

Для цитирования: Культербаев Х.П., Абдул Салам И.М., Пайзулаев М.М. Свободные продольные колебания вертикального стержня с дискретными массами при наличии сил демпфирования. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018; 45(3): 8-17. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17
For citation: Kulterbaev H. P., Abdul-Salam Igab Mazen, Payzulaev M.M. Free longitudinal vibrations of a vertical rod with discrete masses with damping forces. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2018; 45(3): 8-17. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ МЕХАНИКА

УДК 534.1

DOI: 10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17

СВОБОДНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ С ДИСКРЕТНЫМИ МАССАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Культербаев Х.П.¹, Абдул Салам И.М.², Пайзулаев М.М.³

^{1,2}Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
^{1,2}360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия,

³Дагестанский государственный технический университет,
³367026, г. Махачкала, пр. Имама Шамиля, 70, Россия,

¹e-mail: kulthp@mail.ru, ²e-mail: ehabmazendulsalam@hotmail.com,

³e-mail: smdstu@mail.ru

Резюме. Цель. Рассматриваются продольные колебания вертикального стержня континуально-дискретной системы при кинематических сейсмических возмущениях в виде стационарного случайного процесса. **Метод.** Предложен и реализован метод определения дисперсии выходного процесса перемещений, использующий представление входного случайного процесса в виде суммы гармонических детерминированных возмущений. **Результат.** Определена функция зависимости дисперсии перемещений от продольной координаты. Продольные колебания вертикальных стержней, находящихся вблизи эпицентра землетрясений, являются опасными для их прочности и устойчивости. Методы конечных разностей и координатного спуска позволяют создавать универсальные алгоритмы и компьютерные программы, легко решающие сложные спектральные задачи. **Вывод.** До настоящего времени исследования о случайных колебаниях зданий и строительных сооружений, а также и нормативные документы посвящались горизонтальным сейсмическим воздействиям и вызванным ими поперечным изгибным колебаниям. Примеры свидетельствуют о необходимости расширения тематики исследований с включением и других типов колебаний: комбинаций продольных с поперечными, угловыми, крутильными, параметрическими и т. д. Данную разработку можно легко адаптировать к колебаниям стержней переменного сечения, к колебаниям континуально-дискретных стержней.

Ключевые слова: продольные колебания, свободные колебания, дискретные массы, демпфирование колебаний, метод конечных разностей

PHYSICAL-MATEMATICAL SCIENCE
MECHANICS

FREE LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A VERTICAL ROD WITH DISCRETE MASSES WITH DAMPING FORCES

Husen P. Kulterbaev¹, Abdul-Salam Igab Mazen², Magomed M. Payzulaev³

^{1,2}H.M. Berbekov Kabardino-Balkaria State University,

^{1,2}173 Chernyshevsky Str., Nalchik 3360004, Russia,

³Daghestan State Technical University,

³70 I. Shamil Ave, Makhachkala 367026, Russia,

¹e-mail: kulthp@mail.ru, ²e-mail: ehabmazenabdulsalam@hotmail.com,

³e-mail: smdstu@mail.ru

Abstract Objectives The longitudinal oscillations of a vertical rod of a continually discrete system with kinematic seismic disturbances in the form of a stationary random process are considered. **Method.** A method for determining the variance of the output process of displacements, using the representation of the input random process as a sum of harmonic deterministic perturbations, is proposed and implemented. **Result.** The dependence function of the dispersion of displacements on the longitudinal coordinate is determined. Longitudinal vibrations of vertical rods near the epicenter of earthquakes are dangerous for their strength and stability. The methods of finite differences and coordinate descent allow you to create universal algorithms and computer programs that easily solve complex spectral problems. **Conclusion.** To date, research on random vibrations of buildings and structures, as well as regulatory documents, has been devoted to horizontal seismic effects and transverse bending vibrations caused by them. Examples indicate the need to expand the scope of research with the inclusion of other types of vibrations: combinations of longitudinal with transverse, angular, torsional, parametric, etc. This design can be easily adapted to vibrations of rods of variable cross section, to vibrations of continually discrete rods.

