

Для цитирования: Иwanychev Д.А. Метод граничных состояний в задачах механики для анизотропных тонких плит. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018;45(2):18-30. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-2-18-30

For citation: Ivanychev D.A. Edge state method in mechanics problems concerning anisotropic thin plates. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2018;45(2):18-30. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-2-18-30

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.21822/2073-6185-2018-45-2-18-30

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПЛИТ

Иванычев Д.А.

Липецкий государственный технический университет,
398600, Московская ул., 30, Липецк, Россия,
e-mail: lsivdml@mail.ru

Резюме. Цель. Целью работы является развитие метода граничных состояний на класс задач изгиба и кручения анизотропных тонких плит; разработка теории построения базисов пространств внутренних и граничных состояний, основываясь на общем приближенном решении задачи изгиба пластинок и формирование соотношений, определяющих искомое упругое состояние; реализация разработанной теории в решении конкретных задач. **Метод.** Выполнение поставленных задач предполагается средствами метода граничных состояний. Базисы пространств состояний, составляющих основу метода, формируются согласно фундаментальной системе многочленов Вейерштрасса. **Результат.** Доказан изоморфизм пространств внутренних и граничных состояний, позволяющий взаимно однозначно установить соответствие между элементами этих пространств. Изоморфизм пространств позволяет процесс поиска внутреннего состояния свести к изучению изоморфного ему граничного состояния. Механические характеристики представлены в виде рядов Фурье. В случае первой и второй основных задач механики в качестве коэффициентов Фурье выступают скалярные произведения, имеющие энергетический смысл: в пространстве граничных состояний – это работа внешних сил; в пространстве внутренних состояний – это внутренняя энергия упругого деформирования. В случае смешанных задач механики отыскание упругого состояния, в терминах метода граничных состояний, сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. **Вывод.** Приведено решение тестовой первой основной задачи изгиба с кручением для прямоугольной пластины из стеклопластика с соответствующими выводами, задачи кручения для пластинки нетривиальной формы, даны комментарии о необоснованности решения второй основной задачи, а также задачи со смешанными граничными условиями для прямоугольной пластинки, где на одной грани заданы одновременно скручивающие и изгибающие усилия, а противоположная грань закреплена. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задач и графическая визуализация результатов.

Ключевые слова: граничные состояния, анизотропные пластины, изгиб с кручением, задача кручения, упругое состояние

PHYSICAL-MATEMATICAL SCIENCE MECHANICS

Dmitriy A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University,
30 Moskovskaya Str., Lipetsk 398600, Russia,
e-mail: lsivdml@mail.ru

EDGE STATE METHOD IN MECHANICS PROBLEMS CONCERNING ANISOTROPIC THIN PLATES

Abstract Objectives The aims of the study are to expand the edge state method for solving bending and torsion problems concerning anisotropic thin plates, develop the theory of construction of the bases of spaces of interior and edge states based on a general approximate solution to the plate bending problem, formulate the relationships determining the desired elastic state and implement the developed theory in solving specific problems. **Methods** The fulfilment of the tasks is assumed to be based on the edge state method. The state spaces comprising the methodological basis are formed according to the fundamental system of Weierstrass polynomials. **Results** An isomorphism of interior and edge state spaces is demonstrated, allowing a correspondence between the elements of these spaces to be unambiguously established. The isomorphism of spaces allows the process of finding the internal state to be reduced to the study of the edge state isomorphic to it. The mechanical characteristics are represented in the form of a Fourier series. In the case of the first and second fundamental mechanics problems, the Fourier coefficients are represented by scalar products having an energy implication: in the space of edge states, this consists in the work of external forces; in the space of internal states, it is the internal energy of elastic deformation. In the case of mixed mechanical problems, the search for an elastic state in the terms of the edge state method is reduced to solving an infinite system of algebraic equations. **Conclusion** The solution of the first-tested basic problem of bending with torsion for a rectangular fibreglass plate with corresponding conclusions is given, as well as the problems of torsion for a plate of nontrivial form. Commentary is provided concerning the unreasonableness of the solution of the second fundamental problem, as well as the problem with mixed boundary conditions for a rectangular plate where twisting and bending forces are defined simultaneously on the one face, while the opposite face is squeezed. Both explicit and indirect signs of the convergence of the solution to the problem are presented along with a graphical visualisation of the results.

Keywords: edgy states, anisotropic plates, bending with torsion, torsion problem, elastic state

Введение. В настоящее время приближенная теория изгиба пластин с разной степенью анизотропии, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява, хорошо изучена. Исследования по теории изгиба тонких пластин связаны с работами Амбарцумяна С.А., Артюхина Ю.П., Бережницкого Л.Т., Williams M.L., Грилицкого Д.В., Isida M., Калоерова С.А., Лехницкого С.Г., Линькова А.М., Пелеха Б. Л., Максименко В.Н., Подружина Е.Г., Попова Г.Я., Прусова И.А., Reissner E., Tamate O., Тимошенко С.П., Фильштинского Л.А., Hasebe N. и др. Однако приближенность основных гипотез создает определенные трудности при численной реализации задач изгиба. Особенностью традиционных методов расчета можно отнести отсутствие универсального подхода при решении задач, большой объем вычислительных операций, большую размерность разрешающей системы уравнений.

