Для цитирования: Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Исследование несущей способности железобетонных плит с трещинами после их усиления композитными тканями методом конечных элементов с помощью вычислительного комплекса ПРИНС. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018; 45 (4): 142-152. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-4-142-152

For citation: Agapov V.P., Aydemirov K.R. Investigation of the carrying capacity of reinforced concrete slabs with cracks after their reinforcement with composite fabrics by the finite element method using the PRINS computer complex. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2018; 45 (4): 142-152. (in Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-4-142-152

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

УДК: 539.3

DOI: 10.21822/2073-6185-2018-45-4-142-152

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ С ТРЕЩИНАМИ ПОСЛЕ ИХ УСИЛЕНИЯ КОМПОЗИТНЫМИ ТКАНЯМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА ПРИНС

Агапов В.П.¹, Айдемиров К.Р.²

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,

¹129337, г.Москва, Ярославское шоссе, д. 26, Россия,

²Дагестанский государственный технический университет,

²367026, г. Махачкала, пр.И.Шамиля, 70, Россия,

¹e-mail: agapovpb@mail.ru, ²e-mail: kyrayd@mail.ru

Резюме. Цель. Рассматривается конечно-элементная методика расчета железобетонных плит с трещинами после их усиления композитными тканями с целью определения остаточного запаса прочности. **Метод.** Методика основана на использовании алгоритмов расчета конструкций с учетом геометрической и физической нелинейности, реализованных в программе ПРИНС. Эти алгоритмы предполагают использование одной и той же расчетной схемы в процессе решения задачи. Однако специфика поставленной проблемы заключается в том, что расчетная схема конструкции до появления в ней дефектов и после усиления ее с помощью композитных материалов должна изменяться. **Результат.** С учетом этого обстоятельства алгоритмы нелинейного расчета конструкций по программе ПРИНС были дополнены опцией, позволяющей в процессе сквозного расчета менять параметры расчетной схемы. Для исследования несущей способности железобетонных плит используются многослойные конечные элементы, для каждого из которых задан определенный пакет материалов. Модернизация расчетной схемы в данном случае сводится к замене одного пакета материалов на другой. Приводится пример расчета плиты с трещиной, усиленной композитной тканью. **Вывод.** Показано, что использование перестраиваемой расчетной схемы позволяет существенно повысить точность расчетов. При этом конечный результат зависит от того, на какой стадии формирования дефектов в плите осуществляется ее усиление. В расчетах использованы специальные многослойные конечные элементы четырехугольной формы. Элементы состоят из четырех простейших треугольников, для которых большая часть матричных характеристик вычисляется в замкнутом виде. Это особенно важно при проведении нелинейных расчетов, требующих многократного перевычисления этих характеристик.

Ключевые слова: строительные сооружения; плиты, метод конечных элементов; нелинейность; несущая способность; программное обеспечение

BUILDING AND ARCHITECTURE

INVESTIGATION OF THE CARRYING CAPACITY OF REINFORCED CONCRETE SLABS WITH CRACKS AFTER THEIR REINFORCEMENT WITH COMPOSITE FABRICS BY THE FINITE ELEMENT METHOD USING THE PRINS COMPUTER COMPLEX