Keywords: longitudinal oscillations, free oscillations, discrete masses, vibration damping, finite difference method

Введение. Продольные колебания вертикальных стержневых строительных сооружений, находящихся вблизи эпицентра землетрясений, представляют большую опасность для их прочности. Утверждается [1,2], что «в эпицентральной зоне вертикальная составляющая доминирует над другими составляющими колебания». В известном газлийском землетрясении 1976 г. вертикальные ускорения поверхности грунта значительно превосходили горизонтальные. Можно предположить, что оно было столь разрушительным именно из-за пренебрежения вертикальными возмущениями при проектировании и строительстве города. В то же время эти колебания остаются малоизученными, в основном в научных исследованиях и нормативных документах рассматриваются поперечные изгибные колебания. Зачастую соответствующие расчётные модели представляются как континуально-дискретные системы, состоящие из участков с распределённой массой и сосредоточенных масс (рис. 1).

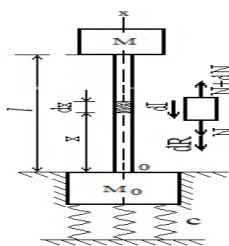


Рис.1. Расчетная схема
Fig.1. Design scheme

Некоторые аспекты проблемы колебаний таких конструкций представлены в работах [3, 4].

Постановка задачи. Рассмотрим вертикальный однородный стержень (рис.1) постоянного сечения, длины l из материала с модулем упругости E , удельным линейно-вязким коэффициентом трения η , с плотностью материала ρ , с площадью поперечного сечения S , несущий на верхнем и нижнем концах дискретные массы M и M_0 и опирающийся на упругое основание с коэффициентом жёсткости c .

Перемещения сечений описываются функцией $u(x, t)$. Они состоят из статической и динамической частей. Статическая часть, составляющая малую долю общих отклонений, образуется от собственного веса и вычисляется легко методами сопротивления материалов, поэтому далее не рассматривается.

Методы исследования. Для изучения свободных колебаний изобразим элементарную частицу стержня и приложенные к ней внутренние силы в сечениях $N, N+dN$, инерционную силу dI и силу демпфирования dR на рис. 1. Применяя к ним принцип Даламбера об уравновешенности таких сил, запишем

$$-dR - N + N + dN - dI = 0.$$

Можно показать, что элементарные выкладки приведут к дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа для свободных продольных колебаний

$$m\ddot{u} + \eta m\dot{u} - b u'' = 0, \quad b = ES, \quad m = \rho S \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty.$$

Преобразуем его к виду, более удобному для дальнейшего употребления

$$\ddot{u} + \eta\dot{u} - a^2 u'' = 0, \quad a^2 = E / \rho. \quad t > -\infty. \quad (1)$$

Сила демпфирования здесь введена по гипотезе Фойгта о линейно-вязком внутреннем трении при колебаниях.

Расчётная схема даёт граничные условия, вытекающие из условий закрепления концов стержня

$$bu'(0, t) - M_0 \ddot{u}(0, t) - cu(0, t) = 0, \quad t > -\infty. \quad (2)$$

$$bu'(l, t) + M\ddot{u}(l, t) = 0, \quad t > -\infty. \quad (3)$$

Решение задачи (1) - (3) запишем с помощью метода разделения переменных как произведение

$$u(x, t) = X(x) e^{\lambda t}, \quad (4)$$

где

$$\lambda = -\mu + j\omega, \quad (5)$$

λ - характеристический показатель, (μ, ω) - собственная пара, состоящая из коэффициента затухания μ и частоты свободных колебаний ω , j - мнимая единица, $X(x)$ - собственная функция. Выбор множителя по времени в (4), (5) основан на очевидности, что колебания являются гармоническими и затухающими.

Подстановка (4) в (1) - (3) после сокращения на $e^{\lambda t}$ даёт

$$\lambda^2 X + \eta\lambda X - a^2 X'' = 0, \quad x \in (0, l). \quad (6)$$

$$bX'(0) - \lambda^2 M_0 X(0) - cX(0) = 0, \quad bX'(l) + \lambda^2 M X(l) = 0. \quad (7)$$

Определить λ аналитическими методами не удаётся.

Выход состоит в применении метода конечных разностей [5] и переходе от аналитической модели задачи (6), (7) к численной. Такой выбор приведёт к универсальным алгоритмам и компьютерным программам, которые легко адаптируются к колебаниям стержней переменного сечения, к разнообразным краевым условиям, к вынужденным колебаниям и т.д.

