

**Для цитирования:** Ратманова О.В., Шляхин Д.А. Подбор геометрических характеристик для круглых многослойных пьезокерамических пластин. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018; 45(3): 18-28. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-18-28

**For citation:** Ratmanova O.V., Shlyakhin D.A. The selection of geometric characteristics for circular multi-layered piezoelectric plates. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2018; 45 (3): 18-28. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-18-28

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.21822/2073-6185-2018-45-3-18-28

### ПОДБОР ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ КРУГЛЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

*Ратманова О.В.<sup>2</sup>, Шляхин Д.А.<sup>1</sup>*

Самарский государственный технический университет,  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Россия,

<sup>1</sup>e-mail: [d-612-mit2009@yandex.ru](mailto:d-612-mit2009@yandex.ru), <sup>2</sup>e-mail: [olesya654@yandex.ru](mailto:olesya654@yandex.ru)

**Резюме. Цель.** Для наиболее эффективного преобразования электрической энергии в механические колебания возникает необходимость углубленного анализа связанности физических полей различной природы в многослойных конструкциях. **Метод.** Решение осуществляется методом конечных интегральных преобразований, используя последовательно преобразование Фурье–Бесселя по радиальной координате  $r$  и обобщенное преобразование по аксиальной переменной  $z$ . При этом каждый раз предварительно выполняется процедура стандартизации (приведение граничных условий к виду, позволяющему применить соответствующее преобразование). **Результат.** Разработана математическая модель расчета биморфных пластин. Рассмотрены многослойные сплошные жестко и шарнирно закрепленные конструкции, в работе которых используется принцип обратного пьезоэффекта. Построены замкнутые решения нестационарных осесимметричных задач теории электроупругости для многослойных конструкций методом конечных интегральных преобразований. На основании анализа численных результатов расчета, представлены практические рекомендации по проектированию пьезокерамических преобразователей резонансного и нерезонансного классов. Разработан алгоритм оптимизации работы рассматриваемых конструкций путем подбора их геометрических размеров и используемого материала, позволяющий наиболее эффективно преобразовать приложенную электрическую нагрузку в механические перемещения. **Вывод.** Представленные результаты дают возможность уточнить допущения о характере распределения электрического поля, которые необходимо использовать при проектировании биморфных конструкций других конфигураций, расчет которых возможен только с помощью прикладных теорий для тонких пластин.

**Ключевые слова:** биморфная пьезокерамическая пластина, нестационарная осесимметричная задача, конечные интегральные преобразования

PHYSICAL-MATEMATICAL SCIENCE  
MECHANICS

THE SELECTION OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS FOR CIRCULAR MULTI-LAYERED PIEZOELECTRIC PLATES

Olesya V. Ratmanova<sup>2</sup>, Dmitiy A. Shlyakhin<sup>1</sup>

State Technical University,

244 Molodogvardeyskaya Str., Samara 443100, Russia,

<sup>1</sup>e-mail: [d-612-mit2009@yandex.ru](mailto:d-612-mit2009@yandex.ru), <sup>2</sup>e-mail: [olesya654@yandex.ru](mailto:olesya654@yandex.ru)

**Abstract Objectives** For the most efficient conversion of electrical energy into mechanical vibrations, there is a need for an in-depth analysis of the connectivity of physical fields of different nature in multilayer structures. **Method.** The solution is carried out by the method of finite integral transforms, using successively the Fourier – Bessel transform along the radial coordinate and the generalized transform along the axial variable. In this case, each time the standardization procedure is preliminarily performed (reduction of the boundary conditions to a form, which allows to apply the corresponding transformation). **Result.** A mathematical model for the calculation of bimorphic plates is developed. Multi-layer solid rigid and hinged structures are considered, in which the principle of reverse piezoelectric effect is used. Closed solutions of non-stationary axisymmetric problems of the electroelasticity theory for multilayer structures by the method of finite integral transformations are constructed. Based on the analysis of the numerical results of the calculation, practical recommendations for the design of piezoceramic transducers of resonance and nonresonance classes are presented. An algorithm has been developed for optimizing the operation of the structures under consideration by selecting their geometrical dimensions and the material used, which makes it possible to most effectively convert the applied electrical load into mechanical displacements. **Conclusion.** The presented results make it possible to clarify the assumptions about the nature of the distribution of the electric field, which should be used when designing bimorph structures of other configurations, which can only be calculated using applied theories for thin plates.