Vladimir P. Agapov¹, Kurban R. Aydemirov²

¹National Research Moscow State University of Civil Engineering,

¹129337, Moscow, Yaroslavl highway, 26,

²Dagestan State Technical University,

²367026, Makhachkala, 70 Shamil Ave., Russia,

¹e-mail: agapovpb@mail.ru, ²e-mail: kyrayd@mail.ru

Abstract. Objectives. The finite element method for cracked reinforced concrete slabs analysis after they were reinforced with composite fabrics in order to determine the residual safety factor is considered. **Method.** The method is based on the use of algorithms for calculating of structures with the account of the geometrical and physical nonlinearities, implemented in the PRINS program. These algorithms assume the use of the same calculation scheme in the process of the problem solving. However, the specifics of the assigned problem is that the design scheme of the structure before the appearance of defects in it and after its amplification with the help of composite materials should change. **Result.** Taking into account this circumstance, the algorithms of nonlinear calculation of structures under the PRINS program were supplemented with an option that allows changing the parameters of the design scheme in the process of through calculation. To study the bearing capacity of reinforced concrete slabs, multilayer finite elements are used, for each of which a specific package of materials is specified. Modernization of the design scheme in this case comes down to replacing one package of materials with another. An example of calculation of a slab with a crack reinforced with composite fabric is given. **Conclusion.** It is shown that the use of a tunable design scheme can significantly improve the accuracy of calculations. In this case, the final result depends on what stage of the formation of defects in the slab its strengthening is realized. The special multilayered finite elements of a quadrangular shape are used in calculations. The elements consist of four simple triangles, for which most of the matrix characteristics are calculated in a closed form. This is especially important when carrying out nonlinear calculations that require repeated computations of these characteristics.

Keywords: building structures; plates; finite element method; nonlinearities; load-bearing capacity; software

Введение. Усиление железобетонных конструкций рекомендуется проводить при несоответствии фактической несущей способности требованиям действующих нормативных документов, при наличии дефектов и повреждений, при снижении несущей способности с повышением внешней нагрузки, при появлении механических повреждений, образовании трещин в растянутых элементах и защитном слое бетона конструкций, а также с целью компенсации недостаточной толщины защитного слоя.

Для усиления рекомендуется использовать композиционные материалы, создаваемые непосредственно на ремонтируемом объекте из лент, холстов и тканей, втапливаемых в слой эпоксидного клея, свойства которых определяются типом применяемого в ткани углеродистого волокна. Усиление, проведенное таким образом, позволяет восстановить работоспособное состояние конструкций, повысить несущую способность и долговечность сооружения или его конструктивных частей и элементов.

Постановка задачи. Современные технологии усиления конструкций композитными материалами, в том числе тканями на основе углеродных волокон, позволяют проводить ремонт

железобетонных конструкций при возникновении дефектов без демонтажа как конструкций в целом, так и отдельных их элементов [1-6]. Это позволяет сократить сроки проведения ремонтов и снизить их стоимость.

Однако при этом возникает проблема выбора необходимого материала для ремонта и оценки запаса прочности при дальнейшей эксплуатации конструкции. Рекомендации по ремонту и усилению железобетонных конструкций, разработанные различными ведомствами (например, [6]), основаны, главным образом, на экспериментальных сведениях о работе подобных конструкций и не предполагают точного анализа их напряженно-деформированного состояния.

Проблема может быть решена с помощью компьютерных программ, в которых реализованы методы расчета конструкций с учетом нелинейности деформирования [7-9].

Однако алгоритмы, используемые в подобных программах, как правило, не учитывают особенностей задачи, связанной с усилением и последующим определением коэффициента запаса прочности конструкции, и поэтому необходимо развитие этих алгоритмов [10-12]. Основная особенность сформулированной выше задачи заключается в том, что расчет конструкции после ее усиления должен выполняться при изменении расчетной схемы, но с учетом накопленного к моменту ремонта напряженно-деформированного состояния. Данная работа посвящена развитию методики нелинейного расчета конструкций методом конечных элементов с учетом этой особенности и адаптации ее к программному комплексу ПРИНС [13].

Методы исследования. Программа ПРИНС позволяет определять несущую способность железобетонных плит, доводя их до разрушения шаговым методом на математической модели и определяя возможные дефекты в виде трещин в бетоне и пластических деформаций в арматуре. Для этого на каждом шаге нагружения составляется система нелинейных алгебраических уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние конструкции [14]:

$$[K_{NL_0} + K_{\sigma} + K_{NL_1} + K_{NL_2}]\{\Delta u\} = \{\Delta P\}, \quad (1)$$

где $[K_{NL_0}]$, $[K_{NL_1}]$, $[K_{NL_2}]$ – матрицы жесткости нулевого, первого и второго порядков, соответственно; $[K_{\sigma}]$ – матрица начальных напряжений; $\{\Delta u\}$ и $\{\Delta P\}$ – векторы приращений узловых перемещений и нагрузок, соответственно.