Следуя указанной цели, вместо непрерывной области определения переменной x введём дискретную область l_h в виде узлов равномерной сетки с шагом h

$$l_h = [x_i: x_i = (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, n], \quad h = l/(n-1),$$

где n - количество узлов сетки.

Значения функции и производных заменим приближёнными значениями в узлах сетки с точностью $O(h^2)$ для производных

Таким образом, решение исходной системы (14) заменяется задачей определения точек нулевого минимума скалярной функции векторного аргумента $\Phi(\mu, \omega)$, так что теперь необходимо решать более простую (по крайней мере в данном случае) задачу

$$\Phi(\mathbf{z}) = 0, \quad \mathbf{z} = \{\mu, \omega\} \in \mathbb{R}^2 \cap (\mu > 0, \omega > 0).$$

Здесь вектор \mathbf{z} соответствует искомым величинам, $\Phi(\mathbf{z})$ представляет мультимодальную функцию, имеющую множество локальных минимумов.

Суть применяемого метода состоит в определении последовательности точек \mathbf{z}_k , $k = 0, 1, \dots$, сходящейся к точке локального минимума \mathbf{z}^* . При этом в процессе вычислений необходимо добиваться, чтобы значения вспомогательной функции были монотонно убывающими и ограниченными снизу

$$\Phi(\mathbf{z}_0) \geq \Phi(\mathbf{z}_1) \geq \dots \geq \Phi(\mathbf{z}_k) \geq \dots \geq \Phi(\mathbf{z}^*). \quad (16)$$

Для реализации такой цели вначале с помощью численных экспериментов намечается начальная точка последовательности \mathbf{z}_0 . Затем определяются последующие приближения \mathbf{z}_k с помощью соотношений

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \mathbf{h}_k,$$

где \mathbf{h}_k – вектор приращений координат, обеспечивающий выполнение условий (16).

Условием прекращения вычислительной процедуры а, значит, и признаком достижения корня с необходимой точностью служит выполнение неравенства

$$\Phi(\mathbf{z}_{k+1}) < \delta. \quad (17)$$

Здесь δ – априорно задаваемое малое положительное число (точность вычислений).

Непосредственное решение системы уравнений (15) проведём с помощью метода покоординатного спуска [6].

Алгоритм метода геометрически иллюстрируется рис. 2, где изображен фрагмент поверхности, содержащий одно из нулевых значений функции $\Phi(\mu, \omega)$ в трёхмерном пространстве. На рис. 2 нанесены линии уровня этой поверхности. Процесс отыскания корней (μ_k, ω_k) проходит следующим образом.

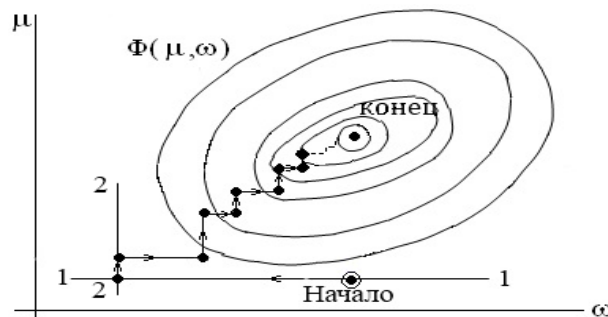


Рис.2. Метод координатного спуска
Fig.2. Coordinate Descent Method

Избирается начальная точка и через неё проводится сечение 1-1. Это означает, что один из аргументов функции μ фиксирован. Вычисляются ординаты функции $\Phi(\omega)$, на экран компьютера выводится её график (рис. 3), вычисления приостанавливаются.

