resheniya ploskoy zadachi polimernogo tsilindricheskogo tela v termoviyaz-koupругoy postanovke / L.I. Trush, S.V. Litvinov, Ye.N. Pishcherenko, A.Ye. Dudnik // Novyye poli-mernyye kompozitsionnyye materialy Materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati zaslužennogo deyatelya nauki RF i KBR, prof. Mikitayeva A.K. 2017. S. 246-253. [L.I. Trush, S.V. Litvinov, E.N. Pishcherenko, A.E. Dudnik. Optimization of the solution of the plane problem of a polymer cylindrical body in athermoviscoelastic formulation. New polymer composite materials. Materials of the XIII International Scientific and Practical Conference dedicated to the memory of Honored Scientist of the Russian Federation and KBR, prof. Mikitaev A.K. 2017. pp. 246-253. (In Russ)]
17. Litvinov, S.V. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye tel vrashcheniya v vyazkoupругoy postanovke / S.V. Litvinov, L.I. Trush, A.A. Avakov // Stroitel'stvo i arkhitektura-2017. Materialy nauchno-prakticheskoy konferentsii. 2017. S. 186-194. [S.V. Litvinov, L.I. Trush, A.A. Avakov. Stress-strain state of bodies of revolution in a viscoelastic formulation. Construction and architecture-2017. Materials of the scientific-practical conference. 2017. pp. 186-194. (In Russ)]
18. L. Trush, S. Litvinov, N. Zakieva, S. Bayramukov. Optimization of the solution of a plane stress problem of a polymeric cylindrical object in thermoviscoelastic statement. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. Vol. 692. Pp. 885-893.
19. Litvinov, S.V. Prognozirovaniye prochnosti adgezionnogo soyedineniya v techeniye dlitel'nogo perioda vremeni / S.V. Litvinov, L.I. Trush, Ye.N. Pishcherenko, A.A. Avakov // Novyye polimernyye kompozitsionnyye materialy Materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati zaslužennogo deyatelya nauki RF i KBR, prof. Mikitayeva A.K. 2017. S. 162-167 [S.V. Litvinov, L.I. Trush, E.N. Pishcherenko, A.A. Avakov. Prediction of adhesive strength over a long period of time. New polymer composite materials. Materials of the XIII International scientific and practical conference dedicated to the memory of Honored Scientist of the Russian Federation and KBR, prof. Mikitaev A.K. 2017. pp. 162-167. (In Russ)]
20. S. Litvinov, A. Zhuravlev, S. Yazyev, S. Bajramukov. Forecasting the strength of an adhesive bond over a long period of time. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. Vol. 692. pp. 902-907.

Сведения об авторах:

Лапина Анастасия Павловна, ассистент кафедры «Строительство уникальных зданий и сооружений»; e-mail: nastya-11@yandex.ru

Зотов Иван Михайлович, аспирант кафедры «Соппротивление материалов»; e-mail: z-o-t-o-v@mail.ru

Чепурненко Антон Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Соппротивление материалов»; e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Языев Батыр Меретович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Соппротивление материалов»; e-mail: ps62@yandex.ru

Information about the authors:

Anastasia P. Lapina, Assistant, Department of Construction of Unique Buildings and Structures, e-mail: nastya-11@yandex.ru

Ivan M. Zotov, Post-graduate Student, Department of Resistance of Materials; e-mail: z-o-t-o-v@mail.ru

Anton S. Chepurnenko, Cand. Sci. (Technical), Assoc. Prof., Department Strength of Materials; e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Batyr M. Yazyev, Dr. Sci. (Technical), Prof., Prof., Department of Resistance of Materials, e-mail: ps62@yandex.ru

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 30.03.2020

Принята в печать 28.04.2020.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 30.03.2020.

Accepted for publication 28.04.2020.