Не смотря на все это, численным методам решения задач изгиба уделено значительное внимание в ряде работ. Например, в работе [14] рассматривается двумерная краевая задача статического поперечного изгиба тонкой прямоугольной пластинки из анизотропного материала. Прогибы пластинки определялись модифицированным методом сплайн-коллокации, сводящего к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [19] приводится методика численного определения напряженно-деформированного состояния изгибаемой тонкой ортотропной пластинки при нетрадиционных способах закрепления ее краев. На основе технической теории изгиба тонких анизотропных пластин строятся представления фун-

даментальных решений для ортотропных, пластин, имеющих каноническую форму [13]. В работе [20] построены комплексные потенциалы и интегральные представления для определения напряженно-деформированного состояния при изгибе анизотропных пластин имеющих дефекты типа трещин, отверстий и содержащих абсолютно жесткие криволинейные стержни и двумерные жесткие шайбы. Ряд работ посвящен изгибу многосвязных анизотропных пластин [8,12,18]. В настоящей работе предлагается совершенствование нового энергетического метода граничных состояний на класс задач изгиба и кручения анизотропных тонких плит.

Постановка задачи. Рассматривается упругое равновесие тонкой плиты, толщина которой мала по сравнению с другими размерами и испытывающая малые, по сравнению с толщиной, деформации (не превышающие толщины).

Такие плиты еще называют пластинками. Плоская пластинка деформируется нагрузками, распределенными по краю и приводящими к скручивающим моментам; последние, могут быть как заданными, так и реактивными, возникающие в местах закреплений (рис. 1). Пластинка толщиной h в каждой точке имеет одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Объемные силы отсутствуют [1].

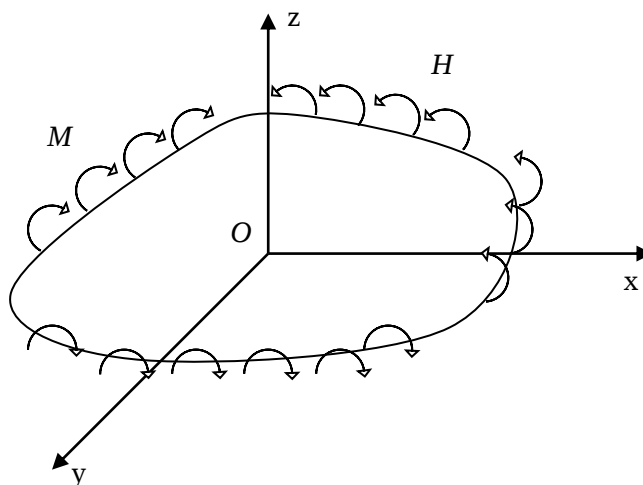


Рис. 1. Анизотропная пластинка

Fig. 1. Anisotropic plate

Приближенная теория задачи изгиба и кручения анизотропных пластин (тонких плит) рассмотрена С.Г. Лехницким [9]. Перемещения точек пластинки u и v определяются через функцию прогиба срединной плоскости $w(x, y)$ определяющей форму изогнутой срединной поверхности.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Обобщенный закон Гука имеет вид (компонента σ_{zz} пренебрегается):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\tau_{xy}; \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_{ij} – упругие параметры среды [11].

Уравнение прогибов анизотропной пластинки:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

Общее решение задачи, выражающее компоненты тензора напряжений и вектора пере-

мещений через две комплексные переменные, сопряженные аффинными преобразованиями имеет вид:

$$\begin{aligned} w &= 2 \operatorname{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]; \\ M_x &= -2 \operatorname{Re}[p_1 w_1''(z_1) + p_2 w_2''(z_2)]; \\ M_y &= -2 \operatorname{Re}[q_1 w_1''(z_1) + q_2 w_2''(z_2)]; \\ H_{xy} &= H_{yx} = -2 \operatorname{Re}[r_1 w_1''(z_1) + r_2 w_2''(z_2)]; \\ N_x &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 s_1 w_1'''(z_1) + \mu_2 s_2 w_2'''(z_2)]; \\ N_y &= 2 \operatorname{Re}[s_1 w_1'''(z_1) + s_2 w_2'''(z_2)]; \\ \sigma_{xx} &= \frac{12M_x}{h^3} z; \sigma_{yy} = \frac{12M_y}{h^3} z; \tau_{xy} = \frac{12H_{xy}}{h^3}; \\ \tau_{xz} &= \frac{6N_x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right); \tau_{yz} = \frac{6N_y}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты; H_{xy}, H_{yx} – скручивающие моменты; N_x, N_y – перерезывающие силы; p_i, q_i, r_i – константы, определяемые параметрами анизотропии a_{ij} .