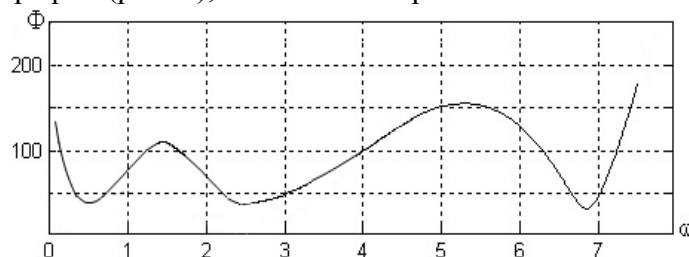


Рис.3. Сечение поверхности Φ
Fig.3. Section of the surface F

По кривой, являющейся сечением поверхности Φ , отчётливо видны условные минимумы функции $\Phi(\omega)$. Отсюда берём, например $\omega_{k1} \approx 0,5$. Это и есть первый шаг спуска вдоль координаты ω . Теперь фиксируем аргумент ω на этом значении, проводим сечение 2-2, строим новый график $\Phi(\mu)$ и на экране видим кривую рис. 4, по которой уточняется $\mu_k (\approx 0,25)$. Этим завершается второй шаг вдоль координаты μ .

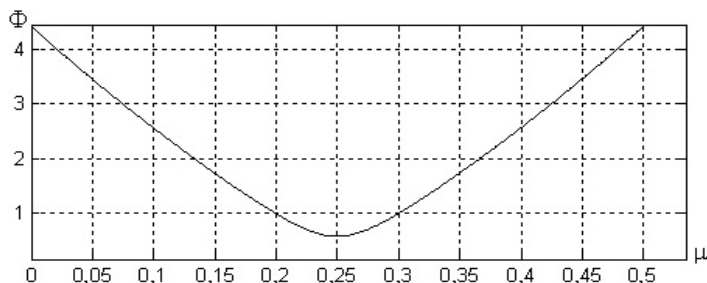


Рис.4. Сечение поверхности Φ
Fig.4. Section of the surface F

Повторение такой процедуры несколько раз приводит к решению системы уравнений (14). В результате будет найдено счётное множество пар $(\mu_1, \omega_1), (\mu_2, \omega_2), \dots$, элементами которых являются коэффициенты затухания и собственные частоты свободных колебаний.

Реализация такого алгоритма аналитическими методами потребует создания сложных вычислительных компьютерных программ для отыскания локальных нулевых минимумов функции $\Phi(\mu, \omega)$. В такой ситуации привлекательным является использование высокоточных графических методов, которые можно реализовать, например, в среде вычислительного комплекса Matlab. Подробности приведены в нижеследующем примере.

Пример 1. Пусть на рис. 1 представлен стержень из стандартной стальной трубы длиной $l = 20$ м, диаметром $D = 108$ мм и толщиной стенки $\delta = 4,71$ мм, опирающийся на фундамент массы $M_0 = 16$ т. Удельный линейно-вязкий коэффициент трения $\eta = 0,1 \text{ с}^{-1}$, коэффициент жёсткости основания $c = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$, верхняя несомая масса $M = 7$ т.

Следуя математической модели и алгоритмам, изложенным выше, составляем матрицу $A(\lambda)$ и вспомогательную функцию $\Phi(\mu, \omega)$. Создаём две компьютерные программы, вычисляющие эту функцию и строящие её графики:

1. $\Phi(\omega | \mu)$ при заданном μ на множестве $\omega \in [a_1, b_1]$;

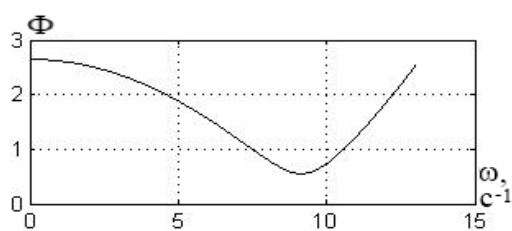


Рис.5. График $\Phi(\omega)$
Fig.5. Graph F (ω)

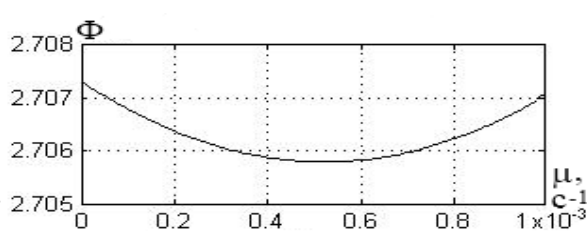


Рис.6. График $\Phi(\mu)$
Fig.6. Graph F (μ)

2. $\Phi(\mu | \omega)$ при заданной ω на множестве $\mu \in [a_2, b_2]$.

