УДК 681.382

Кобзаренко Д.Н.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕСОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

Kobzarenko D.N.

MATHEMATICAL MODELING OF THE THERMOPHYSICAL PROCESSES IN SEMICONDUCTOR THERMOELECTRIC CONVERTERS

Рассмотрена математическая модель слоистого термоэлектрического преобразователя энергии, рассчитанного на большие токи питания. Получены тепловые поля и поля термомеханических напряжений в нем. Показаны преимущества сильноточной слоистой конструкции термоэлементов перед классической П-образной.

***Ключевые слова**: математическая модель, температурный режим, полупроводниковый термоэлектрический преобразователь, температурное поле, теплообмен, термомеханические напряжения.*

This paper presents a mathematical model of layered thermoelectric energy Converter, designed for high current power supply. The obtained thermal fields and fields of thermo-mechanical stresses in it. Advantages of high-current layered design elements before the classic U-shaped.

***Key words:** mathematical model, temperature mode, semiconductor thermoelectric Converter, temperature field, heat transfer, thermo-mechanical stress.*

При проектировании термоэлектрических холодильных установок средней мощности, рассчитанных на величину холодопроизводительности до 1,0-1,2 кВт целесообразным является использование сильноточных термоэлектрических батарей (ТЭБ), надежность которых повышается за счет уменьшения количества паяных соединений в термоэлементах (ТЭ). Однако при реализации сильноточных ТЭБ в классическом П-образном виде возникает проблема, связанная с обеспечением их термомеханической надежности. В данном конструктивном исполнении ТЭ при увеличении значения тока питания, и, соответственно удельных тепловых потоков на его холодных и горячих спаях, резко возрастают термомеханические напряжения вследствие теплового расширения (сужения) материалов, что во многом сказывается на надежность функционирования ТЭБ. В этих условиях необходимо принятие определенных конструктивных мер для снижения их величины.

В настоящей работе предлагается к рассмотрению расчет тепловых полей и полей термомеханических напряжений в данной конструкции ТЭ.

Расчетная схема определения теплового поля в слоистом ТЭ приведена на рис.1. Области 1, 3 и 5 – коммутационные пластины. 2 и 4 – термоэлектрический материал.

Система дифференциальных уравнений теплопереноса для этой схемы имеет вид:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + j^2 \Omega_1 = C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + j^2 \Omega_2 = C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} + j^2 \Omega_3 = C_3 \frac{\partial T_3}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\lambda_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} + \lambda_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} + j^2 \Omega_4 = C_4 \frac{\partial T_4}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\lambda_5 \frac{\partial^2 T_5}{\partial x^2} + \lambda_5 \frac{\partial^2 T_5}{\partial y^2} + j^2 \Omega_5 = C_5 \frac{\partial T_5}{\partial t}, \quad (5)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Ω – удельное электрическое сопротивление, j – плотность электрического тока, C – объемная теплоемкость, T – температура, t – время.

Начальные, граничные условия и условия сопряжения имеют вид:

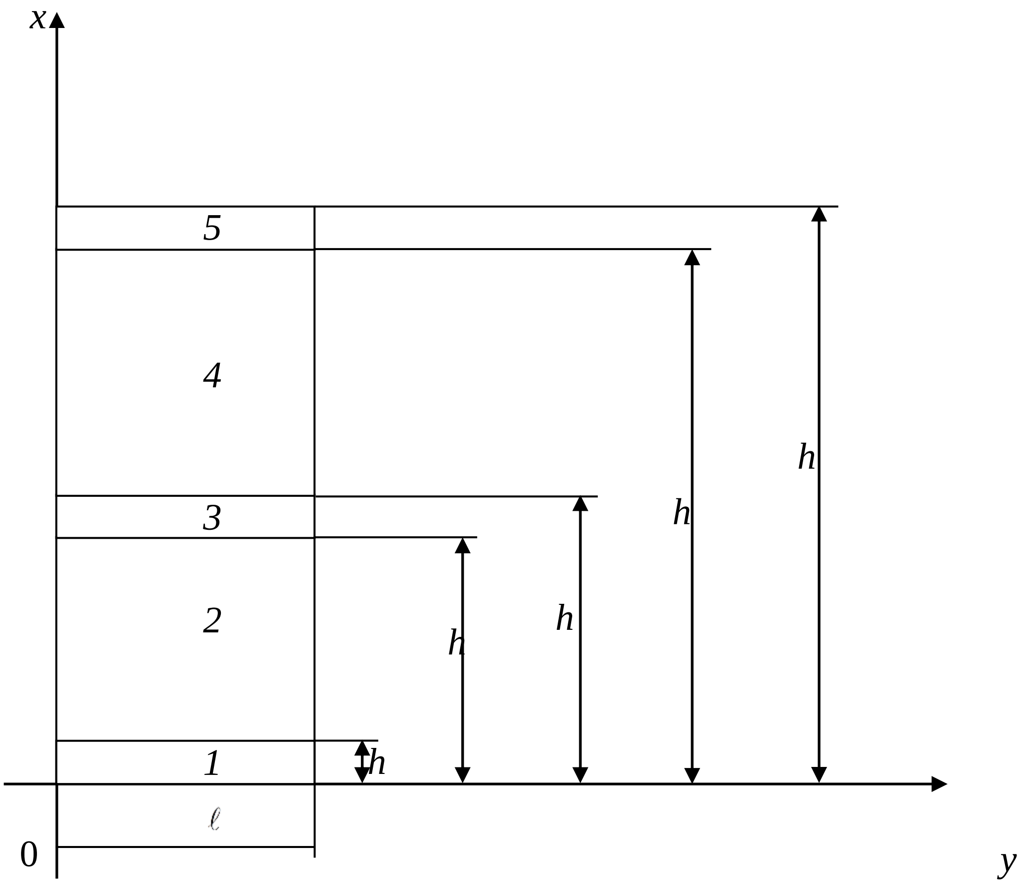

Рисунок 1 - Расчетная схема

$$T_{1,2,3,4} = T_{ср} \text{ при } t = 0, \tag{6}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \beta_{mc}(T_1 - T_{mc}) \text{ при } x = 0, 0 < y < \ell, \tag{7}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + \alpha_{12} j T_2 \text{ при } x = h_1, 0 < y < \ell, \tag{8}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - \alpha_{23} j T_2 = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \text{ при } x = h_2, 0 < y < \ell, \tag{9}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} - \alpha_{34} j T_4 \text{ при } x = h_3, 0 < y < \ell, \tag{10}$$