Функции $w_i(z_i)$ – аналитические по своим переменным; $z_1 = x + \mu_1 y, z_2 = x + \mu_2 y$ – обобщенные комплексные переменные; $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ – комплексные корни векового уравнения:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad (5)$$

где D_{ij} – жесткости анизотропной пластинки.

$$\begin{aligned} D_{ij} &= B_{ij} \frac{h^3}{12}; \\ B_{11} &= \frac{1}{\Delta} (a_{22}a_{66} - a_{26}^2); B_{22} = \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{66} - a_{16}^2); B_{12} = \frac{1}{\Delta} (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}); \\ B_{66} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2); B_{16} = \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}); B_{26} = \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}); \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегральные значения моментов и перерезывающих сил:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz; M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz; H_{xy} = H_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \\ N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz; N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz. \end{aligned} \quad (8)$$

Целью работы является построение аналитического решения для однородной анизотропной пластинки. Ее достижению отвечает система взаимосвязанных процедур: корректная

постановка, обезразмеривание, выбор метода решения, верификация полученных результатов, графическая иллюстрация.

Методы исследования. Для решения основных задач механики в теории изгиба анизотропных пластин предлагается метод граничных состояний (МГС). Метод граничных состояний [15] является энергетическим методом решения краевых задач уравнений математической физики. Его фундамент составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}.$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (9)$$

Основную сложность формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений. Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния пластинки, занимаемой область D :

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_D \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 ds, \quad (10)$$

причем в силу коммутативности состояний среды:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_D \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 ds = \int_D \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 ds.$$

Граничное состояние определяется компонентами вектора перемещения точек границы и поверхностных усилий:

$$\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (11)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела ∂D , например для 1-го и 2-го состояния:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\partial D} p_i^1 u_i^2 dl,$$

причем в силу принципа возможных перемещений:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_{\partial D} p_i^1 u_i^2 dl = \int_{\partial D} p_i^2 u_i^1 dl.$$

Доказано, что в случае гладкой границы оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом [16]. По определению, каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий. В случае первой и второй основной задачи механики проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомых внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в явном виде:

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k. \quad (12)$$

Коэффициенты Фурье в случае первой основной задачи с заданными на границе усилиями $\mathbf{p} \in \{p_x, p_y, p_z\}$, имеют вид:

$$c_k = (\mathbf{p}, \mathbf{u}^k) = \int_{\partial D} (p_x u^k + p_y v^k + p_z w^k) dl, \quad (13)$$

где $\mathbf{u}^k \in \{u^k, v^k, w^k\}$ – вектор перемещения в базисном элементе $\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}$.

Коэффициенты Фурье в случае второй основной задачи с заданными на границе перемещениями $\mathbf{u} \in \{u, v, w\}$, имеют вид:

$$c_k = (\mathbf{u}, \mathbf{p}^k) = \int_{\partial D} (u p_x^k + v p_y^k + w p_z^k) dl, \quad (14)$$

где $\mathbf{p}^k \in \{p_x^k, p_y^k, p_z^k\}$ – вектор усилия в базисном элементе $\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}$.

Основная смешанная задача состоит в определении механических характеристик, если на одной части границы ∂D_p заданы поверхностные усилия $\mathbf{p}$, а на другой части границы ∂D_u заданы поверхностные перемещения $\mathbf{u}$. Тогда, задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_{kj} c_j = q_k, \quad Q_{kj} = 2\delta_{jk} - a_{kj}; \quad (15)$$

$$a_{kj} = \int_{\partial D_p} u_i^{(j)} p_i^{(k)} dl + \int_{\partial D_u} p_i^{(j)} u_i^{(k)} dl; \quad q_k = \int_{\partial D_u} u_i p_i^{(k)} dl + \int_{\partial D_p} p_i u_i^{(k)} dl,$$

где компоненты с верхними индексами (j) и (k) принадлежат соответствующим компонентам в базисе граничных состояний. Компоненты без индексов соответствуют заданным граничным условиям [17, 22].

Обсуждение результатов. Решение основных задач средствами МГС.

Первая основная задача. Процесс реализации решения этого класса задач проведем на примере достаточно простой тестовой задачи для прямоугольной сплошной пластинки (рис. 2) из тканевого стеклопластика горячего прессования СТЭТ с углом поворота осей анизотропии относительно координатных на угол $\alpha = \pi/6$.

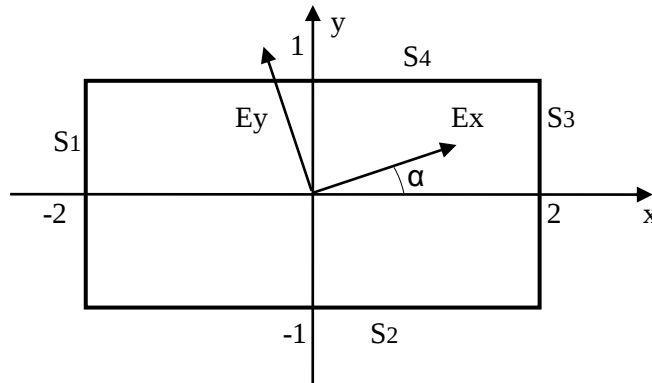


Рис. 2. Срединная плоскость прямоугольной пластинки, $z = 0$

Fig. 2. The median plane of the rectangular plate, $z = 0$

Для стеклопластика [10] (принят масштабный коэффициент $\eta^* = 10^5 \tilde{e}\tilde{a}/\tilde{m}^2$) безразмерные физические параметры среды равны: $E_x = 3.59$, $E_y = 2.93$, $G_{xy} = 0.76$, $\nu_{xy} = 1.777$.