Матрицы $[K_{NL_1}]$ и $[K_{NL_2}]$ зависят от перемещений текущего шага нагружения в первой и второй степени, соответственно. Эта зависимость получена в работе [14] в явном виде. Матрица $[K_{NL_0}]$, чьи элементы определяются свойствами материала, также зависит от величины шаговых перемещений, но получить эту зависимость в явном виде не удастся.

Эта матрица может быть найдена в начале шага по нагрузке с учетом физических свойств материала в рассматриваемый момент времени, и при тех же предпосылках в конце шага. Обозначим эти матрицы K_0 и K_1 , соответственно.

Так как свойства материала на шаге нагружения меняются, матрица $[K_{NL_0}]$ может быть найдена приближенно как полусумма матриц K_0 и K_1 . Таким образом, $K_{NL_0} = \frac{1}{2}(K_0 + K_1)$. Матрица $[K_{NL_0}]$ с другой стороны может быть представлена в виде

$$K = K_0 + \Delta K. \quad (2)$$

Из приведенных выше соотношений следует, что $\Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}(K_0 + K_1) - K_0 = \frac{1}{2}(K_1 - K_0)$.

С учетом формулы (2) уравнение (1) принимает вид:

$$[K_0 + \Delta K + K_{\sigma} + K_{NL_1} + K_{NL_2}]\{\Delta u\} = \{\Delta P\}, \quad (3)$$

Уравнение (3) решается в программе ПРИНС итерационным методом, который можно назвать квази-ньютоновским, поскольку, в отличие от ньютоновских методов матрица жесткости вычисляется на каждой итерации, но обращается только ее линеаризованная часть, равная $K_0 + K_\sigma$. Это делается только один раз в начале шага. Уравнение (3) записывается в форме

$$[K_0 + K_\sigma]_j \{\Delta u\}_j^{(i)} = \{\Delta P\}_j - [\Delta K + K_{NL_1} + K_{NL_2}]_j^{(i-1)} \{\Delta u\}_j^{(i-1)}, \quad (4)$$

где j – номер шага нагружения, i – номер итерации на данном шаге. Приращения напряжений на каждом шаге нагружения вычисляются по формуле

$$\Delta \sigma = C_{ep} \Delta \varepsilon. \quad (5)$$

где C_{ep} – упруго-пластическая матрица характеристик материала. Техника вычисления этой матрицы применительно к конкретному виду конечных элементов и используемого материала описана в различных работах (см., например [15-16]), в том числе в работах авторов [17-19].

Полные значения перемещений и напряжений находятся в конце шага нагружения по формулам:

$$u = u_0 + \Delta u; \quad \sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma. \quad (6)$$

Расчеты железобетонных плит проводятся в программе ПРИНС с использованием многослойных конечных элементов, при этом арматура заменяется слоем эквивалентной толщины с однонаправленными свойствами материала. При расчетах с учетом физической нелинейности напряжения в слоях корректируются в соответствии с заданными диаграммами деформирования материалов. Это приводит к нарушению условий равновесия, поэтому после окончания итераций по уравнению (4) вычисляется невязка как разность между полным вектором внешних сил и узловым эквивалентом внутренних напряжений и осуществляется их уравнивание с помощью следующего уравнения:

$$K_j^i \Delta u_j^i = P_j - F_j^{i-1} \quad (7)$$

где K – линеаризованная матрица жесткости, Δu – вектор узловых перемещений, P – вектор внешних узловых сил, F – вектор узловых сил, статически эквивалентный внутренним напряжениям, j – номер шага, i – номер итерации на шаге.

Алгоритм, реализованный в программе ПРИНС, предполагает выполнение расчета с использованием одной и той же расчетной схемы.

Это означает либо расчет по исходной расчетной схеме без усиления, либо расчет изначально усиленной конструкции. И то, и другое не отвечает поставленной задаче. Поэтому алгоритм был модифицирован таким образом, что на начальных этапах нагружения расчет проводится по первоначальной расчетной схеме вплоть до возникновения повреждений, затем расчетная схема автоматически перестраивается, вводятся усиления и дальнейший расчет проводится по новой расчетной схеме вплоть до разрушения конструкции.