$$\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} + \alpha_{45} j T_4 = \lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x} \text{ при } x = h_4, 0 < y < \ell, \tag{11}$$

$$\lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x} = \beta_{mc}(T_5 - T_{mc}) \text{ при } x = h_5, 0 < y < \ell, \tag{12}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \beta(T_1 - T_{ср}) \text{ при } y = 0 \text{ и } \ell, 0 \le x \le h_1, \tag{13}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \beta(T_2 - T_{ср}) \text{ при } y = 0 \text{ и } \ell, h_1 < x \le h_2, \tag{14}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} = \beta(T_3 - T_{ср}) \text{ при } y = 0 \text{ и } \ell, h_2 < x \le h_3, \tag{15}$$

$$\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial y} = \beta(T_4 - T_{ср}) \text{ при } y = 0 \text{ и } \ell, h_3 < x \le h_4, \tag{16}$$

$$\lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial y} = \beta(T_5 - T_{ср}) \text{ при } y = 0 \text{ и } \ell, h_4 < x \le h_5, \tag{17}$$

где $T_{ср}$ – температура окружающей среды, α – коэффициент термо-э.д.с., β – коэффициент теплообмена с окружающей средой, β_{mc} – коэффициент теплообмена с системой теплосброса, T_{mc} – температура системы теплосброса.

Решение системы уравнений (1)-(5) с соответствующими начальными и граничными условиями (6)-(17) аналитическим методом затруднительно, при этом полученное решение будет непригодно для анализа ввиду большой сложности. В этом случае целесообразно использовать численные методы решения. Для задач со сложной геометрией наиболее оптимальным подходом является поиск решения с помощью метода конечных элементов [4].

Общее решение данной задачи методом конечных элементов осуществляется в следующей последовательности.

Вводится конечно-элементное представление:

$$\tilde{\varphi}(x,y,t) = \tilde{\varphi}_0(x,y,t) + \sum_{k=1}^{K} N_k(x,y)\varphi_k(t), \tag{18}$$

$$k = 1,2,\ldots,K$$

где чертой сверху обозначено приближенное решение; K – суммарное число узловых точек; $\tilde{\varphi}_0(x,y,t)$ выбирается так, чтобы точно удовлетворялись начальные и граничные условия; функция $N_k(x,y)$ - пробная функция; коэффициент $\varphi_k(t)$ - неизвестны и определяются из системы уравнений, получаемых из исходного уравнения.

Каждое из исходных уравнений (1)-(5) можно записать в символьном виде

$$L(T)=0, \tag{19}$$

Если подставить (19) в (18), то оно не будет тождественно удовлетворяться. Следовательно, можно записать

$$L(T)=R,$$

где величина R - невязка уравнения.

Для определения коэффициентов $\varphi_k(t)$ используется система уравнений Галеркина:

$$\int_D N_m(x,y)R(x,y,t)dxdy=0, \qquad m=1,\dots K$$

Для поиска решения стационарной задачи использованы изопараметрические элементы треугольной формы. На рис.2 представлены изопараметрические треугольные элементы двух типов. Приближенное решение в этом случае может быть представлено в виде:

$$\tilde{\varphi}(x,y)=\varphi_a N_a(\zeta,\eta)+\varphi_b N_b(\zeta,\eta)+\varphi_c N_c(\zeta,\eta), \qquad если\ x,y\in e_{abc},$$

$$\tilde{\varphi}(x,y)=\varphi_d N_d(\zeta,\eta)+\varphi_e N_e(\zeta,\eta)+\varphi_f N_f(\zeta,\eta), \qquad если\ x,y\in e_{def},$$