Пластинка занимает область $D = \{(x, y, z) | -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1, -0.1 \leq z \leq 0.1\}$. Пластинка нагружена по боковым граням усилиями, приводящими к скручивающим и изгибающим моментам:

$$\{p_x, p_y, p_z\} = \begin{cases} \{0, z, 0\}, x = -2, -1 \leq y \leq 1, -0.1 \leq z \leq 0.1; \\ \{z, z, 0\}, y = -1, -2 \leq x \leq 2, -0.1 \leq z \leq 0.1; \\ \{0, -z, 0\}, x = 2, -1 \leq y \leq 1, -0.1 \leq z \leq 0.1; \\ \{-z, -z, 0\}, y = 1, -2 \leq x \leq 2, -0.1 \leq z \leq 0.1. \end{cases}$$

Упругие параметры среды:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{16} \\ a_{12}, a_{22}, a_{26} \\ a_{16}, a_{26}, a_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4021 & -0.1682 & 0.1516 \\ -0.1682 & 0.4334 & -0.0973 \\ 0.1516 & -0.0973 & 0.8844 \end{pmatrix};$$

параметры B_{ij} и D_{ij} рассчитываются по зависимостям (6).

Комплексные корни векового уравнения (5):

$$\mu_1 = -0.2716 + 1.483 i, \mu_2 = 0.1897 + 0.6772 i.$$

Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций $w_1(z_1)$ и $w_2(z_2)$. Для ограниченной односвязной области можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса:

$$\begin{pmatrix} w_1(z_1) \\ w_2(z_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_2^n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} iz_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, n=1, 2, \dots$$

На основании системы многочленов и общего решения (4) формируются базисные элементы пространства внутренних состояний (9). Базисный набор векторов перемещений при $n=2$ представлен в табл.1.

Таблица 1. Базисный набор векторов перемещений
Table 1. Basic set of displacement vectors

	u	v	w
ζ_1	$-2z$	$0.5432z$	$2x - 0.5432y$
ζ_2	$-2z$	$-0.3794z$	$2x + 0.3794y$
ζ_3	0	$2.9656z$	$-2.9656y$
ζ_4	0	$1.3543z$	$1.3543y$
ζ_5	$-4xz + 1.0864yz$	$1.0864xz + 8.5019yz$	$2x^2 - 1.0864xy - 4.2509y^2$
ζ_6	$-4xz - 0.7588yz$	$-0.7588xz + 1.6903yz$	$2x^2 + 0.7588xy - 8.8451y^2$
ζ_7	$5.9319yz$	$5.9319xz - 3.2222yz$	$-5.9319xy + 1.6111y^2$
ζ_8	$2.7087yz$	$2.7087xz + 1.0276yz$	$-2.7087xy - 0.5138y^2$

Далее проводится ортонормирование базиса внутренних состояний с помощью разработанного рекурсивно-матричного алгоритма ортогонализации [21]. Первые четыре базисных элемента, дающие нулевые скалярные произведения (10), отброшены. Базисный элемент ζ_8 линейно зависим по отношению к элементам $\zeta_5, \zeta_6, \zeta_7$.

В табл.2 приведем их ортонормированные выражения. На данном этапе формируется пространство граничных состояний (11) и вычисляются коэффициенты Фурье (13). Для решения тестовой задачи потребовалось три коэффициента Фурье:

$$\tilde{n}_1 = -0.05643; \tilde{n}_2 = 0.02696; \tilde{n}_3 = -0.0456.$$

Таблица 2. Ортонормированный базисный набор векторов перемещений
Table 2. Basic Set of Displacement Vectors

	u	v	w
ξ_1	$-3.9647xz + 1.0768yz$	$1.0768xz + 8.4269yz$	$1.9823x^2 - 1.0768xy - 4.2134y^2$
ξ_2	$-7.7246xz - 2.4122yz$	$-2.4122xz - 0.2312yz$	$3.8623x^2 + 2.4122xy + 0.1156y^2$
ξ_3	$-0.0244xz + 5.872yz$	$5.872xz - 3.1945yz$	$0.0122x^2 - 5.872xy + 1.5972y^2$

Окончательно искомые поля механических характеристик восстанавливаются по зависимостям (12):

$$\begin{aligned} u &= 0.01655xz - 0.39355yz; \\ v &= -0.39355xz - 0.3361yz; \\ w &= -0.00828x^2 + 0.39355xy + 0.16805y^2; \\ \sigma_{xx} &= 0; \sigma_{yy} = -z; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0; \tau_{xy} = -z. \end{aligned}$$

Здесь под x, y следует понимать их реальные значения, отнесенные к масштабному коэффициенту R . Нетрудно убедиться, что дифференциальное уравнение (3) и интегральные выражения (8) удовлетворяются тождественно. Форма пластинки изображена на рис. 3. Здесь и далее контур пластинок, для наглядности, изображен в гипертрофированном виде.