**Keywords:** bimorph piezoceramic plate, nonstationary axisymmetric problem, finite integral transformations

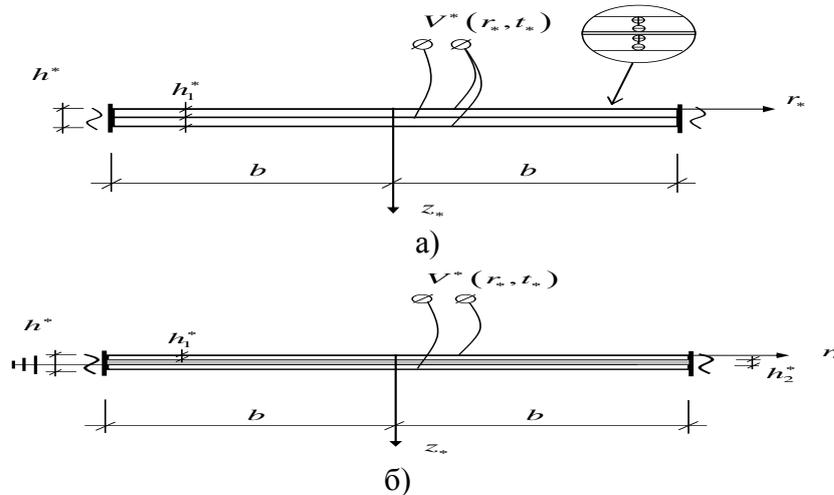
**Введение.** В различных технических устройствах широко используются пьезокерамические преобразователи в виде тонких биморфных пластин [1–5]. Данные конструкции представляют собой симметричные или асимметричные многослойные системы, состоящие из электроупругих и упругих тонких элементов. Изгибные колебаний, в случае использования явления обратного пьезоэффекта, создаются с помощью электрического напряжения, приложенного на электродированные поверхности пьезокерамических пластин. Для наиболее эффективного преобразования электрической энергии в механические колебания возникает необходимость углубленного анализа связанности физических полей различной природы в многослойных конструкциях.

Для решения данной проблемы используется теории электроупругости в пространственной постановке [6,7], математическая постановка которых включает сложные расчетных соотношений в частных производных. Для их реализации, как правило, используются прикладные теории, в которых применяются различные кинематические гипотезы и допущения о характере распределения напряженности электрического поля в пьезокерамических пластинах [8–14].

В настоящей работе, на основании представленного алгоритма расчета нестационарных осесимметричных задач для шарнирно и жестко закрепленных сплошных биморфных пластин в трехмерной постановке (без использования упрощений), а также анализа численных результатов, разработаны практические рекомендации по оптимизации работы рассматриваемых конструкций. Кроме того, для пластин имеющих другое конструктивное решения, работу которых можно исследовать только с помощью прикладных теорий, сформулированы законы изменения электрического поля.

**Постановка задачи.** В общем случае круглая биморфная конструкция, занимающая в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega : \{0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$ , представляет многослойную систему в виде жестко соединенных между собой электроупругих (пьезокерамических) и упругих тонких пластин. Для определенности рассмотрим два конструктивных решения (рисунок 1, а, б): 1) электроупругая система состоит из двух пьезокерамических пластин высотой  $h_1^*$  ( $h^* = 2h_1^*$ ); 2) конструкция включает металлическую подложку толщиной  $h_2^*$  и две пьезокерамические пластины ( $h^* = 2h_1^* + h_2^*$ ).

Изгибные осесимметричные колебания конструкций индуцируются в результате подведения к торцевым электродированным поверхностям пьезокерамических пластин, выполненных из материала гексагональной системы класса 6 mm [15] с параллельным направлением вектора аксиальной поляризации, электрического напряжения  $V^*(r_*, t_*)$ . Рассматриваются случаи жесткого и шарнирного закрепления цилиндрической поверхности электроупругих систем.



**Рис. 1. Расчетная схема биморфных пластин**  
**Fig. 1. Design scheme of bimorph plates**

Математическая формулировка рассматриваемых начально – краевых задач в безразмерной форме включает [7]:

– систему линейных осесимметричных дифференциальных уравнений движения и электростатики относительно компонент вектора перемещений  $U, W$ , а также потенциала электрического поля  $\phi$ :

$$L_{pm} \bar{N}(r, z, t) = 0 \quad (p, m = \overline{1,3}); \quad (1)$$

– механические и электрические граничные условия:

$$r = 0,1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty, \quad (2)$$

$$W(1, z, t) = 0, \quad D_{r|r=1} = 0,$$

$$\text{жесткое закрепление:} \quad U(1, z, t) = 0; \quad (3)$$

$$\text{шарнирное закрепление:} \quad \sigma_{rr}(1, z, t) = 0; \quad (4)$$

$$z = 0, h \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad (5)$$

$$\text{конструктивное решение 1 (рис.1,а):} \quad \phi = V(r, t) / 2,$$

$$\text{конструктивное решение 2 (рис.1,б):} \quad \phi = \pm V(r, t) / 2;$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \sigma_{zz}(z+0) = \sigma_{zz}(z-0), \quad \sigma_{rz}(z+0) = \sigma_{rz}(z-0), \quad (6)$$

$$W(z+0) = W(z-0), \quad U(z+0) = U(z-0),$$

конструктивное решение 1 (рис.1,а):  $\phi(h_1, z, t) = -V(r, t) / 2,$

конструктивное решение 2 (рис.1,б):  $\phi = 0;$

– начальные условия:

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = W(r, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial W(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad (7)$$

где  $L_{pm}$  – дифференциальные операторы в частных производных,  $t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(1)} / \rho^{(1)}}$ ,

$$\bar{N}(r, z, t) = [U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)]^T, \quad [U, W, h, r, z] = [U^*, W^*, h^*, r_*, z_*] / b,$$

$$[\phi, V] = [\phi^*, V^*] e_{33} / (C_{11}^{(1)} b), \quad U^*, W^*, \phi^* \text{ – компоненты вектора перемещений и потенциал элект}$$

рического поля в размерной форме,  $\sigma_{pk}$  – компоненты тензора напряжений ( $p, k = r, z$ ),  $D_r$  – радиальная компонента вектора индукции электрического поля,  $C_{11}^{(1)}, \rho^{(1)}$  – модуль упругости и плотность анизотропного пьезокерамического материала.