Формально перестройка расчетной схемы заключается в замене одного, исходного пакета материалов, на другой, усиленный. Можно предположить, что при одном и том же усилении окончательная несущая способность сооружения будет зависеть от того, на каком этапе возникновения и развития повреждений будет произведен ремонт конструкции. Для расчета железобетонных плит в программе ПРИНС используется семейство многослойных конечных элементов.

В основе семейства лежит простейший треугольный элемент, показанный на рис.1. Местная система координат для него показана на рис.1,а и 1,б, причем на рис. 1,а показан вид элемента в плане, а на рис. 1,б – его поперечное сечение. Координатная плоскость XU совмещается со срединной поверхностью базового слоя.

Если обозначить перемещения точек срединной поверхности базового слоя как $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$, то, на основании гипотезы прямой нормали, перемещения точек произвольного слоя будут равны:

$$\left. \begin{aligned} u_l &= \hat{u} + \beta z \\ v_l &= \hat{v} - \alpha z \\ w_l &= \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В формулах (8) α и β - повороты нормали к срединной поверхности базового слоя вокруг осей X и Y соответственно.

Аппроксимирующие функции для мембранных $(\hat{u}, \hat{v})$ и изгибных $\hat{w}$ перемещений точек срединной поверхности базового слоя задаются в виде

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y^2; \\ \hat{v} &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\hat{w} = q_1 + q_2 x + q_3 y + q_4 x^2 + q_5 xy + q_6 y^2 + q_7 x^3 + q_8 xy^2 + q_9 y^3. \quad (10)$$

С использованием функций перемещений (9) и (10) по формулам, приведенным в работе [14,] вычисляются все матрицы, входящие в уравнение (4).

Рис.1. Топология простейшего треугольного конечного элемента

Fig.1. Topology of the simplest triangular finite element

На основе базового треугольного элемента, обладающего известными недостатками [14], построены усовершенствованные треугольные и четырехугольные многослойные конечные элементы. Усовершенствование осуществлялось созданием комбинированных конечных элементов. Треугольный элемент строился по схеме, изображенной на рис.2. Для каждого из трех базовых треугольных элементов 1, 2 и 3, названных субтреугольниками, выбиралась своя местная система координат xu, x_2y_2, x_3y_3 , в этих системах формировались все необходимые матричные характеристики, которые затем приводились к общей для всего составного элемента системе координат xu и усреднялись.

Рис.2. Усовершенствованный треугольный конечный элемент
Fig.2. Advanced triangular finite element

По аналогичной схеме (рис.3) строился усовершенствованный четырехугольный элемент.

Fig. 3. Improved quadrilateral finite element

Тестирование и сопоставительный анализ описанных выше конечных элементов с известными элементами [14,20] показали высокую точность получаемых с их помощью результатов при сравнительной простоте всех формулировок.

Обсуждение результатов. Для проверки усовершенствованного алгоритма расчета по программе ПРИНС было произведено исследование железобетонной плиты с целью определения ее несущей способности в исходном варианте (рис.4), в изначально усиленном варианте (рис.5) и при усилении плиты на разных этапах возникновения повреждений.

Рис.4. Железобетонная плита в исходном варианте
Fig.4. Reinforced concrete slab in the original version

Конфигурация плиты, сильно вытянутой в одном направлении и шарнирно-опертой вдоль коротких сторон, выбрана с целью проверки достоверности получаемых результатов. По толщине плита разбивалась на 29 слоев. Слои 1, 12 и 29 имеют нулевую толщину. Слой 12 является базовым, а слои 1 и 29 – фиктивными. Фиктивные слои вводятся для получения возможности визуализации напряжений на нижней и верхней поверхностях в постпроцессоре. Характеристики слоев для исходной и усиленной конструкций приведены в табл.1 и 2, соответственно.