Результаты 1 шага, выданные на экран монитора приведены на рис. 5 и 6. На рис. 5 показан график $\Phi(\omega | 1)$. По нему прочитано приближённое первое собственное значение $\omega = 9,17 \text{ с}^{-1}$. Это значение вставляется во вторую программу $\Phi(\mu | 9,17)$ и вычисляется уточнённое значение коэффициента демпфирования $\mu = 0,000521 \text{ с}^{-1}$. Заметим при этом, что вычислительный комплекс Matlab имеет инструменты, позволяющие многократно увеличивать графики рис. 5 и 6 и их фрагменты, так что читаемые по ним значения μ, ω являются хотя и приближёнными, но высокоточными.

Далее начатый процесс, по существу являющийся итерационным по Зейделю, продолжается, пока не будут получены практически неменяющиеся значения пары (μ, ω) и значение $\Phi \approx$

0. Как показали вычисления, для сходимости процесса требуется небольшое количество итераций (2,...4). Первые три собственные пары, полученные по вышеизложенному алгоритму, даны на табл.1.

Таблица 1. Значения показателей
Table 1. Values of indicators

ω, c^{-1}	9,22	56,21	798,81
μ, c^{-1}	0,000525	0,000289	0,495

Видно, что первая собственная частота попадает в зону обычно доминирующих частот сейсмических воздействий, что может привести к возбуждению резонансных колебаний, опасных для прочности и устойчивости сооружения. Следовательно, необходимы меры для повышения частоты свободных колебаний, что можно выполнить путём увеличения жёсткости стержня, жёсткости основания под фундаментом и другими известными методами гашения колебаний.

Данные табл. 1 подтверждают известный дефект гипотезы Фойгта о линейно-вязком коэффициенте сил внутреннего трения η , состоящий в том, что он является частотно зависимым, в то время как эксперименты обнаруживают его постоянство в широком диапазоне частот (до 100). Поэтому примем его равным среднему значению для диапазона малых частот, актуальных при сейсмических колебаниях

$$\varepsilon = (\mu_1 + \mu_2)/2 = 0,000407. \quad (18)$$

Из этого следует, что в предыдущей математической модели вместо параметров диссипации η и μ должен употребляться ε . Собственные значения, найденные выше, при этом пересматриваться не будут, так как они претерпевают весьма незначительные изменения.

Далее задача состоит в том, чтобы найти собственные векторы Y_k ($k = 1, 2, 3, \dots n$) матрицы A , представляющие собственные формы колебаний. Их можно определить хорошо известными методами линейной алгебры матриц. Заметим при этом, что собственные векторы определяются с точностью до множителя.

Первые три собственные формы колебаний, нормированные к единице и полученные в среде вычислительного комплекса Matlab, даны на рис. 7.

По ним отчётливо проглядываются признаки одновременной непрерывности и дискретности данной системы.

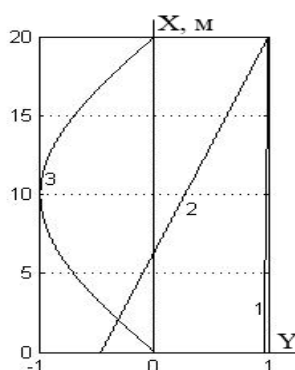


Рис.7. Собственные функции
Fig.7. Own functions

Первая и вторая формы колебаний сходны с аналогичными формами систем с двумя степенями свободы. Причина в наличии двух тяжёлых сосредоточенных масс по концам стержня. По первой форме обе массы движутся синфазно в одном направлении, почти не меняя расстояния между собой. По второй форме колебаний массы находятся в противоположных фазах движения. Третья высокая частота определяется колебаниями стальной непрерывной части системы, и форма колебаний представляется кривой, близкой к полуволне синусоиды. В этом случае концы стержня с дискретными массами остаются почти неподвижными. По-видимому, формы, диктуемые непрерывной частью стержня, будут обладать таким свойством.

Представляют интерес значения коэффициентов демпфирования μ , приведённые выше в таблице. В первом и втором случаях коэффициенты демпфирования незначительны по величине, так как при небольших частотах скорости перемещения малы и силы сопротивления, пропорциональные им, в сумме получаются также небольшими.

Почему же уменьшается второй коэффициент по сравнению с первым? Суть в том, что при второй собственной форме колебаний верхняя и нижняя части стержня имеют разные знаки деформаций и создают результирующие силы сопротивления противоположные по направлениям и частично погашающие друг друга.