Следует отметить, что при исследовании упругой среды (рис.1,б) система (1) состоит только из уравнений движения, сформулированных относительно компонент вектора перемещений, а при формировании соотношений (6) для первого конструктивного решения (рис.1,а) условия совместности механических напряжений и перемещений при  $z = h_1 + h_2$  отсутствуют.

**Методы исследования.** Построение общего замкнутого решения. Решение осуществляется методом конечных интегральных преобразований, используя последовательно преобразование Фурье–Бесселя [16] по радиальной координате  $r$  и обобщенное преобразование [17] по аксиальной переменной  $z$ . При этом каждый раз предварительно выполняется процедура стандартизации [18] (приведение граничных условий к виду, позволяющему применить соответствующее преобразование). Трансформанты  $\bar{R}(n, z, t)$ ,  $G(\lambda_{in}, n, t)$  и формулы обращения соответствующих преобразований имеют вид:

$$\bar{R}(n, z, t) = \int_0^1 \bar{N}(r, z, t) \bar{P}(n, r) r dr$$

$$\bar{N}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \bar{P} \bar{R} \quad (8)$$

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_k^h \bar{Y}(\lambda_{in}, z) \bar{R}^*(n, z, t) dz,$$

$$\bar{R}^* = \sum_{i=1}^{\infty} G \bar{K} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (9)$$

где  $\bar{P} = [a_{mp}]$  – диагональная матрица 3-го порядка ( $a_{11} = J_1(j_n r)$ ,  $a_{22} = a_{33} = J_0(j_n r)$ ),  $j_n$  – положительные нули функций  $J_1(j_n)$  при жестком и  $J_0(j_n)$  шарнирном закреплении ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\bar{R} = \bar{H}_k + \bar{R}^*$ ,  $H_k$  – трехкомпонентная ( $k = 1, 2, 3$ ) стандартизирующая вектор – функции,  $\bar{Y} = [K_1, K_2, 0]$ ,  $\bar{K} = [K_1, K_2, K_3]^T$ ,  $\lambda_{in}$  – положительные параметры, образующие счетное множество ( $i = 1, 2, 3, \dots$ );  $\Omega_n, \|K_{in}\|^{-2}$  – квадрат нормы ядра преобразований. В результате получаем расчетные соотношения для функций  $U, W, \phi$  в виде спектральных разложений по найденной системе собственных функций  $K_1 \div K_3$ , которыми являются линейные комбинации обычных и модифицированных функций Бесселя:

$$\bar{N}(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \bar{P}(n, r) \left[ \bar{H}_k + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \bar{K}(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \quad (10)$$

Круговые частоты осесимметричных колебаний цилиндра  $\omega_{in}$  связаны с  $\lambda_{in}$  зависимостью  $\omega_{in} = \frac{\lambda_{in}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}^{(1)}}{\rho^{(1)}}}$ .

Алгоритм решения начально–краевых задач (1–7) подробно описан в работах авторов [19,20].

**Обсуждение результатов.** На основании представленного алгоритма и разработанного программного комплекса получены численные результаты расчета, которые позволяют путем подбора геометрических размеров и материала рассматриваемых конструкций, оптимизировать их работу, т.е. добиться наиболее эффективного преобразования приложенной электрической нагрузки в механические перемещения.

В качестве первого примера рассматривается жесткозакрепленная биморфная конструкция ( $b = 14 \times 10^{-3}$  м), состоящая из двух пьезокерамических пластин состава ЦТС–19 (рис.1,а) и имеющая следующие физические характеристики материала:

$$\{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} = \{-4.9, 14.9, 10.6\} \text{ Кл/м}^2, \quad \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{7.73, 7.26\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м}, \quad \rho = 7730 \text{ кг/м}^3, \\ \{C_{11}^{(1)}, C_{33}^{(1)}, C_{12}^{(1)}, C_{13}^{(1)}, C_{55}^{(1)}\} = \{10.9, 9.1, 6.1, 5.4, 2.4\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Численные результаты расчета дают возможность сделать следующие выводы:

1. Для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия в механические колебания на торцевых электродированных поверхностях пьезокерамических пластин необходимо использовать систему разрезных кольцевых электродов (количество и размеры электродов определяют нулевые значения функции  $J_1(j_n)$ ) с подключением соседних электродов в противофазе.

Причем при сплошном электродном покрытии механические колебания в жесткозакрепленной конструкции не возбуждаются.

На основании данного вывода анализ напряженно–деформированного состояния и электрического поля биморфной пластины, работающей на первой резонансной частоте, проводится при использовании двух электродов на торцевых поверхностях с радиусом раздела  $a = 8.8 \times 10^{-3}$  м ( $R_1 = a/b = 0.628$ ).

Для этого представляем электрическую нагрузку  $V(r, t)$  в виде  $V(r, t) = V_0 [H(R_1 - r) - H(r - R_1)] \sin \beta t$ ,

где  $V_0$  – амплитудное значение интенсивности в безразмерной форме,  $\beta$  – относительная частота вынужденных колебаний ( $\beta = \beta^* b \sqrt{\rho^{(1)} / C_{11}^{(1)}}$ ,  $\beta^*$  – круговая частота вынужденных колебаний);

2. При проектировании изгибных преобразователей необходимо учитывать, что один из способов повышения чувствительности прибора является уменьшение его толщины. Это приводит к снижению жесткости конструкции и увеличению амплитудных значений вертикальных перемещений.

