Для цитирования: А.С. Личковаха, Б.А. Шемишур, С.А. Кузнецов. Исследование деформированного состояния и перемещений гибкого стержня с начальной кривизной. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020;47 (1):156-164. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-1-156-164

For citation: A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov. Study of the strain state and movements of a flexible rod with initial curvature. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2020; 47 (1):156-164. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-1-156-164

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

УДК 624. 016.5

DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-1-156-164

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ С НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ

А.С. Личковаха¹, Б.А. Шемишур¹, С.А. Кузнецов²

¹Ростовский государственный университет путей сообщения,
1344038, Ростов-на-Дону, пл. Ростовского Стрелкового Полка
Народного Ополчения, 2, Россия,

²Южно-Российский государственный политехнический университет
имени М.И. Платова,

² 346428, ул. Просвещения, 132, Новочеркасск, Россия

Резюме. Цель. Исследуется возможность получения регрессивной части упругой (регрессивно-прогрессивной) характеристики при осевом нагружении в начальный период, путем применения упругого стержня имеющего начальную кривизну, с приложением к нему вертикальной сжимающей нагрузки. Задачей настоящего исследования является определение статической характеристики такого стержня без учёта сил сопротивления. **Метод.** Для решения поставленной задачи за основу принята расчётная схема с прямолинейным упругим стержнем; используется метод эллиптических параметров и выполняется сравнение с решением, полученным с применением метода конечных элементов в ПК ANSYS. **Результат.** Разработана методика оценки деформированного состояния и перемещений гибкого стержня с начальной кривизной, позволяющая исследовать регрессивно – прогрессивную характеристику различных упругих систем имеющих начальную кривизну для их эффективного использования при определении колебаний. **Вывод.** Деформированное состояние упругого гибкого стержня имеющего начальную кривизну и перемещение точки приложения силы могут, определяется с помощью полученной методики. При этом, задавая различные исходные параметры гибкого стержня (с целью получения регрессивно-прогрессивной характеристики) можно получать значительные перемещения в докритической области, когда осевая нагрузка не превышает Эйлерову силу для данного гибкого стержня.

Ключевые слова: гибкий стержень, деформация, кривизна, Эйлерова сила

BUILDING AND ARCHITECTURE

STUDY OF THE STRAIN STATE AND MOVEMENTS OF A FLEXIBLE ROD
WITH INITIAL CURVATURE

A.S. Lichkovakha¹, B.A. Shemshura¹, S.A. Kuznetsov²

¹Rostov State Transport University,

^{1,2} pl. Rostov Rifle Regiment of the People's Militia, Rostov-on-Don 344038, Russia,

²M.I. Platov South Russian State Polytechnic University,

²132 St. Prosveshcheniya, Novocherkassk 346428, Russia

Abstract. Aim. The possibility of obtaining the regressive part of the elastic (regressive-progressive) characteristic under axial loading in the initial period is studied by applying an elastic rod having an initial curvature under vertical compressive load. The objective of the study is to determine the static characteristics of such a rod without taking the resistance forces into account. **Method.** To solve the problem, the elliptic parameters method was used to make a comparison with a solution obtained using the finite element method in the ANSYS engineering simulation software. **Results.** A technique was developed for assessing the strain state and displacements of a flexible rod with initial curvature in order to study the regression-progressive characteristic of various elastic systems having initial curvature for their effective use in determining oscillations. **Conclusion.** The obtained technique can be used to determine the deformed state of an elastic flexible rod having initial curvature and displacement of the point of application of force. At the same time, by setting various initial parameters of the flexible rod in order to obtain a regressive-progressive characteristic, significant displacements can be obtained in the subcritical region when the axial load does not exceed the Euler force for this flexible rod.

Keywords: flexible rod, deformation, curvature, Euler force

Введение. Колебания объектов можно значительно уменьшить при использовании упругих стержней большой гибкости с нелинейными характеристиками в различного рода демпфирующих устройствах [1,2]. Такие упругие стержни испытывают большие перемещения при работе материала в пределах упругости, в частности, при осевом нагружении в закритической области, когда осевая нагрузка превышает Эйлерову силу, однако в докритической области перемещения недостаточны для получения регрессивной характеристики.

Постановка задачи. В настоящей работе исследуется возможность получения регрессивной части упругой (регрессивно-прогрессивной) характеристики при осевом нагружении в начальный период, путем применения упругого стержня имеющего начальную кривизну, с приложением к нему вертикальной сжимающей нагрузки.