где базисные функции $N_j(\zeta,\eta)$ определяются как

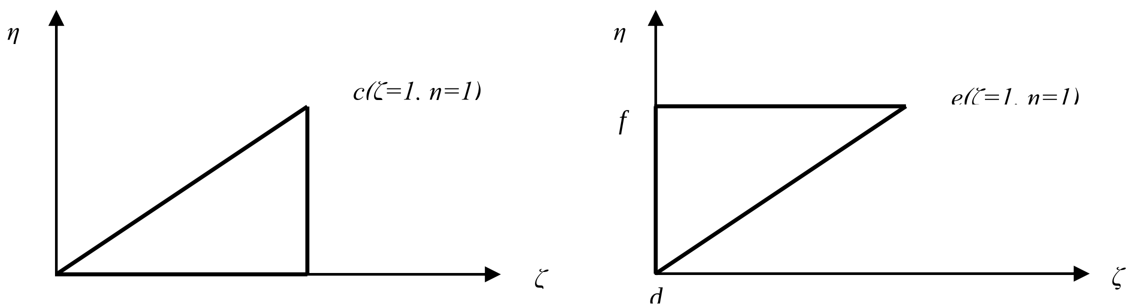

Рисунок 2 - Треугольные изопараметрические элементы двух типов

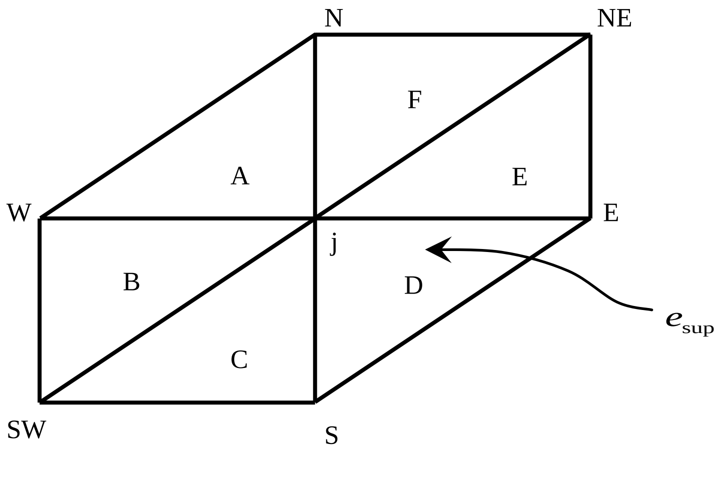

Рисунок 3 - Шесть треугольных элементов e_{SUP}, окружающих точку сетки k

$$N_a(\zeta,\eta)=1-\zeta, \qquad N_b(\zeta,\eta)=\zeta-\eta, \qquad N_c(\zeta,\eta)=\eta,$$
$$N_d(\zeta,\eta)=1-\eta, \qquad N_f(\zeta,\eta)=\eta-\zeta, \qquad N_e(\zeta,\eta)=\zeta.$$

Выбирая для уменьшения невязки функцию *R(x,y)* ортогональной ко всем базисным функциям $N_k(x,y)$, и учитывая, что они обладают локальным носителем только на элементах, расположенных вокруг точки сетки *k*, имеем:

$$(R,N_k)=K_A+K_B+K_C+K_D+K_E+K_F,$$

где

$$K_p=\iint_{e_p}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial N_k}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}\frac{\partial N_k}{\partial y}+2N_k\right)dx\,dy, \qquad p=A,B,C,D,E,F.$$

Элементы A, … , F, как показано на рис.3, окружают точку сетки *k*.

По данной методике осуществлен численный расчет температурного поля слоистого ТЭ. Основные результаты вычислительного эксперимента приведены на рис.4-8.

На рис.4 приведена структура ТЭ с геометрическими размерами и наложенной на нее конечноэлементной сеткой.

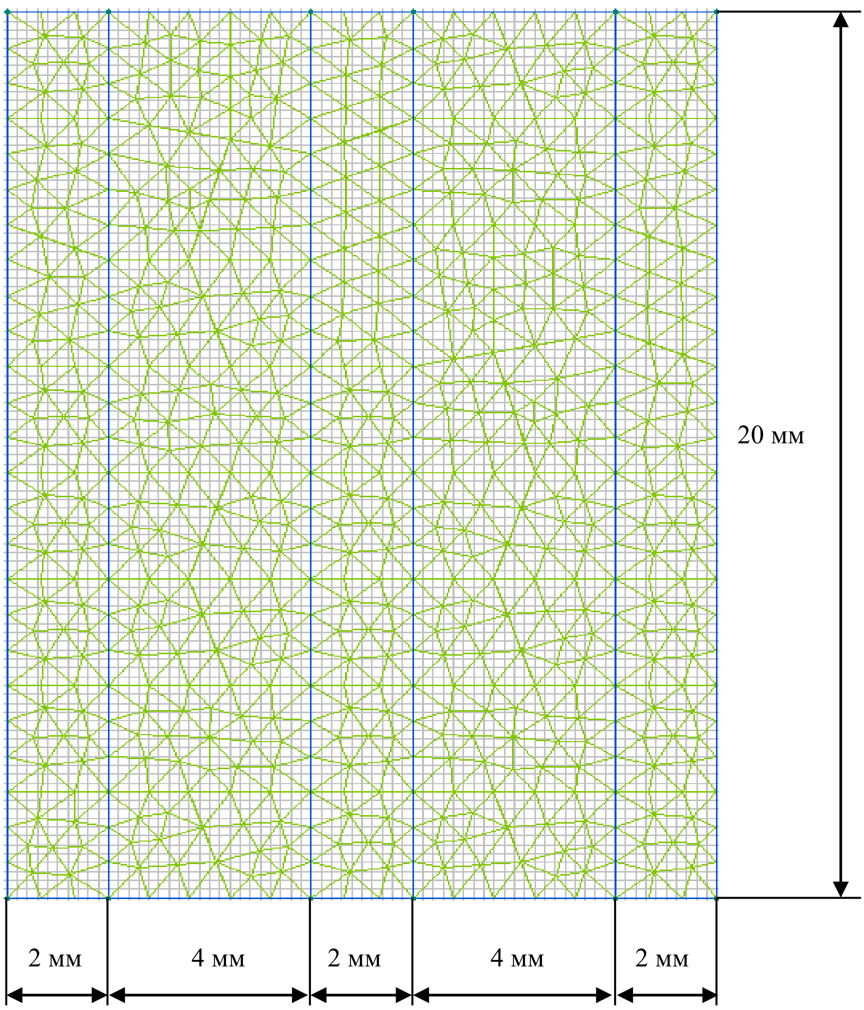

Рисунок 4 - Структура слоистого ТЭ с конечноэлементной сеткой

Размер ячейки сетки подбирается исходя из определяющего размера.

На рис. 5-6 показано соответственно двумерное температурное поле слоистого ТЭ, а также распределение плотности теплового потока после выхода его на стационарный режим работы.

В качестве исходных данных принималось: $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_5$=395 Вт/(м·К), $\lambda_2=\lambda_4$=1,5 Вт/(м·К), $\rho_1=\rho_3=\rho_5=0{,}0172\cdot10^{-6}$ Ом·м, $\rho_2=\rho_4=10{,}65\cdot10^{-6}$ Ом·м, $C_1=C_3=C_5$=383 Дж/(кг·К), $C_2=C_4$=123 Дж/(кг·К), T_{cp}=293 К, T_0=291 К, $\alpha=0{,}2\cdot10^{-3}$ В/К, β=10 Вт/(м^2·К), T_{mc}=291 К, β_{mc}=70 Вт/(м^2·К).