В рамках данной работы ортогональность собственных форм не доказывается. Для этого потребуются специальные исследования по таким смешанным механическим системам. В то же время подобие ортогональности первой и второй форм отчётливо проглядывается по рис.7.

Также можно предположить, что более высокие формы колебаний будут диктоваться континуальной частью стержня и представляться синусоидами с последовательно увеличивающимся количеством полуволн. Основанием для такого утверждения служит известное свойство собственных форм увеличивать количество узловых точек при каждом повышении их номера.

Вывод:

1. Продольные колебания вертикальных стержней, находящихся вблизи эпицентра землетрясений, являются опасными для их прочности и устойчивости.

2. Методы конечных разностей и координатного спуска позволяют создавать универсальные алгоритмы и компьютерные программы, легко решающие сложные спектральные задачи.

3. Данную разработку можно адаптировать к колебаниям стержней переменного сечения, к колебаниям континуально-дискретных стержней.

4. До настоящего времени исследования о случайных колебаниях зданий и строительных сооружений, а также и нормативные документы посвящались горизонтальным сейсмическим воздействиям и вызванным ими поперечным изгибным колебаниям.

Между тем, приведённые здесь примеры свидетельствуют о необходимости расширения такой тематики исследований с включением и других типов колебаний: комбинаций продольных с поперечными, угловыми, крутильными, параметрическими и т.д.

Библиографический список:

1. Корчинский В.Л., Бородин Л.А. и др. Сейсмостойкое строительство зданий. М., Высшая школа, 1971. -320 с.
2. Назаров Ю.П. Расчётные параметры волновых полей сейсмических движений грунта. –М.: Наука, 2015. 374 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
4. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые колебания континуально-дискретной многопролётной балки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Труды X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2011. №4, часть 2. С. 198-200.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. - 656 с.
6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
7. Клаф З., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
8. I.V. Kudinov, V.A. Kudinov. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. Journal of Engineering Physics and Thermophysics (2015): Vol. 88, № 2, pp. 406-422.
9. Amabili, M., Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, New York, USA. (2008)
10. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries / E. Carrera, G. Giunta, P. Nali [and others] // Computers and Structures. 2010. V. 88, № 5-6. pp. 283-293.
11. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
12. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K. Free vibration of non-uniform EulerBernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 318. pp. 965-981.
13. Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section / A.A Haasen, T. Abdelouahed, A.M. Sid [and others.] // Journal of Vibration and Control. 2011. V. 17, № 2. pp. 311-318.

14. Maurini C., Pofiri M., Pouget J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. V. 298, № 4-5. pp. 918-933.
15. Zheng T. X., Ji T. J. Equivalent representations of beams with periodically variable crosssections // *Engineering Structures*. 2011. V. 33, № 3. pp. 706-719.
16. Tejada A. A Mode-Shape-Based Fault Detection Methodology for Cantilever Beams: Tech. Rep.: CR-2009-215721: NASA, 2009.
17. Alshorbagy A. E., Eltahaer M. A., Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method // *Applied Mathematical Modelling*. 2011. V. 35, № 1. pp. 412-425.
18. Huang Y., Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section // *Journal of Sound and Vibration*. 2010. V. 329, № 11. pp. 2291-2303.
19. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM // *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2013. V. 16, № 2. pp. 405-418.
20. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S. An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams // *Meccanica*. 2010. V. 45, № 6. pp. 743-752.
21. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected doublefunctionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load // *Composite Structures*. 2012. V. 94, № 9. pp. 2861-2878.
22. Shahba A., Attarnejad R., Hajilar S. Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams // *Shock and Vibration*. 2011. V. 18. pp. 683-696.