Однако в этом случае наблюдается увеличение аксиальной компоненты векторов напряженности  $E_z(r, z, t)$  и индукции  $D_z(r, z, t)$  электрического поля (рис. 2, а, б).

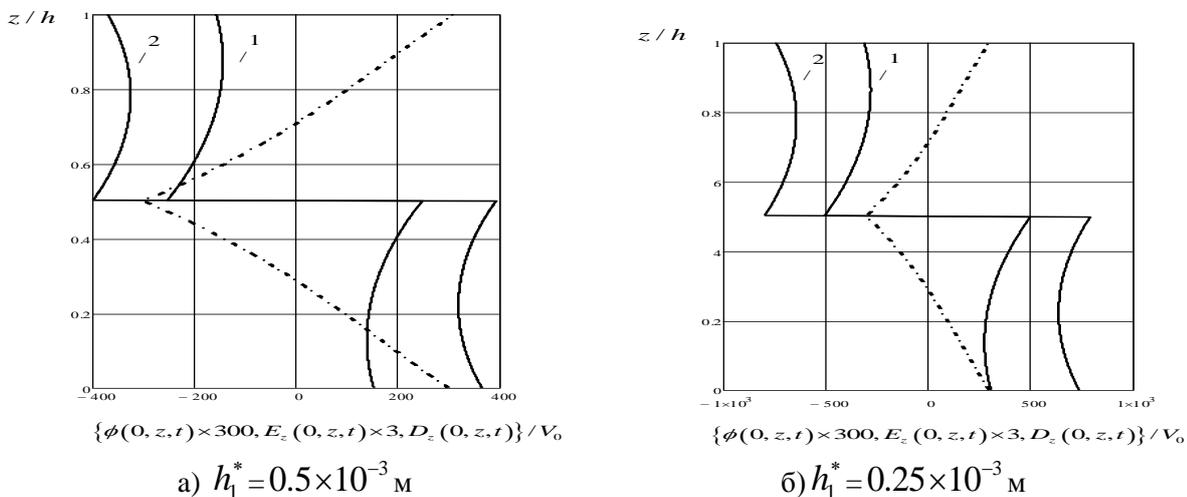
Данный факт необходимо учитывать, поскольку при больших значениях  $E_z(r, z, t)$  происходит деполяризация пьезокерамического материала.

В частности, образование в пьезокерамическом материале состава ЦТС–19 напряженности электрического поля более 300 кВ/м приводит к снижению численных значений коэффициентов диэлектрической проницаемости и пьезомодулей. В рассматриваемой системе оптимальная толщина  $h_1^* = 0.2 \times 10^{-3}$  м ( $V_0^* = 20$  В);

3. Сравнение численных значений аксиальной (рис.2) и радиальной (рис.3) компонент электрического поля позволяют сделать вывод, что при расчете пьезокерамических пластин с помощью прикладных теорий радиальными составляющими можно пренебречь, поскольку их численные значения существенно меньше соответствующих аксиальных величин.

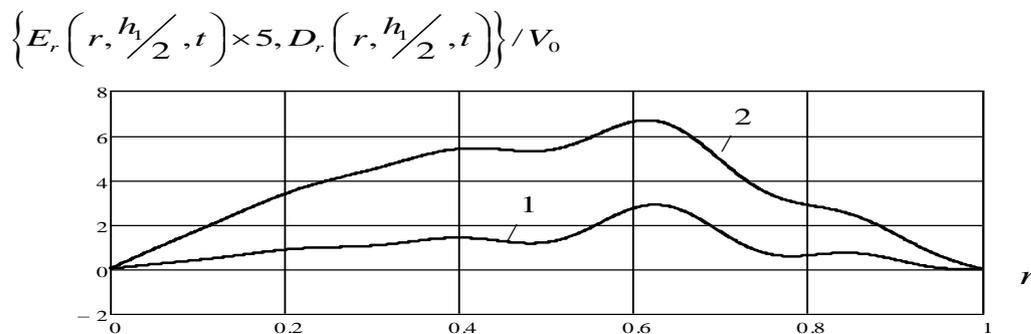
Кроме того, принимая во внимание, что в пределах электрода, аксиальная компонента напряженности по радиальной координате практически не меняется, на основании полученных результатов, можно для расчета сформулировать гипотезу о характере изменения напряженности электрического поля в виде простой зависимости  $E_z(r, z, t) = E_z(z, t) = \pm \frac{f(z)}{h_1^*} V(t)$  ( $f(z)$  –

многочлен, аппроксимирующий соответствующую функцию (рис.2, график 1)).