Величина теплового потока определялась из соотношения:

$$F_{xi} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x},\; F_{yi} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y},$$

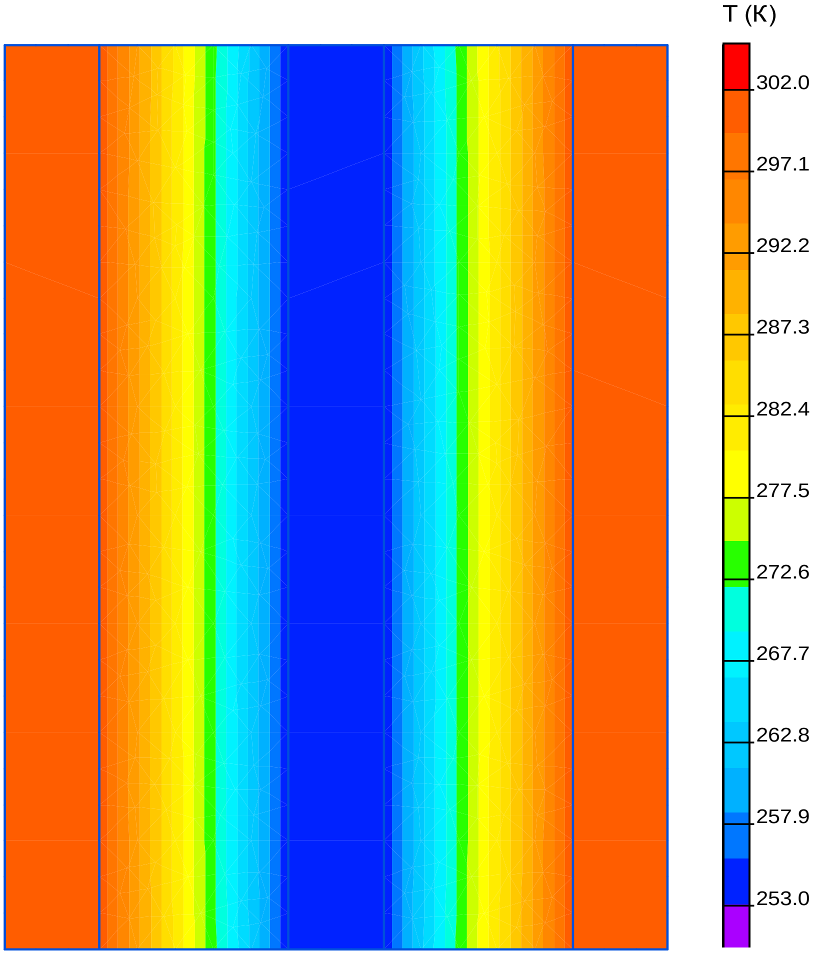

Рисунок 5 - Температурное поле слоистого ТЭ

где i=1,…,5.

На рис.7-8 показано соответственно распределение температуры ТЭ вдоль его продольной оси при различной величине тока питания, а также изменение во времени температуры в различных точках слоистого ТЭ.

Как следует из полученных данных, при использовании ТЭ в слоистом исполнении можно получить значительный перепад температур между холодной и горячей коммутационной пластиной при большой величине теплового потока.