Задачей настоящего исследования является определение статической характеристики такого стержня без учёта сил сопротивления.

Для решения поставленной задачи за основу принята расчётная схема с прямолинейным упругим стержнем, используемая в работе [3]. Расчётная схема приведена на рис 1. Отличительной особенностью данной расчетной схемы является то, что гибкий стержень имеет начальную кривизну. Жёсткий стержень BA_0 одним концом шарнирно соединён со стержнем большой гибкости OA_0 и может поворачиваться вокруг неподвижного шарнира «В». Стержень OA_0 , имеющий форму тонкой полосы, соединён с неподвижным шарниром «О», находящимся на одной вертикали с шарниром «В».

На рис.1 показано:

- начальное положение системы OA_0B и статическое положение после приложения нагрузки OAB .
- δ – угол между неподвижной осью X и подвижной осью X' ,

- γ_0 – начальное положение поводка,
- $h = BA_0$ – длина поводка,
- $d = OA$ – расстояние между двумя неподвижными шарнирами,
- γ – угол отклонения поводка от вертикали, характеризующий положение статического равновесия при заданной силе тяжести G ,
- F – реакция упругого стержня.

Пунктиром показано первоначальное очертание гибкого стержня, формой которого является дуга окружности с начальной кривизной ρ ;

- f – максимальный прогиб начального очертания стержня;
- l – длина гибкого стержня или дуги OA .

Рис.1 Расчётная схема стержня, имеющего начальную кривизну
 Fig. 1 Design diagram of a bar having an initial curvature

Определим зависимость вертикальных перемещений шарнира «А» от нагрузки G , когда начальное положение стержня OA_0 прямолинейное.

Методы исследования. Для решения задачи используется метод эллиптических параметров [4,5] и выполняется сравнение с решением, полученным с применением метода конечных элементов в ПК ANSYS [6].

В положении статического равновесия зависимость между силой G и реакцией упругого стержня F имеет вид:

$$G = F(\cos \delta - \frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \gamma}), \quad (1)$$

Согласно методикам [7,8] значения эллиптических амплитуд в концевых точках упругого стержня равны: $\psi_o = \frac{\pi}{2}, \psi_A = \frac{3}{2}\pi$, а в точке сжатия эта амплитуда должна быть кратной $\pi/2$, то есть $\psi_c = \pi$.

Тогда силовой коэффициент β для рассматриваемой схемы равен

$$\beta = F(\psi_1) - F(\psi_o) = F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2}) = 2F(k), \quad (2)$$

Полный эллиптический интеграл первого рода [9] определяется по формуле:

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right), \quad (3)$$

где α – модулярный угол, связанный с модулем эллиптического интеграла зависимостью $k = \sin \alpha$.

Эллиптический модуль k , в свою очередь определяется из выражения:

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{l+b}{2l} \right)^2}, \quad (4)$$

Сила, сжимающая упругий стержень F , может быть определена, если известен силовой коэффициент подобия β , $\beta = l \sqrt{\frac{F}{H}}$, откуда

$$F = \frac{\beta^2 H}{l^2}. \quad (5)$$

Здесь $l = OA_o$, длина упругого стержня, H – его изгибная жёсткость.

Изгибающий момент в любом сечении гибкого стержня равен

$$M = \frac{2k \cdot \cos \psi}{\beta} F \cdot l \quad (6)$$

Здесь ψ – эллиптическая амплитуда в точке, где определяется изгибающий момент, H – изгибная жёсткость стержня.

Вертикальное перемещение точки приложения силы G определяется по формуле:

$$\lambda = h(|\cos \gamma_o| - |\cos \gamma|) \quad (7)$$

Таким образом, зная величину силы G (1) и вертикальное перемещение точки её приложения (7) может быть получена статическая характеристика для схемы, имеющей прямолинейный гибкий стержень.

Далее определим зависимость вертикального перемещения шарнира «А» от нагрузки G , когда стержень OA_o имеет начальную кривизну (рис. 1).