**Рис.2.** Графики изменения амплитудных значений  $\phi(r, z, t)$ ,  $E_z(r, z, t)$ ,  $D_z(r, z, t)$  по высоте биморфной пластины при  $\beta = 0.8\lambda_{11}$  (1– $E_z$ , 2– $D_z$ , пунктирная линия –  $\phi$ ,  $\lambda_{11}$  – собственное значение, соответствующее первой частоте собственных осесимметричных колебаний)

**Fig.2.** Graphs of amplitude values  $\phi(r, z, t)$ ,  $E_z(r, z, t)$ ,  $D_z(r, z, t)$ , the height of the bimorph plate at  $\beta = 0.8\lambda_{11}$  (1– $E_z$ , 2– $D_z$ , dashed line–  $\phi$ ,  $\lambda_{11}$  – eigenvalue corresponding to the first frequency of its own axisymmetric oscillations)



**Рис.3.** Графики изменения амплитудных значений радиальных компонент вектора электрического поля по радиальной координате: 1– $E_r$ , 2– $D_r$  ( $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$  м)

**Fig.3.** Graphs of the amplitude values of the radial components of the electric field vector along the radial coordinate: 1– $E_r$ , 2– $D_r$  ( $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$  м)

В качестве следующего примера рассматривается шарнирно закрепленная биморфная конструкция (рис.1, б), состоящая из металлической подложки и двух пьезокерамических пластин состава ЦТС–19. При этом подложка ( $h_2^* = 10^{-3}$  м) изготавливается из различных сплавов (дюралюминий –  $\nu = 0.34$ ,  $E = 7.3 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>; латунь –  $\nu = 0.35$ ,  $E = 9.8 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 8600$  кг/м<sup>3</sup>;  $E, \nu, \rho$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность изотропного материала).

Данное конструктивное решение позволяет повысить прочностные свойства многослойной электроупругой системы, поскольку пьезокерамика является хрупким материалом.

Здесь принимается во внимание выражения для модулей упругости металлической подложки:

$$C_{11}^{(2)} = C_{33}^{(2)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12}^{(2)} = C_{13}^{(2)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{55}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Рассматривается работа электроупругой системы также на первой резонансной частоте. В этом случае для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия на лицевых поверхностях конструкции используется сплошное электродное покрытие. Поэтому электрическая гармоническая нагрузка  $V(r, t)$  представляется в виде:

$$V(r, t) = V_0 \sin \beta t.$$

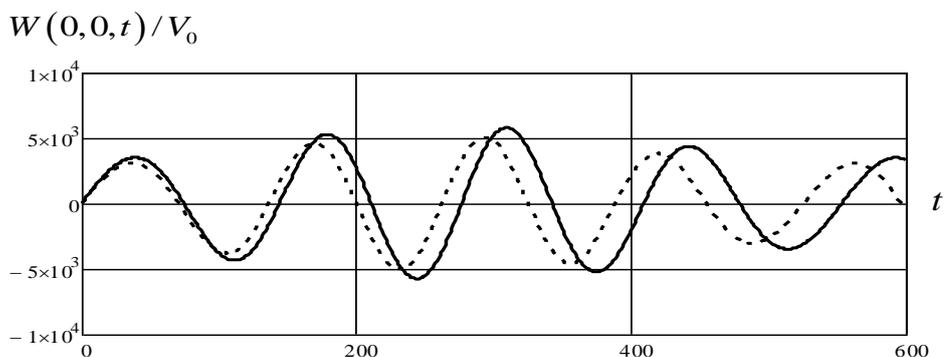
На рис. 4 – 7 изображены графики, характеризующие изменение по пространственным координатам и времени составляющих механических и электрических полей напряжений ( $\beta = 0.8\lambda_{11}$ ).

На основании анализа результатов расчета можно сделать следующие выводы:

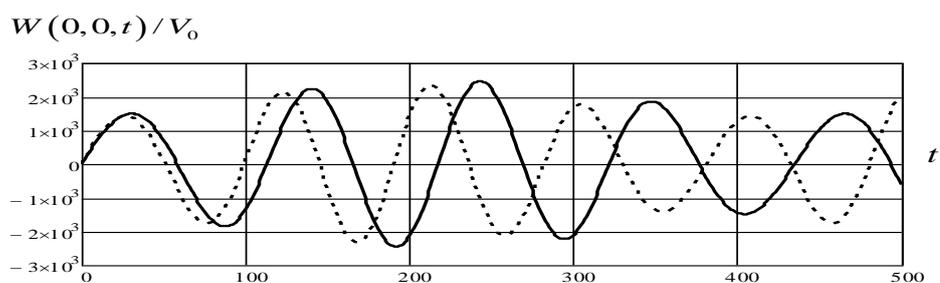
- 1) При заданных геометрических размерах конструкции физические характеристики материала подложки оказывают влияние на частотный спектр собственных колебаний (табл.1) и практически не оказывают влияние на амплитудные значения вектора перемещений. На рис. 4 пунктирной линией обозначены результаты расчета при использовании в качестве материала подложки латунь, а сплошной – дюралюминий;
- 2) Графики изменения амплитудных значений нормальных напряжений  $\sigma_{rr}(r, z, t)$  по радиальной координате показывают, что при шарнирном закреплении пластины максимальные значения наблюдаются в центре пластины при  $z = 0, h$  (рис.5). При этом в области соединения двух элементов с разными физическими характеристиками присутствует разное значение напряжений;
- 3) Анализ графиков « $U(r, z, t) - z$ », представленных на рисунке 6, показывает, что гипотезу плоских сечений, применяемую в прикладной теории для тонких систем, можно использовать также при исследовании составных тонких пластин, имеющих различные физические характеристики по высоте сечения;
- 4) Амплитудные значения вектора напряженности электрического поля  $E_z(r, z, t)$  по толщине пьезокерамической пластины изменяется по линейной зависимости и данный характер не зависит от радиальной координаты. На рис. 7 цифрами 1,2,3 обозначены результаты при  $r = 0, 0.4, 0.8$ . Причем, наибольшие значения  $E_z(r, z, t)$  наблюдаются в области соединения металлической и пьезокерамической пластин ( $z = h_1, h_1 + h_2$ );
- 5) На основании полученных результатов, аналогично предыдущему примеру, можно сформулировать гипотезу о характере изменения напряженности электрического поля. При этом функция  $f(z)$  является линейной (рис.7).