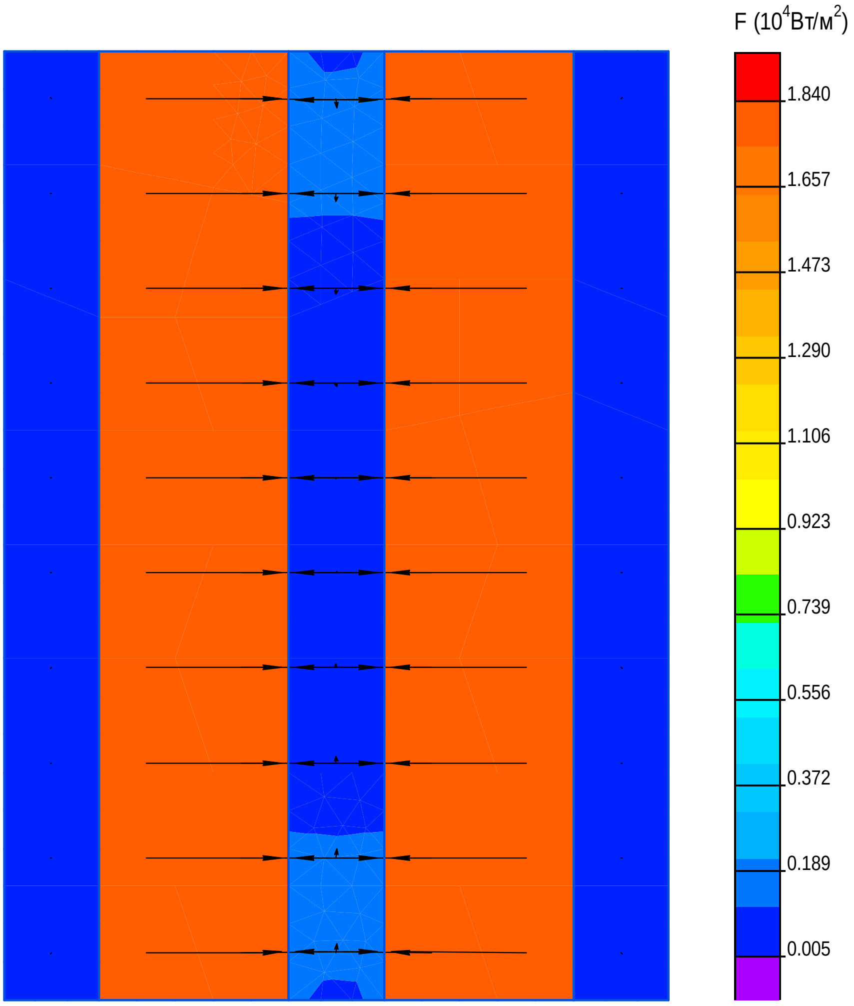

Рисунок 6 - Картина распределения тепловых потоков в слоистом ТЭ

Как следует из рис.6-7, при перепаде температур между коммутационными пластинами в 47 К тепловой поток на холодном спае ТЭ, пропорциональный его холодопроизводительности, составляет порядка 18000 Вт/м^2, что соответствует при данной геометрии ТЭ току питания в 140 А. С уменьшением величины питающего электрического тока значение теплового тока на холодном спае ТЭ и перепад температур между его спаями также уменьшаются. Согласно рис.7 при снижении тока питания ТЭ с 140 А до 80 А перепад температур между спаями ТЭ уменьшается с 47 К до 31 К, соответственно тепловой поток на холодном спае уменьшается с 18000 Вт/м^2 до 12000 Вт/м^2.

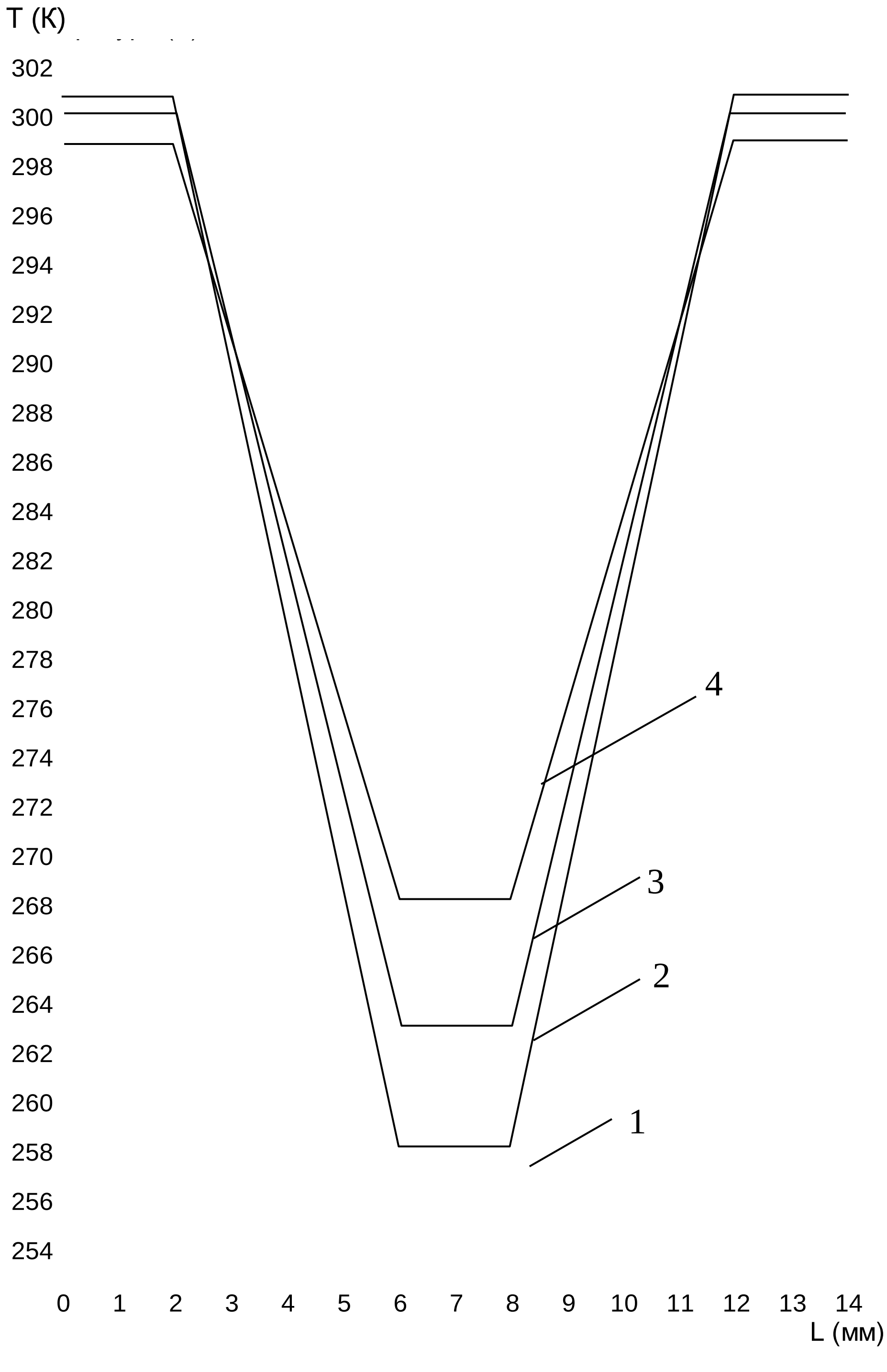

Рисунок 7 - Распределение температуры ТЭ вдоль продольной оси слоистого ТЭ при различное величине тока питания: 1 – 140 А, 2 – 120 А, 3 – 100 А, 4 – 80 А

На рис.8 приведены данные об изменении температуры холодной и горячей коммутационной пластин, а также различных точек ветви ТЭ во времени при токе питания 140 А. Согласно приведенным данным, температура в указанных точках выходит на установившийся режим примерно через 900 с. Данное обстоятельство связано с достаточно большими габаритными размерами ТЭ. При толщине коммутационных пластин 2 мм и высоте ветвей ТЭ 4 мм площадь поперечного сечения равняется $400 \cdot 10^{-6}$ м^2. При этом, как следует из расчетных данных, целесообразным будет являться предусмотреть съем теплоты не только поперечного сечения равняется $400 \cdot 10^{-6}$ м^2. При этом, как следует из расчетных данных, целесообразным будет являться предусмотреть съем теплоты не только с горячих коммутационных пластин, но и также с близлежащей к ним поверхности ветвей ТЭ. В данном конструктивном исполнении может быть предложен дополнительный теплосъем примерно с 1/3 боковой поверхности ТЭ.