Рис.5. Усиленная железобетонная плита

Fig.5. Reinforced reinforced concrete slab

Таблица 1. Характеристики слоев пакета 1

Table 1. Layer 1 Layer Characteristics

Номера слоев Numbers layers	Толщины (см) Thickness (cm)	Материалы Materials	Модули упругости (кПа) Modules elasticity (kPa)
2-11	7	Бетон Concrete	$2,75 \times 10^7$
13-22	6,25	Бетон Concrete	$2,75 \times 10^7$
23	0,21	Сталь Steel	$2,00 \times 10^8$
24-25	3,5	Бетон Concrete	$2,75 \times 10^7$
26-28	0,0	Бетон Concrete	$2,75 \times 10^7$

Таблица 2. Характеристики слоев пакета 2

Table 2. Layer 2 Layer Characteristics

Номера слоев Numbers layers	Толщины (см) Thickness (cm)	Материалы Materials	Модули упругости (кПа) Modules elasticity (kPa)
2-11	7	Бетон Concrete	$2,75 \times 10^7$
13-22	6,25	Бетон Concrete	$2,75 \times 10^7$
23	0,21	Сталь Steel	$2,00 \times 10^8$
24-25	3,5	Бетон Concrete	$2,75 \times 10^7$
26-28	0,1	Композитная ткань Compo- site the cloth	$6,3 \times 10^7$

Основные результаты расчета приведены на рис.6-8.

Рис.6. Трещины на нижней поверхности при нагрузке $q = 52,6$ кПа .
 Fig.6. Cracks on the bottom surface under load.

Рис.7. Кривая равновесных состояний для исходной конструкции
 Fig.7. Equilibrium state curve for the initial construction

Рис.8. Изгибающие моменты в плите при $q = 52,6$ кПа (показана половина плиты)
 Fig.8. Bending moments in the slab with (shown half of the slab)

На втором этапе проводился расчет плиты, изначально усиленной тремя слоями композитной ткани, свойства которой приведены в табл.2. Предельное состояние при этом было достигнуто при нагрузке $q = 116,2$ кПа.

Дальнейшие исследования проводились с целью установить, как будет изменяться предельная нагрузка при усилении плиты на разных стадиях возникновения и развития повреждений.

Были проведены расчеты при трех вариантах усиления плиты: 1) сразу после возникновения первых трещин при нагрузке $q = 30$ кПа ; 2) в состоянии, предшествующем разрушению при $q = 50$ кПа и 3) в промежуточном состоянии при $q = 40$ кПа . Результаты расчетов представлены в табл.3.

Таблица 3. Предельные нагрузки при усилении плиты на разных этапах возникновения повреждений

Table 3. Ultimate loads during plate reinforcement at different stages of damage

Нагрузки до усиления, кПа Load to gain, kPa	0	30	40	50
Предельные нагрузки, кПа Maximum loads, kPa	116,2	112,7	102,2	95,8
Отклонение предельных нагрузок от максимального значения, % Deviation of maximum loads from the maximum value, %	-	3,00	12,0	17,6

Вывод. Из табл.3 видно, что при одном и том же усилении предельные нагрузки для плиты изменяются в зависимости от того, на каком этапе возникновения повреждений это усиление осуществляется. Изменения могут быть значительными, достигать десятков процентов.

Таким образом, программа ПРИНС позволяет дать количественную оценку результатам усиления железобетонных плит с помощью композитных тканей. Применение программы ПРИНС на практике позволит конструкторам более обоснованно выбирать материал для ремонта и получать более достоверные оценки несущей способности усиленных конструкций.

Библиографический список:

1. Кальянова Е.Е. Новые инновационные технологии: преимущества продуктов Sika // Строительство. - № 8, 2014, - С.54-58.
2. FRP Repair Materials and Methods. Concrete International - 2005, vol. 27, №1. - P. 66.
3. Cardolin A. Carbon Fibre Reinforced Polymers for Strengthening of Structural Elements.- Division of Structural Engineering, Department of Civil and Mining Engineering, Lulea University of Technology, Sweden. 2003. 194 p.
4. Чернявский В. Л. Аксельрод Е. З. Применение углепластиков для усиления железобетонных конструкций промышленных зданий // Промышленное и гражданское строительство. 2004, № 3. С. 37-38.
5. Рекомендации по применению тканевых композиционных материалов при ремонте железобетонных конструкций мостовых сооружений. Федеральное Дорожное Агентство (Росавтодор). Москва, 2013. 55 с.
6. Руководство по усилению железобетонных конструкций композитными материалами. НИИЖБ., М., 2012. 48 с.
7. MSC NASTRAN 2016. Nonlinear User's Guide. SOL 400. MSC Software Corporation. 2016. 790 p.
8. Басов К.А. ANSYS. Справочник пользователя. - Изд-во "ДМК-Пресс". М., 2005. 637 с.
9. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia. 2011.
10. Nabil F. Grace, S.B. Singh. Durability Evaluation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthened Concrete Beams: Experimental Study and Design // ACI Structural Journal. - January-February, 2005. pp. 40-53.
11. Бокарев С.А., Смердов Д.Н. Нелинейный анализ железобетонных изгибаемых конструкций, усиленных композиционными материалами // Вестник ТГАСУ. 2010, № 2. С. 113-125.
12. L. Cedolin and S. Deipoli. Finite element studies of shear-critical R/C beams // ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division. - Vol. 103, No. EM3, June 1977. pp.395-410.
13. Агапов В.П. Статические и динамические расчеты инженерных конструкций в вычислительном комплексе ПРИНС // Машиностроение и инженерное образование. №1 (6), Изд. МГИУ. М., 2006.
14. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. Изд-во АСВ, М., 2005. 245 с.

15. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p.
16. D.R.J.Owen, J.A.Figueiras and F.Damjanic. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 41, 1983. pp. 323-366.
17. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Расчет железобетонных ферм методом конечных элементов с учетом физической нелинейности. Часть 1// Научное обозрение, 2016, № 2, с.31-34.
18. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Расчет железобетонных ферм методом конечных элементов с учетом физической нелинейности. Часть 2// Научное обозрение, 2016, № 3, с.22-27.
19. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство, 2016, № 11, с.4-8.
20. Agapov V., Golovanov R. Comparative analysis of the simplest finite elements of plates in bending//Murgul V., Popovic Z. (eds) International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 692. Springer, Cham. Pp. 1009-1026. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-70987-1_109

References:

1. Kal'yanova Ye.Ye. Novyye innovatsionnyye tekhnologii: preimushchestva produktov Sika // Stroitel'stvo. - № 8, 2014, - S.54-58. [Kalyanova E.E. New innovative technologies: the benefits of Sika products // Construction. - № 8, 2014, - pp.54-58. (In Russ.)]
2. FRP Repair Materials and Methods. Concrete International - 2005, vol. 27, №1. - P. 66.
3. Cardin A. Carbon Fiber Reinforced Polymers for Structural Elements. Department of Civil and Mining Engineering, Lulea University of Technology, Sweden. 2003. 194 p.
4. Chernyavskiy V. L. Aksel'rod Ye. Z. Primeneniye ugleplastikov dlya usileniya zhelezobetonnykh konstruktsiy promyshlennykh zdaniy // Promyshlennoye i grazhdanskoyestroitel'stvo.- 2004, № 3.- S. 37-38. [Chernyavsky V. L. Axelrod E.Z. Use of carbon plastics for strengthening reinforced concrete structures of industrial buildings // Industrial and Civil Construction. 2004, No. 3. P. 37-38. (In Russ.)]
5. Rekomendatsii po primeneniyu tkanevykh kom-pozitsionnykh materialov pri remonte zhelezo-betonnykh konstruktsiy mostovykh sooruzheniy.-Federal'noye Dorozhnoye Agentstvo (Rosavtodor).- Moskva, 2013. 55 s. [Recommendations for the use of fabric composite materials in the repair of reinforced concrete structures of bridge structures. Federal Road Agency (Rosavtodor). Moscow, 2013. 55 p. (In Russ.)]
6. Rukovodstvo po usileniyu zhelezobetonnykh konstruktsiy kompozitnymi materialami. NIIZHB., - M., 2012. – 48 s. [Guidelines for strengthening reinforced concrete structures with composite materials. NIIZHB., M., 2012. 48 p. (In Russ.)]
7. MSC NASTRAN 2016. Nonlinear User's Guide. SOL 400. MSC Software Corporation. 2016. 790 p.
8. Basov K.A. ANSYS. Spravochnik pol'zovatelya. - Izd-vo "DMK-Press". M., 2005. 637 s. [Basov K.A. ANSYS. User reference. - Publishing house "DMK-Press". M., 2005. 637 p. (In Russ.)]
9. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia. 2011
10. Nabil F. Grace, S.B. Singh. Fiber-Reinforced Polymer Strengthening Concrete Beams: Experimental Study and Design // ACI Structural Journal. - January-February, 2005. pp. 40-53.
11. Bokarev S.A., Smerdov D.N. Nelineynyy analiz zhelezobetonnykh izgibayemykh konstruktsiy, usilennykh kompozitsionnymi materialami // Vestnik TGASU.- 2010, № 2.- S. 113-125. [Bokarev S.A., Smerdov D.N. Nonlinear analysis of reinforced concrete bent structures reinforced with composite materials. Vestnik TGASU. 2010, No. 2. P. 113-125. (In Russ.)]
12. L. Cedolin and S. Deipoli. Finite element studies of shear-critical / Cbeams // ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division. - Vol. 103, No. EM3, June 1977. pp.395-410.
13. Agapov V.P. Sticheskiye i dinamicheskiye ras-chety inzhenernykh konstruktsiy v vychislitel'nom komplekse PRINS// Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye. - №1 (6), Izd. MGIU. – M., 2006. [Agapov V.P. Static and dynamic calculations of engineering structures in the PRINS computer complex // Mechanical Engineering and Engineering Education. №1 (6), Ed. MGIU. M, 2006. (In Russ.)]
14. Agapov V.P. Metod konechnykh elementov v sta-tike, dinamike i ustoychivosti konstruktsiy.- Izd-vo ASV, M., 2005.- 245 s. [Agapov V.P. The finite element method in statics, dynamics and stability of structures. Publishing house DIA, M., 2005. 245 p. (In Russ.)]
15. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p.
16. D.R.J.Owen, J.A.Figueiras and F.Damjanic. Finite element analysis of reinforced concrete and prestressed concrete structures including thermal loading // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 41, 1983. pp. 323-366.
17. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Raschet zhelezobetonnykh ferm metodom konechnykh elementov s ucheto-m fizicheskoy nelineynosti. Chast' 1// Nauchnoye obozreniye, 2016, № 2, s.31-34. [Agapov V.P., Aydemirov, K.R. Calculation of reinforced concrete trusses by the finite element method taking into account physical nonlinearity. Part 1 // Scientific Review, 2016, № 2, pp. 31-34. (In Russ.)]

18. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Raschet zhelezobetonnykh ferm metodom konechnykh elementov s uche-tom fizicheskoy nelineynosti. Chast' 2 // Nauchnoye obozreniye, 2016, № 3, s.22-27. [Agapov V.P., Aydemirov, K.R. Calculation of reinforced concrete trusses by the finite element method taking into account physical nonlinearity. Part 2 // Scientific Review, 2016, № 3, pp. 22-27. (In Russ.)]
19. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Raschet ferm me-todom konechnykh elementov s uchetom geometricheskoy nelineynosti // Promyshlennoye i grazhdan-skoye stroitel'stvo, 2016, № 11, s.4-8. [Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of farms by the finite element method taking into account the geometric nonlinearity // Industrial and civil construction, 2016, No. 11, p.4-8. (In Russ.)]
20. Agapov V., Golovanov R. Comparative analysis of the plates in bending // Murgul V., Popovic Z. (eds) EMMFT 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 692. Springer, Cham. Pp. 1009-1026. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-70987-1_109

Сведения об авторах:

Агапов Владимир Павлович - доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики и математики.

Айдемиров Курбан Рабаданович - кандидат технических наук, доцент, кафедра сопротивления материалов и строительной механики.

Information about authors:

Vladimir P. Agapov - Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of Applied Mechanics and Mathematics.

Kurban R. Aydemirov – Cand. Sci.(Technical), Assoc.Prof., Department of material resistance and structural mechanics.

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 14.09.2018.

Принята в печать 23.11.2018.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 14.09.2018.

Accepted for publication 23.11.2018.