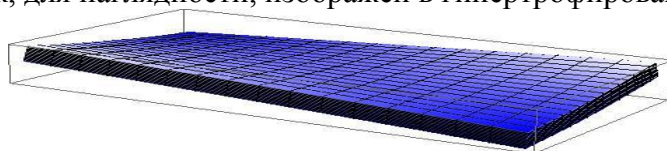


Рис.3. Форма изогнутой пластинки
Fig.3. Curved plate shape

В заключении можно сказать, что решение является строгим. Рассмотрим пластинку из того же материала, но нетривиальной формы (рис. 4).

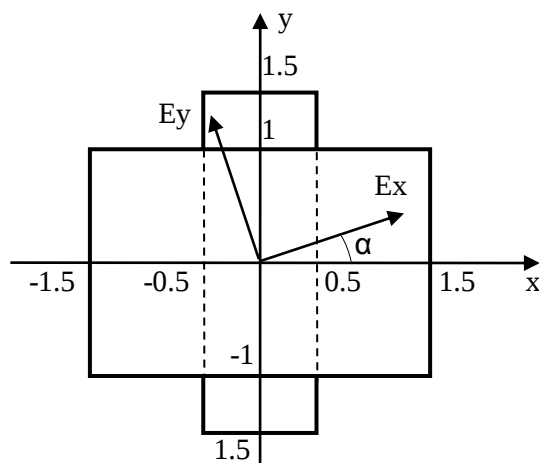


Рис. 4. Срединная плоскость пластинки нетривиальной формы, $z = 0$

Fig. 4. The median plane of the plate is non-trivial, $z = 0$

Область пластинки $D = D_1 + D_2 + D_3$,

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid -1.5 \leq x \leq -0.5, -1 \leq y \leq 1, -0.1 \leq z \leq 0.1\};$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid -0.5 \leq x \leq 0.5, -1.5 \leq y \leq 1.5, -0.1 \leq z \leq 0.1\};$$

$$D_3 = \{(x, y, z) \mid 0.5 \leq x \leq 1.5, -1 \leq y \leq 1, -0.1 \leq z \leq 0.1\}.$$

Граничные условия, имитирующие скручивание пластинки по двум граням:

$$\{p_x, p_y, p_z\} = \begin{cases} \{10z, 0, 0\}, y = -1.5, -0.5 \leq x \leq 0.5, -0.1 \leq z \leq 0.1; \\ \{-10z, 0, 0\}, y = 1.5, -0.5 \leq x \leq 0.5, -0.1 \leq z \leq 0.1; \end{cases}$$

на остальных поверхностях пластинки усилия отсутствуют. Для приближенного решения данной задачи использовался отрезок базиса внутренних состояний в $N = 69$ элементов. В табл.3 приведены ненулевые коэффициенты Фурье.

Таблица 3. Ненулевые коэффициенты Фурье

Table 3. Non-zero Fourier Coefficients

k	c_k	k	c_k	k	c_k	k	c_k	k	c_k	k	c_k
1	-0.023	1	0.0559	25	0.0003	35	0.0108	49	-0.0095	59	0.0017
2	0.5157	6	-0.013	26	-0.0044	40	-0.0079	50	-0.0008	64	-0.0054
3	-0.1255	7	0.0312	27	0.0061	41	0.0179	51	0.0038	65	0.0141
8	0.0231	8	-0.0163	32	0.0102	42	0.0019	56	0.0098	66	-0.0037
9	-0.0441	9	-0.038	33	-0.0163	43	-0.0126	57	-0.0045	67	-0.0017
10	0.0462	24	0.0011	34	0.0047	48	-0.0055	58	0.0021		

Рис. 5 представляет собой график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком правильности полученного решения.

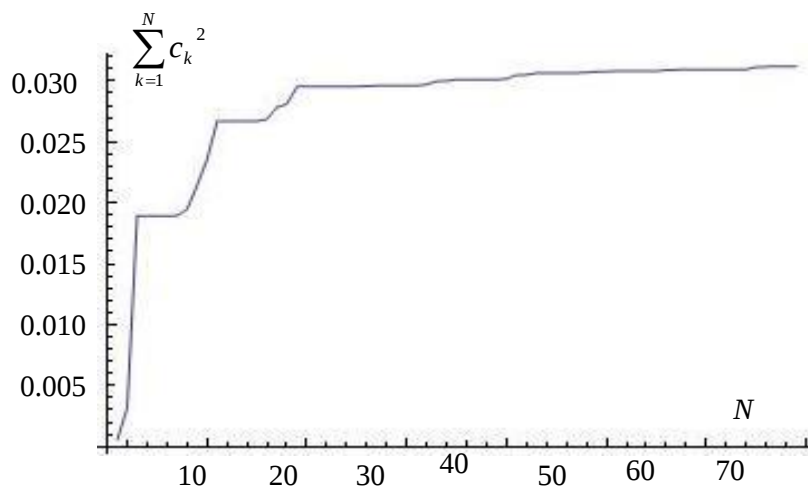


Рис. 5. Сумма Бесселя

Fig. 5. Bessel sum

На рис. 6 представлены изолинии компонента тензора напряжений на поверхности $z = 0.1$ (в силу симметрии изображена первая квадранта области).