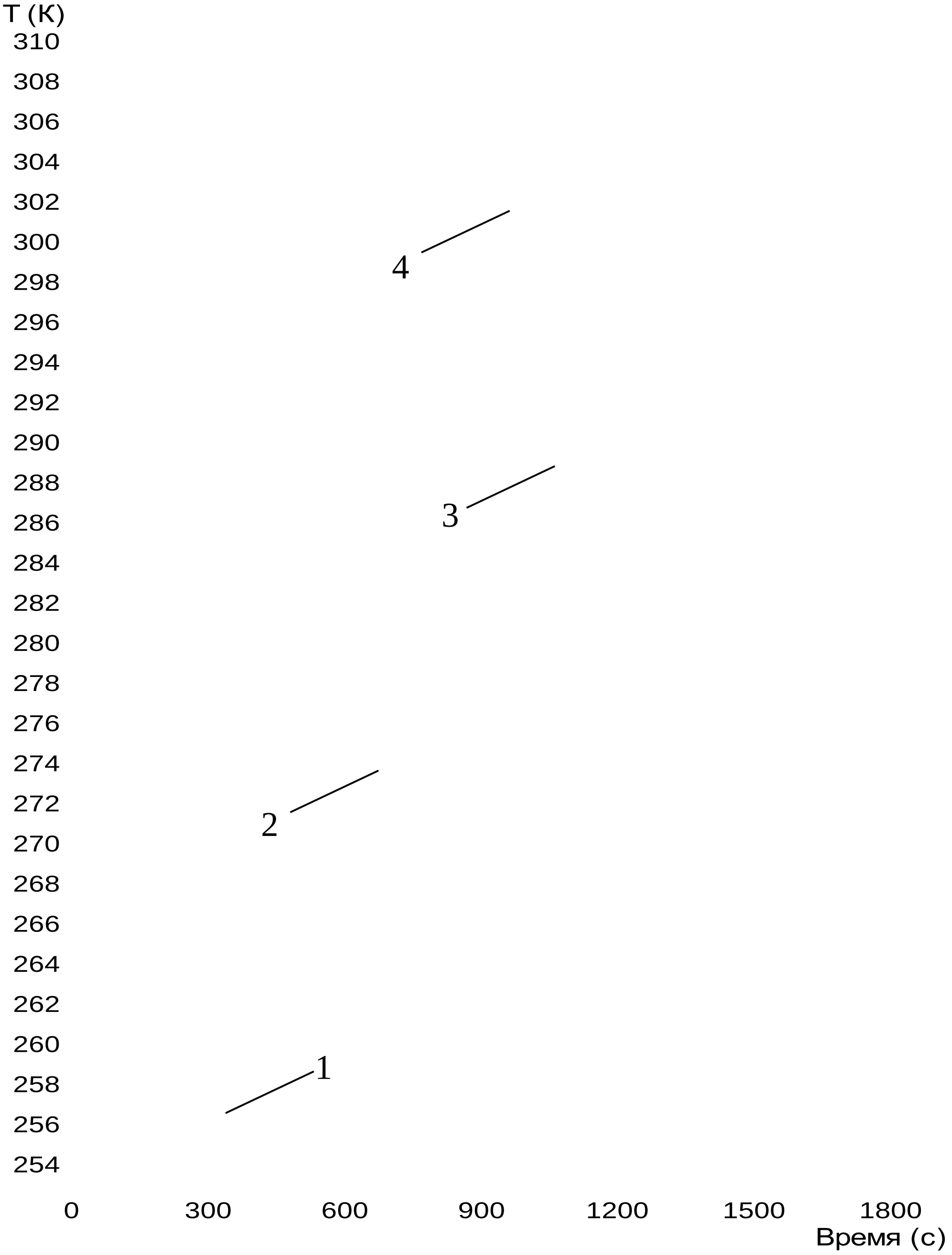

Рисунок 8 - Изменение температуры в различных точках слоистого ТЭ вдоль продольной оси во времени

Для оценки термомеханических характеристик ТЭ слоистой конструкции был произведен расчет возникающих в нем механических напряжений и деформаций, являющихся следствием теплового расширения материалов.

Расчет производился также с использованием метода конечных элементов. При этом, математическая формулировка задачи имела следующий вид.

Температурная деформация материала определяется коэффициентами линейного расширения и изменением температуры относительно температуры недеформированного состояния. Составляющая начальной термической деформации для изотропного материала (для упрощения расчетов термоэлектрический материал, из которого изготавливались ветви ТЭ, также принимался изотропным) имеет вид:

$$\{\varepsilon_0\} = (1+\nu)\begin{Bmatrix}\gamma\\ \gamma\\ 0\end{Bmatrix}\Delta T\ , \tag{20}$$

где ν - коэффициент Пуассона, γ - коэффициент линейного расширения материала, ΔT – перепад температуры между деформированным и недеформированным состоянием.

Соотношение между механическими напряжениями и деформациями выражается зависимостью:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \tag{21}$$

где $[D] = \dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$ – матрица упругости, E – модуль Юнга,

$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\delta_x}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\delta_y}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\delta_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\delta_y}{\partial y}\end{Bmatrix}$ – деформация, $\begin{Bmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{Bmatrix}$ – компоненты вектора перемещений.

Уравнения статического равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = -f_x\\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} = -f_y\end{cases}, \tag{22}$$

где f_x, f_y – компоненты вектора плотности объемной силы, σ_x, σ_y, τ_{xy} – нормальные и касательное механические напряжения по осям.

Решение уравнений (20)-(22) совместно с граничными условиями, определяющими наличие по всем граням системы нулевого нормального давления, распределение температуры, определяемого при решении уравнений (1)-(19), а также наличие упругих подвесов в крайних точках ТЭ, дает возможность получить двумерную картину механических напряжений, деформаций и перемещений.