**Таблица 1. Частотный спектр собственных колебаний**  
**Table 1. Frequency spectrum of natural oscillations**

	Дюралюминий			Латунь		
	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$
$h_1^* = 0.2 \times 10^{-3}$ , м	0.057	0.296	0.716	0.059	0.312	0.756
$h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ , м	0.072	0.373	0.888	0.082	0.427	1.020



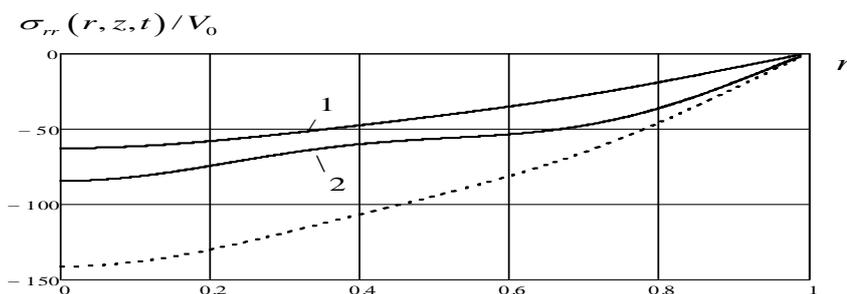
а)  $h_1^* = 0.2 \times 10^{-3}$  м



б)  $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$  м

**Рис.4. Графики изменения  $W(0,0,t)$  во времени  $t$  (сплошная линия – подложка из дюралюминия, пунктирная – из латуни)**

**Fig.4. Graphs of change  $W(0,0,t)$  over time  $t$  (solid line - duralumin substrate, dotted - from brass)**



**Рис.5. Графики изменения амплитудных значений нормальных напряжений  $\sigma_{rr}(r,z,t)/V_0$  по радиальной координате (1–  $z = h_1 - 0$ , 2–  $z = h_1 + 0$ , пунктирная –  $z = 0$ )**

**Fig.5. Graphs of amplitude values of normal stress along  $\sigma_{rr}(r,z,t)/V_0$  the radial coordinate ((1–  $z = h_1 - 0$ , 2–  $z = h_1 + 0$ , dashed -  $z = 0$ )**

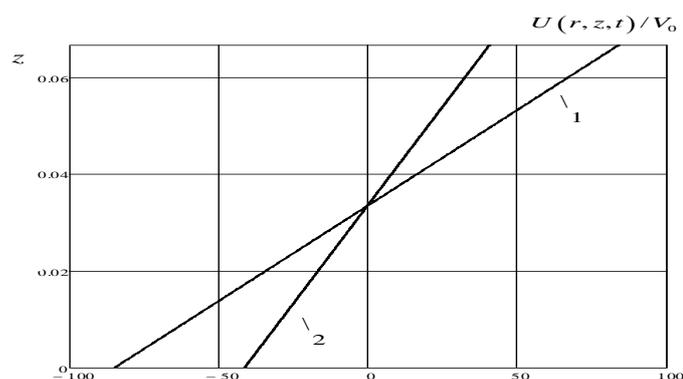
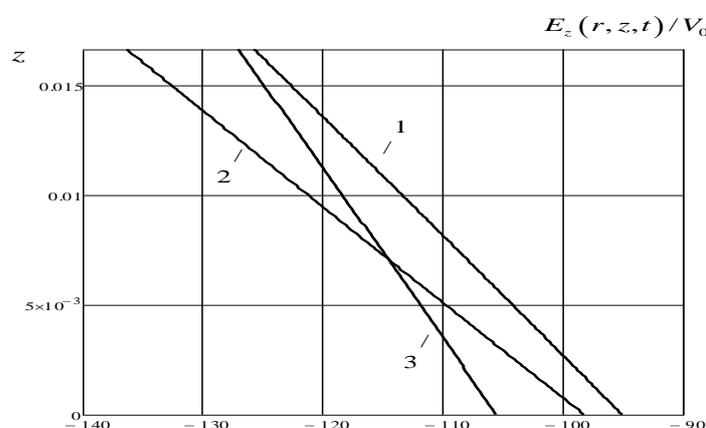


Рис.6. Графики изменения амплитудных значений радиальной компоненты вектора перемещений  $U(r, z, t)$  по высоте пластины (1–  $r = 1$ , 2–  $r = 0.3$ )

Fig.6. Graphs of the amplitude values of the radial component of the displacement vector along  $U(r, z, t)$



the plate height (1–  $r = 1$ , 2–  $r = 0.3$ )

Рис.7. Изменения амплитудных значений аксиальной компоненты напряженности  $E_z(r, z, t)$  по высоте пластины (1–  $r = 0$ , 2–  $r = 0.4$ , 3–  $r = 0.8$ )

Fig.7. Changes in the amplitude values of the axial component of tension along  $E_z(r, z, t)$  the plate height (1–  $r = 0$ , 2–  $r = 0.4$ , 3–  $r = 0.8$ )

**Вывод.** При действии гармонической электрической нагрузки использование допущения об установившемся режиме вынужденных колебаний, применяемое при исследовании большинства подобных динамических задач, можно применять, когда частота вынужденных колебаний существенно меньше первой моды собственных колебаний. При высокочастотном внешнем воздействии, вследствие наложения отраженных волн деформирования, наблюдается более сложная зависимость (рис. 4) и в этом случае необходимо использовать построенный авторами алгоритм расчета.