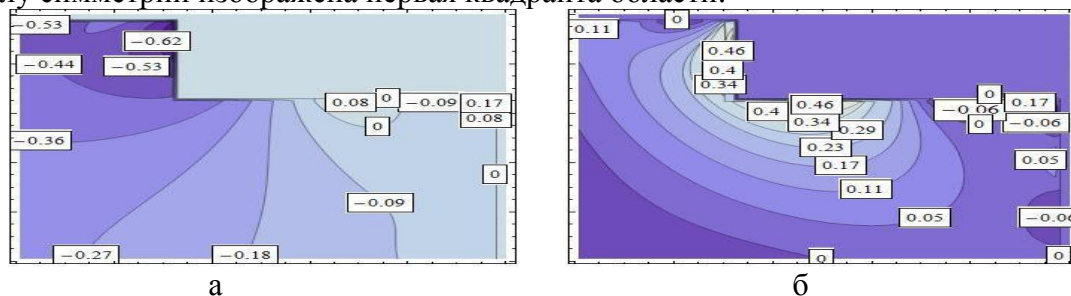


Рис. 6. Компоненты тензора напряжений: а – τ_{xy} , б – σ_x

Fig. 6. Components of the stress tensor: а – τ_{xy} , б – σ_x

где а – компоненты τ_{xy} , б – компоненты σ_x .

Контур пластинки в деформированном состоянии представлен на рис. 7.

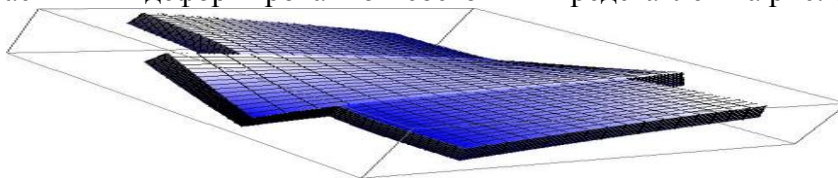


Рис. 7. Контур пластинки в деформированном состоянии
 Fig. 7. The contour of the plate in the deformed state

Результат решения первой основной задачи для пластинки нетривиальной формы – приближенное аналитическое решение.

Вторая основная задача. Во второй основной задаче механики в качестве граничных условий задается вектор перемещения точек границы, компоненты которого несвязанны между собой, и задачей является отыскание напряженно-деформированного состояния от такого рода воздействия на границу тела. В теории изгиба пластин компоненты перемещения связаны между собой зависимостями (1), в противном случае будет нарушена гипотеза прямых нормалей [9]. Таким образом, задавая выражение для компоненты перемещения w , однозначно определяются две другие составляющие, а также деформации (1) и напряжения (2) и задача в такой постановке теряет смысл.

Основная смешанная задача. Рассмотрим пластинку с теми же геометрическими размерами и упругими константами, что и в тестовой задаче (рис. 2). Один край пластинки S_4 жестко зашпелен, на противоположном краю S_2 приложены усилия, приводящие к сжимающим и изгибающим моментам

$$\mathbf{p} \in S_1 \cup S_3, \mathbf{p} = 0; \mathbf{u} \in S_4, \mathbf{u} = 0; \mathbf{p} \in S_2, \mathbf{p} = \{z, z, 0\}.$$

Матрица коэффициентов a_{kj} имеет вид (усечена до 3×10):

$$a_{kj} = \begin{pmatrix} 1, 0.1826, 0.0477, 0.0996, -0.2167, 0.4375, -0.1111, 0.4165, 0.021, -0.2085 \\ -0.1826, 1, 0.1257, 0.4412, -0.2133, 0.2865, -0.4923, 0.5297, -0.1270, -0.7769 \\ -0.0477, 0.1257, 1, -0.4679, -0.0106, 0.1004, -0.1114, 0.1596, -0.1866, 0.2966 \end{pmatrix} \text{Ко-}$$

эффициенты Фурье $q_k = q_1, q_2, q_3, \dots$ в условиях смешанных граничных условий (15):

$$q_k = -0.0245, 0.0112, -0.0053, 0.0035, -0.0028, -0.0111, 0.019, -0.0036, -0.0002, -0.0059, \dots$$

В решении данной задачи использовался базис внутренних состояний из 55 элементов. Полученное выражение для компоненты перемещения w имеет вид (сокращено в силу полной необозримости):

$$w \approx 0.017 x^2 - 0.031 x^3 - 0.0064 x^4 + \dots + 0.066 xy - 0.0645 x^2 y + 0.0097 x^3 y + \dots + 0.086 y^3 - 0.0096 xy^2 + 0.0163 x^2 y^2 - 0.022 x^3 y^2 - 0.006 x^4 y^2 + \dots$$

На рис. 8 изображен контур деформированной срединной поверхности пластинки.