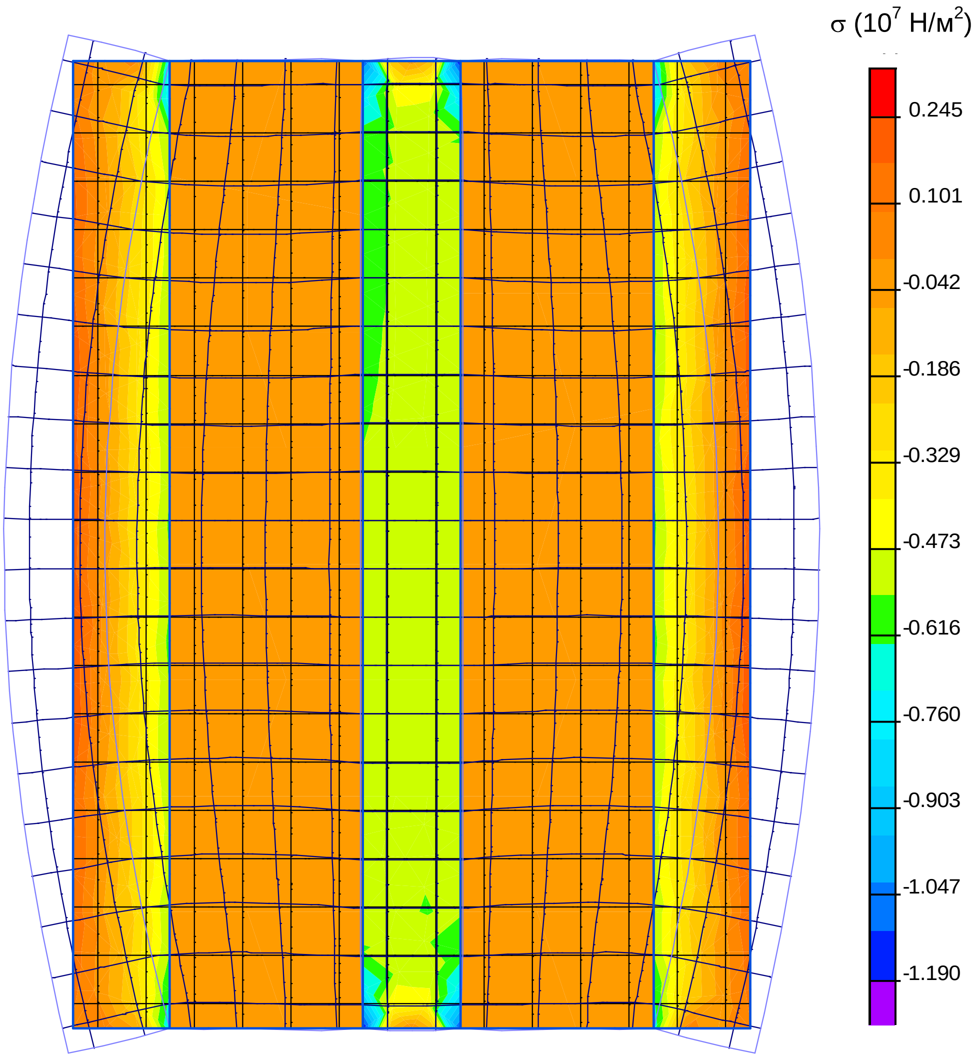

Рисунок 9 - Картина распределения механических напряжений в слоистом ТЭ

Результаты вычислений приведены на рис.9-10. Расчеты выполнены при следующих исходных данных: $E=1{,}2\cdot10^{6}$ Н/м^2, $\nu=0{,}3$ $\gamma=22{,}2\cdot10^{-6}$ 1/К для термоэлектрического материала и $E=1{,}2\cdot10^{11}$ Н/м^2, $\nu=0{,}34$ $\gamma=16{,}8\cdot10^{-6}$ 1/К для медных коммутационных пластин. Предел прочности термоэлектрического материала составляет $1{,}0\cdot10^{7}$ Н/м^2, коммутационных пластин – $3{,}2\cdot10^{8}$ Н/м^2.

На рис.9 показано двумерное поле механических напряжений для слоистого ТЭ при токе питания 120 А, что соответствует величине теплового потока 16000 Вт/м^2. Как следует из приведенных данных для указанного конструктивного исполнения ТЭ величина механических напряжений не выходит за допустимые значения. Наибольшая нагрузка приходится на места контакта коммутационных пластин с ветвями ТЭ. Здесь величина механической нагрузки достигает значения $0{,}9 \cdot 10^7$ Н/м^2 для коммутационной пластины. Наибольшие механические напряжения в термоэлектрическом веществе не превышают $0{,}2 \cdot 10^7$ Н/м^2. На рис.9 также показана деформированная граница ТЭ. Как следует из рисунка, в случае слоистой конструкции ТЭ деформации относительно незначительны и связаны, прежде всего, с удлинением и расширением ТЭ с боков, что объясняется отсутствием его жесткой фиксации по краям. При этом максимальная величина перемещений не превышает 0,18 мм.