#### Библиографический список:

1. Подводные электроакустические преобразователи. Справочник/ Под ред. В.В. Богородского. – Л.: Судостроение, 1983. –248 с.
2. Shararov V. Piezoceramic sensors. –Springer Verlag, 2010. – 498 p.
3. Джагуров Р.Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления. СПб.: Политехника, 1994. 608 с.
4. Домаркас В.И., Кажис Р-И.Ю. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. Вильнюс: Минтис, 1975. 255 с.
5. Gabbert U., Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. London, Kluwer Academic Pub, 2001, 384 p.
6. Новожилов Ю.В. Электродинамика/ Ю.В. Новожилов, Ю.А. Яппа. –М.: Наука, 1978, –352с.

7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
8. V. Tsaplev, R. Konovalov, K. Abbakumov. Disk bimorph-type piezoelectric energy harvester, J. of Power and Energy Eng. №3(2015) pp. 63-68.
9. Smits J.G., Dalke S.I., Cooney T.K., The constituent equations of piezoelectric bimorphs// Sensors and Actuators A, 1991, no.28, pp. 41–61.
10. Вагульян А.О. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложение // Изв. РАН. МТТ, 2007, №4. С.114–122.
11. Tsaplev V., Konovalov R., Abbakumov, K. Disk Bimorph-Type Piezoelectric Energy Harvester// Journal of Power and Energy Engineering, 2015, no. 3, pp. 63–68. doi: org/10.4236/jpee.2015. 34010.
12. Петрищев О. Н. и др. Исследование параметров динамического напряженно–деформированного состояния асимметричных биморфных пьезокерамических элементов// Вісник ЧДТУ, 2013, №4. С. 38-48.
13. Янчевский И.В. Минимизация прогибов электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. Харьков, 2011, вып. 16. С. 303–313.
14. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамической тонкой биморфной пластины // Изв. РАН. МТТ, 2013, №2. С.77 –85.
15. Бардзокас Д.И. Распространение волн в электроупругих средах/ Д.И. Бардзокас, Б.А. Кудрявцев, Н.А. Сенник. – М.: Комкнига, 2003. –336 с.
16. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье/ И. Н. Снеддон. –М.: Изд-во иностр. лит., 1955. –668 с.
17. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований/ Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. 174 с.
18. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пластины// Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. серия. 2011, №8(89). С.142–152.
19. Shlyakhin D. A., Kazakova O.V. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate// Procedia Engineering (2016) Volume 153, pp. 662-666 DOI information: 10.1016/j.proeng.2016.08.219.
20. Шляхин Д.А. Уточненное решение динамической задачи электроупругости для биморфной пластины// Вестник КPCY. 2016. Том 16. №5. С.108-113.

#### References:

1. Podvodnyye elektroakusticheskiye preobrazovateli. Spravochnik/ Pod red. V.V. Bogorodskogo. – L.: Sudostroyeniye, 1983. –248 s. [Underwater electroacoustic transducers. Handbook / Ed. V.V. Bogorodsky. - L.: Shipbuilding, 1983. –248 p. (in Russ)]
2. Sharapov V. Piezoceramic sensors. –Springer Verlag, 2010. – 498 p.
3. Dzhagurov R.G. P'yezoelektronnyye ustroystva vychislitel'noy tekhniki, sistem kontrolya i upravle-niya. SPb.: Politekhnik, 1994. 608 s. [Dzhagurov R.G. Piezoelectronic devices of computer technology, control systems and control. SPb.: Polytechnic, 1994. 608 p. (in Russ)]
4. Domarkas V.I., Kazhis R-I.YU. Kontrol'no-izmeritel'nyye p'yezoelektricheskiye preobrazovateli. Vil'nyus: Mintis, 1975. 255 s. [Domarkas, VI, Kazhis R-I.Yu. Piezoelectric transducers. Vilnius: Minthis, 1975. 255 p. (in Russ)]
5. Gabbert U., Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. London, Kluwer Academic Pub, 2001, 384 p.
6. Novozhilov YU.V. Elektrodinamika/ YU.V. Novozhilov, YU.A. Yappa. –M.: Nauka, 1978, –352s. [Novozhilov Yu.V. Electrodynamics / Yu.V. Novozhilov, Yu.A. Yappa –M.: Science, 1978, –352c. (in Russ)]
7. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruksiy. Kiyev: Nauk. dumka, 1989. 279 s. [Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. Mechanics of related fields in structural elements. Kiev: Sciences. Dumka, 1989. 279 s. (in Russ)]
8. V. Tsaplev, R. Konovalov, K. Abbakumov. Disk bimorph-type piezoelectric energy harvester, J. of Power and Energy Eng. №3(2015) pp. 63-68.
9. Smits J.G., Dalke S.I., Cooney T.K., The constituent equations of piezoelectric bimorphs// Sensors and Actuators A, 1991, no.28, pp. 41–61.
10. Vatul'yan A.O. Ob odnoy modeli izgibnykh kolebaniy p'yezoelektricheskikh bimorfov s razreznymi elektrodami i yeye prilozheniye // Izv. RAN. MTT, 2007, №4. S.114–122. [Vatulyan A.O. On a Model of Flexural Oscillations of Piezoelectric Bimorphs with Split Electrodes and its Application, Izv. RAS. MTT, 2007, №4. P.114-122. (in Russ)]
11. Tsaplev V., Konovalov R., Abbakumov, K. Disk Bimorph-Type Piezoelectric Energy Harvester// Journal of Power and Energy Engineering, 2015, no. 3, pp. 63–68. doi: org/10.4236/jpee.2015. 34010.
12. Petrishchev O. N. i dr. Issledovaniye parametrov dinamicheskogo napryazhenno–deformirovannogo so-stoyaniya asimmetrichnykh bimorfnykh p'yezokeramicheskikh elementov// Вісник CHDTU, 2013, №4. С. 38-48. [Petrishchev O.N., et al. Investigation of the parameters of the dynamic stress – strain state of asymmetric bimorph piezoceramic elements // Visnyk CHDTU, 2013, No.4. С. 38-48. (in Russ)]
13. Yanchevskiy I.V. Minimimizatsiya progibov elektrouprugoy bimorfnoy plastiny pri impul'snom nagruzhennii // Problemy vychislitel'noy mekhaniki i prochnosti konstruksiy. Khar'kov, 2011, vyp. 16. S. 303–313. [Yanchevsky