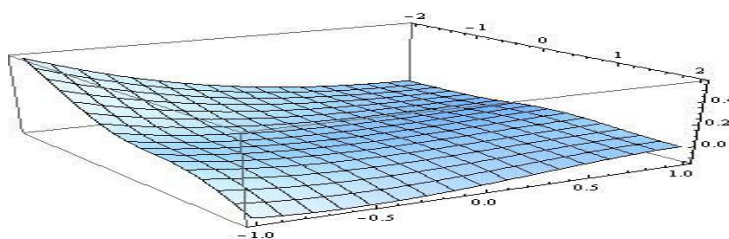


Рис. 8. Контур деформированной срединной поверхности
 Fig. 8. The contour of the deformed median surface

На рис. 9 представлены изолинии компонент тензора напряжений на поверхности

$z = 0.1$: а – компоненты σ_{yy} , б – компоненты τ_{xy} .

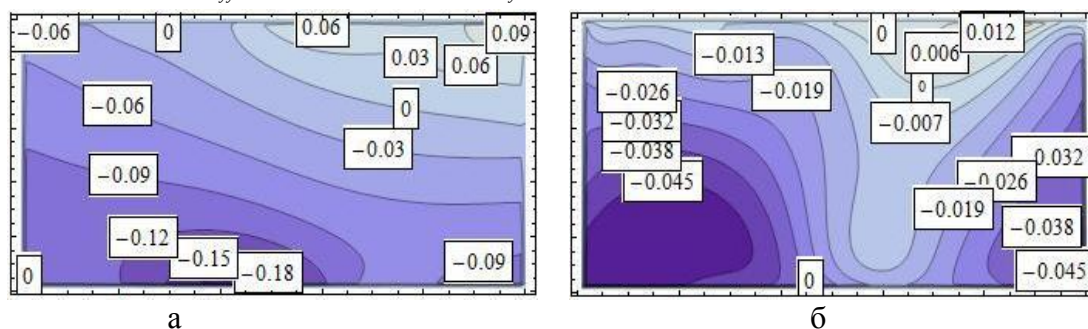


Рис. 9. Компоненты тензора напряжений: а – σ_{yy} , б – τ_{xy}

Fig. 9. Components of the stress tensor: а – σ_{yy} , б – τ_{xy}

Вывод. Анализ вышеизложенного позволяет сделать вывод о том, что метод граничных состояний оказался эффективным средством выписывания явного приближенного аналитического решения в задачах механики для анизотропных тонких плит. В работах [2–7] метод граничных состояний получил развитие на класс тел канонической формы (окружность, прямоугольник).

Библиографический список:

1. Амбарцумян С.А., Теория анизотропных пластин. М.:Наука, 1967. 268 с.
2. Иванычев Д.А., Метод граничных состояний в задачах изгиба анизотропных пластин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – сборник трудов Международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 443 с.
3. Иванычев Д.А., Исследование изгиба анизотропных тонких плит методом граничных состояний // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. – 272 с.
4. Иванычев Д.А., Решение задач изгиба анизотропных пластинок методом граничных состояний // Молодежь и наука: реальность и будущее: Материалы IV Международной научно-практической конференции / Редкол.: О.А. Мазур, Т.Н. Рябченко, А.А. Шатохин: в 4 томах. – Невинномысск: НИЭУП, 2011. Том IV: Естественные и прикладные науки. 562 с.
5. Иванычев Д.А., Бузина О.П., Исследование напряженно-деформированного состояния анизотропных пластинок методом граничных состояний // Сборник трудов «Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки». БелГУТ, Гомель, Беларусь. 2014 г.
6. Иванычев Д.А., Изгиб анизотропных пластинок // Сб. науч. Трудов междунар. Науч.- техн. конф., «проблемы и перспективы развития машиностроения», посвящ. 60-ю Липецкого государственного технического университета. Часть 2. 17-18 ноября 2016 г. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2016 г. – 356 с.
7. Иванычев Д.А., Метод граничных состояний в задачах теории анизотропной упругости. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr, 66123 Saarbrücken, Germany, 2011. 99 с.
8. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями. Издательское объединение «Вища школа», 1976, 200 с.
9. Лехницкий С.Г., Анизотропные пластинки. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 463 с.
10. Лехницкий С.Г., Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
11. Лехницкий С.Г., О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // Прикладная математика и механика. — 1938. — Т. II. — Вып. 2. — С. 181 – 210.
12. Максименко В.Н., Подружин Е.Г., Изгиб конечных анизотропных пластин, содержащих гладкие отверстия и сквозные криволинейные разрезы. Сиб. журн. индустр. матем., 9:4 (2006), С. 125–135.
13. Максименко В.Н., Подружин Е.Г., Фундаментальные решения в задачах изгиба анизотропных пластин // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, №4. С. 135-143.
14. Недорезов П.Ф., Численное исследование напряженно-деформированного состояния в задачах изгиба тонкой анизотропной прямоугольной пластинки // Изв. Сарат. ун-та. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 2.
15. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. — 2001. — Т.2, №2. — С.115-137.
16. Пеньков В.В., Метод граничных состояний в задачах линейной механики. [Текст] / В.В. Пеньков //Дисс... к. ф-м. н. – Тула, 2002. – 83 с.
17. Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Метод граничных состояний для основной смешанной задачи линейного континуума // Всероссийская конференция. Тезисы докладов. – Тула, ТулГУ, 2000. – С. 108-110.
18. Подружин Е.Г. Приложение метода сингулярных интегральных уравнений к задачам изгиба анизотропных

пластин с многосвязным контуром [Текст] / Подружин Е.Г. // дис. д. т. н. - Новосибирск, 2007. - 272 с.