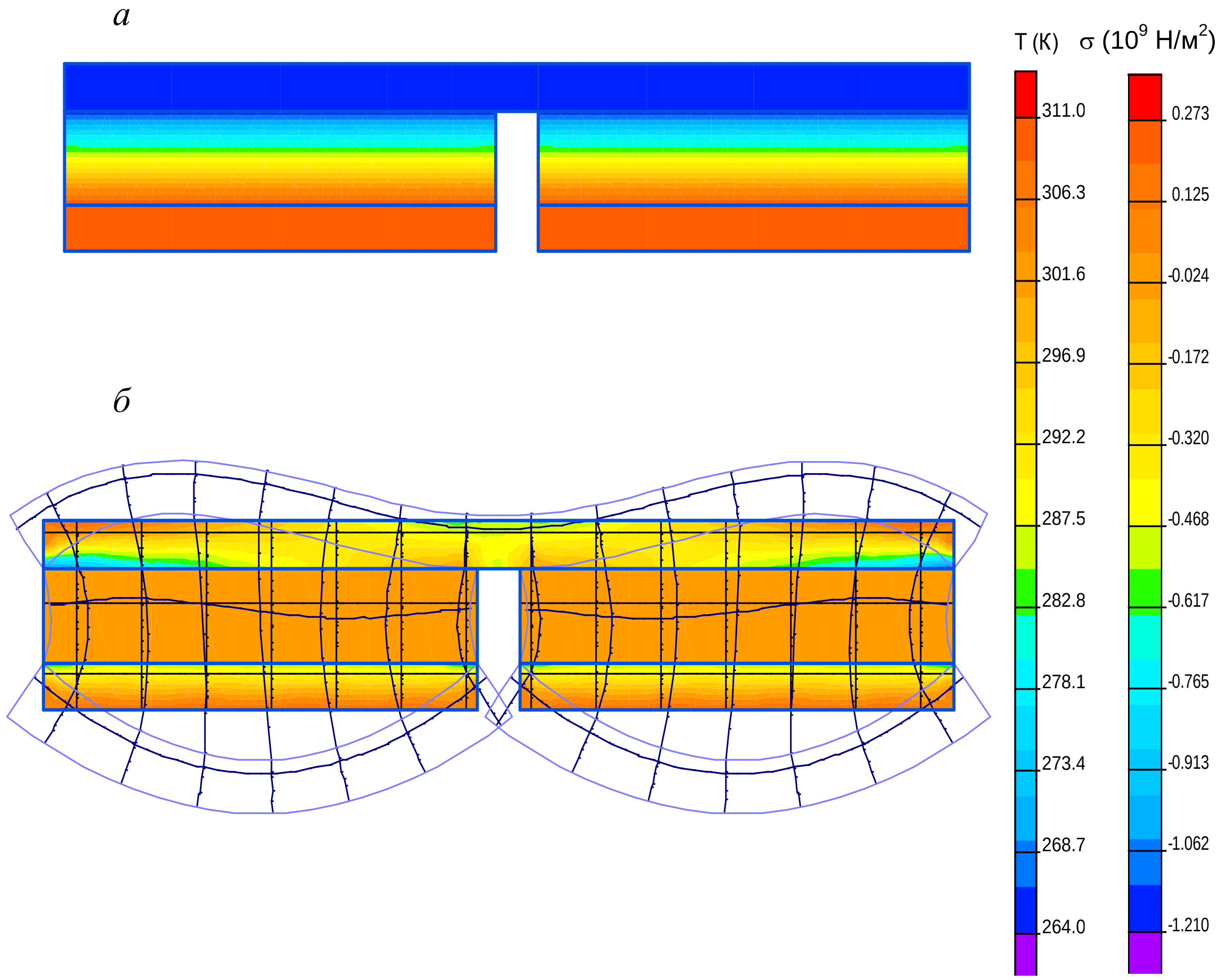

Рисунок 10 - Температурное поле (а) и поле механических напряжений (б) классической П-образной конструкции ТЭ

Для сравнения на рис.10 рассмотрена картина механических напряжений при тех же условиях для классического П-образного ТЭ. В данном случае деформации достаточно велики, и при величине тока питания 120 А без применения специальных мер по снижению термомеханических нагрузок механические усилия превышают соответствующий предел прочности материала. Например, для коммутационных пластин в стыке с ветвью ТЭ значение механических напряжений свыше $7{\cdot}10^8$ Н/м^2, что более чем в 2 раза превышает величину предела прочности меди, для термоэлектрического материала соотношение механических нагрузок и предела прочности в данном случае еще выше.

При этом, в соответствии с проведенными расчетами установлено, что для данной конструкции ТЭ наибольшим током питания без превышения допустимого значения механических нагрузок в системе является электрический ток, не превышающий величины 82 А, т.е. почти в 1,7 раза меньше, чем в случае использования слоистого ТЭ, для которого максимальная величина тока питания по расчетам составляет 140 А.

Таким образом, проведенные расчеты в полной мере подтверждают преимущества слоистой ТЭБ перед ТЭБ, выполненной из ТЭ П-образной формы. В первом случае можно получить более мощную ТЭБ без снижения ее термомеханических характеристик и надежности работы.

Библиографический список:

1. Патент РФ на изобретение № 2269183. Термоэлектрическая батарея / Исмаилов Т.А., Вердиев М.Г., Евдулов О.В., Меркухин Н.Е., опубл. 27.01.2006, БИ №3.
2. Патент РФ на изобретение № 2269184. Термоэлектрическая батарея / Исмаилов Т.А., Вердиев М.Г., Евдулов О.В., Меркухин Н.Е., опубл. 27.01.2006, БИ №3.
3. Патент РФ на изобретение № 2280919. Термоэлектрическая батарея / Исмаилов Т.А., Вердиев М.Г., Евдулов О.В., опубл. 27.07.2006, БИ №21.
4. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. Перевод с англ. – М.: Мир, 1988. – 544с.

УДК 681.382

Кобзаренко Д.Н., Рашидханов А.Т., Юсуфов Ш.А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО БЛОКА С ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ОХЛАЖДЕНИЕМ В СОСТАВЕ ШКАФА ДЛЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Kobzarenko D.N., Rashidkhanov A.T., Yusufov Sh.A.

MODELING OF A TEMPERATURE FIELD OF THE ELECTRONIC BLOCK WITH THERMOELECTRIC COOLING AS A PART OF A CASE FOR THE TELECOMMUNICATION EQUIPMENT

В статье рассмотрена математическая модель электронного блока с термоэлектрическим охлаждением в составе шкафа для телекоммуникаци-