- I.V. Minimizing the deflections of an electroelastic bimorph plate under pulsed loading // Problems of computational mechanics and structural strength. Kharkov, 2011, no. 16. pp. 303–313. (in Russ)]
14. Shlyakhin D.A. Vynuzhdennyye osesimmetrichnyye kolebaniya p'yezokeramicheskoy tonkoy bimorfnoy plastiny // Izv. RAN. MTT, 2013, №2. S.77 –85. [Shlyakhin D.A. Forced axisymmetric oscillations of a piezoceramic thin bimorph plate // Izv. RAS. MTT, 2013, №2. P.77 –85. (in Russ)]
  15. Bardzokas D.I. Rasprostraneniye voln v elektrouprugikh sredakh/ D.I. Bardzokas, B.A. Kudryavtsev, N.A. Senik. – M.: Komkniga, 2003. –336 s. [Bardzokas D.I. Wave propagation in electro-elastic media / D.I. Bardzokas, B.A. Kudryavtsev, N.A. Senik. - M.: Combook, 2003. –336 p. (in Russ)]
  16. Sneddon I.N. Preobrazovaniya Fur'ye/ I. N. Sneddon. –M.: Izd-vo inostr. lit., 1955. –668 s. [Sneddon I.N. Fourier transforms / I.N. Sneddon. –M.: Publishing house inostr. Lit., 1955. –668 p. (in Russ)]
  17. Senitskiy YU.E. Issledovaniye uprugogo deformirovaniya elementov konstruktsiy pri dinamicheskikh vozdeystviyakh metodom konechnykh integral'nykh preobrazovaniy/ Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 1985. 174 s. [Senitskiy Yu.E. Investigation of elastic deformation of structural elements under dynamic actions by the method of finite integral transformations / Saratov: Sarat Publishing House. Un – one, 1985. 174 s. (in Russ)]
  18. Shlyakhin D.A. Vynuzhdennyye osesimmetrichnyye izgibnyye kolebaniya tolstoy krugloy zhestko zakrep-lennoy plastiny// Vestnik Samarsk. gos. un-ta. Yestestvennonauchn. seriya. 2011, №8(89). S.142–152. [Shlyakhin D.A. Forced axisymmetric bending vibrations of a thick round rigidly fixed plate. Vestnik Samarsk. state un – one Natural Science series. 2011, No. 8 (89). Pp. 142–152. (in Russ)]
  19. Shlyakhin D. A., Kazakova O.V. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate// Procedia Engineering (2016) Volume 153, pp. 662-666 DOI information: 10.1016/j.pro-eng.2016.08.219.
  20. Shlyakhin D.A. Utochnennoye resheniye dinamicheskoy zadachi elektrouprugosti dlya bimorfnoy plasti-ny// Vestnik KRSU. 2016. Tom 16. №5. S.108-113. [Shlyakhin D.A. Refined solution of the dynamic problem of electroelasticity for a bimorphous plate. Vestnik KRSU. 2016. Volume 16. №5. P.108-113. (in Russ)]

**Сведения об авторах:**

**Шляхин Дмитрий Аверкиевич** – доктор технических наук, профессор кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов».

**Ратманова Олеся Викторовна** – ассистент кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов».

**Information about the author.**

**Dmitiy A. Shlyakhin** - Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of Building Mechanics and Structural Resistance.

**Olesya V. Ratmanova** – Lecturer, Department of Building Mechanics and Structural Resistance

**Конфликт интересов.**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Поступила в редакцию** 26.06.2018.

**Принята в печать** 30.08.2018.

**Conflict of interest.**

The authors declare no conflict of interest.

**Received** 26.06.2018.

**Accepted for publication** 30.08.2018.