Если задаётся значение радиуса кривизны ρ (рис. 2), то значение максимального прогиба f определяется по формуле

$$f = 2\rho \sin^2 \frac{l}{4\rho}, \quad (8)$$

Длина хорды OA_o из определяется из выражения (9):

$$OA_0 = b = 2\rho \sin \frac{l}{2\rho}. \quad (9)$$

Рис. 2. К определению длины хорды
 Fig. 2. To determine the length of the chord

Для определения зависимости $G = f(\lambda)$ с учётом начальной кривизны стержня вначале вычисляется значение силы F_0 , которое необходимо для преобразования стержня из прямолинейной формы в криволинейную форму с заданными в начальных условиях размерами. Значение силы F_0 определяется из условия, что гибкий стержень изогнут по дуге окружности с радиусом кривизны ρ и максимальным прогибом f . Такая форма стержня является бесперегибной и максимальный прогиб $y' = f$ определяется [10] по формуле

$$y' = \frac{2l}{k\beta_o} [\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_c} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_o}] \quad (10)$$

Учитывая, что в начале координат эллиптическая амплитуда $\psi_o = \frac{\pi}{2}$, а в точке сжатия $\psi_c = \pi$, где прогиб имеет максимальное значение получим

$$\frac{f}{l} = \frac{2}{k\beta_o} (1 - \sqrt{1 - k^2}) \quad (11)$$

Тогда силовой коэффициент для первоначально изогнутого стержня равен

$$\beta_o = \frac{2l}{kf} (1 - \sqrt{1 - k^2}) \quad (12)$$

Величина силы для создания такого прогиба будет равна

$$F_o = \frac{\beta^2 H}{l^2} \quad (13)$$

Затем значение силы F , полученное из расчёта системы с прямолинейным стержнем, уменьшаются на величину F_o , определяемой по формуле (13). Далее, по формуле (1) определяется значение силы G , соответствующее назначенному положению равновесия с принятым значением длины хорды $OA=b$. Эйлерова критическая сила для рассматриваемого прямолинейного стержня определяется по формуле

$$F_3 = \frac{\pi^2 H}{l^2}. \quad (14)$$

Если стержень имеет первоначальную кривизну, то изначально он изгибается без учета Эйлеровой силы. Когда значение силы F , определяемое по формуле (5) будет меньше Эйлеро-

вой силы, т.е. $\pi < \beta$, то формула для вычисления нагрузки сжимающей стержень с первоначальной кривизной имеет вид:

$$G = (F - F_0) \left(\cos \delta - \frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \gamma} \right). \quad (15)$$

Когда значение силы F , определяемое по формуле (5) будет больше Эйлеровой силы, т.е. $\pi > \beta$, то формула для вычисления нагрузки сжимающей стержень с первоначальной кривизной будет иметь вид:

$$G = [(F - F_0) + (F - F_0)] \left(\cos \delta - \frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \gamma} \right). \quad (16)$$

Изгибающий момент в любом сечении гибкого стержня равен

$$M = \frac{2k \cdot \cos \psi}{\beta} F \cdot l - \frac{H}{\rho} \quad (17)$$

Пример. Для гибкого стержня с параметрами $EJ = 0,01076 \text{ Н/м}^2$, $l = 0,04042 \text{ м}$, $\rho = 1,369 \text{ м}$, $d = 0,32 \text{ м}$, $h = 0,09 \text{ м}$, $\gamma_0 = 153,84^\circ$. определить статическую характеристику $G = f(\lambda)$ (зависимость силы G от вертикального перемещения точки её приложения λ).

Решение. По формулам (8) и (9) вычисляются значения максимального прогиба f и хорды $OA=b$ в зависимости от радиуса кривизны гибкого стержня. Далее определяется модуль эллиптического интеграла k (4), силовой коэффициент β_0 (12), и сила F_0 (13).

Задавая длину хорды b посредством формул (4,3,2) определяем силу F , сжимающую упругий стержень до такого положения. С учетом геометрических параметров ($\gamma = \arccos(\frac{d^2 + h^2 - b^2}{2 \cdot d \cdot h})$) данной системы определяем величину силы G (15,16) и вертикальное перемещение точки её приложения λ (7).

Обсуждение результатов. На рис. 3 показан результат моделирования упругого гибкого стержня имеющего начальную кривизну с заданными геометрическими параметрами и условиями закрепления с помощью расчетного комплекса ANSYS.

В случае, представленном на рис.3 перемещение точки приложения силы определяется значением DMX (м) равным 0,156 м при нагрузке в 1 Н.