References:

1. Korchinskiy V.L., Borodin L.A. i dr. Seysmostoykoye stroitel'stvo zdaniy. M., Vysshaya shkola, 1971. -320 s. [Korchinsky V.L., Borodin L.A. and others. Seismic construction of buildings. Moscow, High School, 1971. -320 p. (in Russ.)]
2. Nazarov YU.P. Raschotnyye parametry volnovykh poley seysmicheskikh dvizheniy grunta. –M.: Nauka, 2015. 374 s. [Nazarov Yu.P. The calculated parameters of the wave fields of seismic soil movements. –M.: Science, 2015. 374 p. (in Russ.)]
3. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy. M.: Nauka, 1968. 560 s. [Babakov I.M. Theory of oscillations. M.: Science, 1968. 560 p. (in Russ.)]
4. Kul'terbayev KH.P. Kinematicheskiy vzbuzhdayemyye kolebaniya kontinual'no-diskretnoy mnogoprolotnoy balki // *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo. Trudy KH Vserossiyskogo s"yezda po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki*. 2011. №4, chast' 2. S. 198-200. [Kulterbaev Kh.P. Kinematically excited oscillations of a continually-discrete multi-span beam // *Bulletin of Nizhny Novgorod University. N.I. Lobachevsky. Works of the X All-Russian Congress on the fundamental problems of theoretical and applied mechanics*. 2011. №4, part 2. pp. 198-200. (in Russ.)]
5. Samarskiy A.A. Teoriya raznostnykh skhem. M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1977. - 656 p. [Samarsky, A.A. The theory of difference schemes. M.: Science, Ch. ed. Phys.-Mat. lit., 1977. 656 p. (in Russ.)]
6. Verzhbitskiy V.M. Osnovy chislennykh metodov. M.: Vysshaya shkola, 2002. 840 s. [Verzhbitsky V.M. Basics of numerical methods. M.: Higher School, 2002. 840 p. (in Russ.)]
7. Klaf Z., Penziyen Dzh. Dinamika sooruzheniy. M.: Stroyizdat, 1979. – 320 s. [Clough Z., Penzien J. Dynamics of structures. M.: stroyizdat, 1979. - 320 p. (in Russ.)]
8. I.V. Kudinov, V.A. Kudinov. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* (2015): Vol. 88, № 2, pp. 406-422.
9. Amabili, M. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, New York, USA. (2008)
10. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries / E. Carrera, G. Giunta, P. Nali [and others] // *Computers and Structures*. 2010. V. 88, № 5-6. pp. 283-293.
11. Elishakoff I. *Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
12. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K. Free vibration of non-uniform EulerBernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. V. 318. pp. 965-981.
13. Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section / A.A Haasen, T. Abdelouahed, A.M. Sid [and others] // *Journal of Vibration and Control*. 2011. V. 17, № 2. pp. 311-318.
14. Maurini C., Pofiri M., Pouget J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. V. 298, № 4-5. pp. 918-933.
15. Zheng T. X., Ji T. J. Equivalent representations of beams with periodically variable crosssections // *Engineering Structures*. 2011. V. 33, № 3. pp. 706-719.
16. Tejada A. A Mode-Shape-Based Fault Detection Methodology for Cantilever Beams: Tech. Rep.: CR-2009-215721: NASA, 2009.

17. Alshorbagy A. E., Eltaher M. A., Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method // *Applied Mathematical Modelling*. 2011. V. 35, № 1. pp. 412-425.
18. Huang Y., Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section // *Journal of Sound and Vibration*. 2010. V. 329, № 11. pp. 2291-2303.
19. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM // *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2013. V. 16, № 2. pp. 405-418.
20. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S. An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams // *Meccanica*. 2010. V. 45, № 6. pp. 743-752.
21. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected doublefunctionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load // *Composite Structures*. 2012. V. 94, № 9. pp. 2861-2878.
22. Shahba A., Attarnejad R., Hajilar S. Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams // *Shock and Vibration*. 2011. V. 18. pp. 683-696.

Сведения об авторах:

Культербаев Хусен Пшимурзович - доктор технических наук, профессор кафедры «Строительные конструкции и механика».

Абдул-Салам Игаб Мазен – магистрант.

Пайзулаев Магомед Муртазалиевич - кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивления материалов, теоретической и строительной механики.

Information about the authors.

Husen P. Kulterbaev –Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of Building construction and mechanics.

Abdul-Salam Igab Mazen – undergraduate.

Magomed M. Payzulaev – Cand. Sci. (Technical), As. Prof., Head of the Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics.

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 10.05.2018.

Принята в печать 30.08.2018.

Conflict of interest.

Received 10.05.2018.

Accepted for publication 30.08.2018.