Рис.3. Модель схемы стержня, имеющего начальную кривизну
Fig. 3. Model of the circuit of the rod having the initial curvature

Рис. 4. Зависимости вертикального перемещения точки приложения силы G от величины этой силы (кривые равновесных состояний): 1 – кривая получена по представленному алгоритму. 2 – кривая получена с помощью ПК ANSYS
Fig. 4. Dependences of the vertical displacement of the point of application of force G on the magnitude of this force (equilibrium state curves): 1 - the curve is obtained according to the presented algorithm. 2 - the curve was obtained using the ANSYS PC

На рис. 4 показаны графические зависимости статических характеристик, полученные методом эллиптических параметров (кривая 1) и с использованием метода конечных элементов в ПК ANSYS (кривая 2).

Таким образом, деформированное состояние упругого гибкого стержня имеющего начальную кривизну и перемещение точки приложения силы могут, определяется с помощью полученной методики.

При этом, задавая различные исходные параметры гибкого стержня (с целью получения регрессивно-прогрессивной характеристики) можно получать значительные перемещения в докритической области, когда осевая нагрузка не превышает Эйлерову силу для данного гибкого стержня.

Вывод. Разработанная методика позволяет исследовать регрессивно – прогрессивную характеристику различных упругих систем имеющих начальную кривизну для их эффективно-го использования при определении колебаний.

Библиографический список:

1. Пат. № 2486065 Российская Федерация, МПК В 60G 11/04. Упругая подвеска с регрессивно-прогрессивной характеристикой / С.А. Кузнецов, В.Н. Семенов, Я.А. Лысенко, Ю.Ю. Олейничева. – Заявл. 15.02.2012; опубл. 27.06.2013, Бюл. № 18.
2. Пат. № 2521879 Российская Федерация, МПК В 60G 3/16. Упругая подвеска с регрессивно-прогрессивной характеристикой / В.Н. Семенов, С.А. Кузнецов, А.А. Галушкин. – Заявл. 13.12.2012; опубл. 10.07.2014, Бюл. № 19.
3. Личковаха, А.С. К определению энергетического баланса нелинейной упругой системы /А.С. Личковаха, Б.А. Шемшюра, С.А. Кузнецов // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения – 2018. –№2. – С. 137-143.
4. Попов, Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е.П. Попов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 296с.
5. Пономарёв, С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении /С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, В.И. Феодосьев. – М.: Mashgiz, 1956. – Т.1. – 886с
6. Басов, К. А. ANSYS для конструкторов / К. А. Басов – М. : ДМК Пресс, 2009. – 248 с.
7. Личковаха, А.С. Исследование деформации стержня большой гибкости при осевом нагружении /А.С. Личковаха, Б.А. Шемшюра, С.А. Кузнецов // Известия высших учебных заведений. Северо-кавказский регион. Технические науки. – 2016. – №3. – С. 71-76.
8. Личковаха, А.С., Исследование напряженно-деформированного состояния внецентренно сжатого стержня большой гибкости / А.С. Личковаха, Б.А. Шемшюра, С.А. Кузнецов // Инженерный вестник Дона, 2018. – № 1. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4773/.
9. Анфилофьев, А. В. Геометрическое представление эллиптических интегралов / А.В. Анфилофьев, В.М. Замятин // Известия Томского политехнического университета [Известия ТПУ]. – 2005. – Т. 308. – № 5. – С. 11-14.
10. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов /В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1973. – 400с.

References:

1. Pat. № 2486065 Rossiyskaya Federatsiya, MPK B 60G 11/04. Uprugaya podveska s regressivno-progressivnoy kharakteristikoy / S.A. Kuznetsov, V.N. Semenov, YA.A. Lysenko, YU.YU. Oleynicheva. – Zayavl. 15.02.2012; opubl. 27.06.2013, Byul. № 18. [Pat. No. 2486065 Russian Federation, IPC B 60 G 11/04. Elastic Suspension with Regressive-Progressive Characteristics / S.A. Kuznetsov, V.N. Semenov, Ya.A. Lysenko, Yu.Yu. Oleinicheva. - Appl. 15.02.2012; publ. 06.27.2013, Bul. № 18.
2. Pat. № 2521879 Rossiyskaya Federatsiya, MPK B 60G 3/16. Uprugaya podveska s regressivno-progressivnoy kharakteristikoy / V.N. Semenov, S.A. Kuznetsov, A.A. Galushkin. – Zayavl. 13.12.2012; opubl. 10.07.2014, Byul. № 19. [Pat. No. 2521879 Russian Federation, IPC B 60 G 3/16. Elastic suspension with a regressive-progressive characteristic / V.N. Semenov, S.A. Kuznetsov, A.A. Galushkin. - Appl. 13.12.2012; publ. 07.10.2014, Bul. № 19.
3. Lichkovakha, A.S. K opredeleniyu energeticheskogo balansa nelineynoy uprugoy sistemy /A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya – 2018. –№2. – S. 137-143. [Lichkovakha, A.S. On the definition of the energy balance of a nonlinear elastic system / A.C. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // Bulletin of the Rostov State University of Communications - 2018. №2. pp. 137-143.
4. Popov, Ye.P. Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhney / Ye.P. Popov. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. – 296s. [Popov, E.P. Theory and calculation of flexible elastic rods / E.П. Popov. - M.: Science, Ch. Ed. fiz.-mat. lit., 1986. P. 296.
5. Ponomarev, S.D. Raschoty na prochnost' v mashinostroyenii /S.D. Ponomarev, V.L. Biderman, V.I. Feodos'yev. – M.: Mashgiz, 1956. – Т.1. – 886s [Ponomarev, S.D. Calculations on strength in mechanical engineering / S.D. Ponomarev, V.L. Biderman, V.I. Feodosiev - M.: Mashgiz, 1956. Vol.1 P. 886.
6. Basov, K. A. ANSYS dlya konstruktorov / K. A. Basov – M. : DMK Press, 2009. – 248 c. [Basov, K. A. ANSYS for designers / K. A. Basov - M.: DMK Press, 2009. 248 p.
7. Lichkovakha, A.S. Issledovaniye deformatsii sterzhnya bol'shoi gibkosti pri osevom nagruzhении /A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-kavkazskiy region. Tekhnicheskiye nauki. – 2016. – №3. – S. 71-76. [Lichkovakha, A.S. Investigation of deformation of a rod of great flexibility under axial loading / A.C. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // News of Higher Educational Establishments. North-Caucasian region. Technical science. 2016. № 3. pp. 71-76.
8. Lichkovakha, A.S., Issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya vnetsentrenno szhatogo sterzhnya bol'shoi gibkosti / A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // Inzhenernyy vestnik Dona, 2018. – № 1. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4773/. [Lichkovakha, A.S. Investigation of the stress-strain state of an extra-centrally compressed rod of great flexibility / A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov // Engineering Bulletin of the Don, 2018. - № 1. - URL: ivdon.ru/en/magazine/archive/n1y2018/4773/.

9. Anfilof'yev, A. V. Geometricheskoye predstavleniye ellipticheskikh integralov / A.V. Anfilof'yev, V.M. Zamyatin // Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta [Izvestiya TPU]. – 2005. – Т. 308. – № 5. – С. 11-14. [Anfilofiev, A.V. Geometric representation of elliptic integrals / AV Anfilofiev, VM Zamyatin // Proceedings of Tomsk Polytechnic University [Izvestiya TPU]. - 2005. Vol 308. No5. pp. 11-14.
10. Feodos'yev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov /V.I. Feodos'yev. – М.: Nauka, 1973. – 400s. [Feodosiev, V.I. Selected problems and questions on the resistance of materials / V.I. Theodosiev. - М.: Science, 1973. P. 400.

Сведения об авторах:

Личковаха Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, доцент; кафедра «Строительная механика»; e-mail: lichkovaha@yandex.ru

Шемшюра Борис Андреевич, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Строительная механика»; e-mail: stroi_meh@rgups.ru

Кузнецов Сергей Анатольевич, доктор технических наук, профессор, кафедра «Общеинженерные дисциплины», e-mail: sergey-kuznecov-57@mail.ru

Information about the authors:

Andrey S. Lichkovakha, Cand. Sci. (Technical), Assoc. Prof., Department of Building Mechanics; e-mail: lichkovaha@yandex.ru

Boris A. Shemshura, Cand. Sci. (Technical), Assoc. Prof., Department of Construction Mechanics; e-mail: stroi_meh@rgups.ru

Sergey A. Kuznetsov, Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of General Engineering Disciplines, e-mail: sergey-kuznecov-57@mail.ru

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 07.02.2020.

Принята в печать 02.03.2020.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 07.02.2020.

Accepted for publication 02.03.2020.