19. Ромакина О.М., Шевцова Ю.В., Метод сплайн-коллокации и его модификация в задачах статического изгиба тонкой ортотропной прямоугольной пластинки // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1.
20. Рябчиков П.Е., Напряженно-деформированное состояние анизотропных пластин сложной формы при изгибе [Текст] / Рябчиков П.Е. //: диссертация ... к. ф.-м. н. – Новосибирск, 2007. - 124 с.
21. Саталкина Л.В., Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк: ЛГТУ, 2007 - С. 130 – 131.
22. Трещев А.А., Пеньков В.В., Метод граничных состояний: смешанная задача. // Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии». Сборник материалов. Тула: Тульский полиграфист, 2001. – С.76.

References:

1. Ambartsumyan S.A. Teoriya anizotropnykh plastin. M.: Nauka; 1967. 268 s. [Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka; 1967. 268 p. (in Russ.)]
2. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoyanii v zadachakh izgiba anizotropnykh plastin. Sbornik trudov Mezhdunarodnoi konferentsii "Aktual'nye problemy prikladnoi matematiki, informatiki i mekhaniki". Voronezh: Izdatel'sko-poligraficheskii tsentr Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta; 2010. 443 s. [Ivanychev D.A. The method of edge states in problems of bending of anisotropic plates. Proceedings of International conference "Relevant issues of applied mathematics, computer science and mechanics". Voronezh: Publishing and Printing Center of Voronezh State University; 2010. 443 p. (in Russ.)]
3. Ivanychev D.A. Issledovanie izgiba anizotropnykh tonkikh plit metodom granichnykh sostoyanii. Materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Sovremennyye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki". Tula: Izd-vo TulGU; 2011. 272 s. [Ivanychev D.A. Investigation of the bending of anisotropic thin plates by the edge state method. Proceedings of International scientific conference "Modern issues of mathematics, mechanics and computer science". Tula: Izd-vo TulGU; 2011. 272 p. (in Russ.)]
4. Ivanychev D.A. Reshenie zadach izgiba anizotropnykh plastinok metodom granichnykh sostoyanii. Materialy IV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Molodezh' i nauka: real'nost' i budushchee". Tom IV: Estestvennye i prikladnye nauki. Nevinnomyssk: NIEUP; 2011. 562 s. [Ivanychev D.A. Solution of the bending problems of anisotropic plates by the edge state method. Proceedings of IV International scientific-practical conference "Youth and Science: Reality and the Future". Vol. IV: Natural and Applied Sciences. Nevinnomyssk: NIEUP; 2011. 562 p. (in Russ.)]
5. Ivanychev D.A., Buzina O.P. Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya anizotropnykh plastinok metodom granichnykh sostoyanii. Sbornik trudov "Mekhanika. Nauchnye issledovaniya i uchebno-metodicheskie razrabotki". BelGUT: Gomel, Belarus; 2014. [Ivanychev D.A., Buzina O.P. Investigation of the stress-strain state of anisotropic plates by the edge states method. Collection of works "Mechanics. Scientific research and educational methodical developments". BelGUT: Gomel, Belarus; 2014. (in Russ.)]
6. Ivanychev D.A. Izgib anizotropnykh plastinok. Sb. nauch. trudov mezhdunar. nauch.- tekhn. konf. "Problemy i perspektivy razvitiya mashinostroeniya". Chast' 2. Lipetsk: Izd-vo LGTU; 2016. 356 s. [Ivanychev D.A. Bending of anisotropic plates. Proceedings of the International scientific-technical conference "Problems and perspectives of the development of machine-building". Part 2. Lipetsk: Izd-vo LGTU; 2016. 356 p. (in Russ.)]
7. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoyanii v zadachakh teorii anizotropnoi uprugosti. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2011. 99 s. [Ivanychev D.A. The method of edge states in problems of the theory of anisotropic elasticity. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2011. 99 p. (in Russ.)]
8. Kosmodamianskii A.S. Napryazhennoe sostoyanie anizotropnykh sred s otverstiyami i polostyami. Izdatel'skoe ob"edinenie "Vishcha shkola"; 1976. 200 s. [Kosmodamianskii A.S. Stress state of anisotropic media with holes and cavities. Publishing Association "Vishcha shkola"; 1976. 200 p. (in Russ.)]
9. Lekhnitskii S.G. Anizotropnye plastinki. M.: GITTL; 1957. 463 s. [Lekhnitskii S.G. Anisotropic plates. M.: GITTL; 1957. 463 p. (in Russ.)]
10. Lekhnitskii S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. M.: Nauka; 1977. 416 s. [Lekhnitskii S.G. Theory of elasticity of an anisotropic body. M.: Nauka; 1977. 416 p. (in Russ.)]
11. Lekhnitskii S.G. O nekotorykh voprosakh, svyazannykh s teoriei izgiba tonkikh plit. Prikladnaya matematika i mekhanika. 1938; II(2): 181 – 210. [Lekhnitskii S.G. On some questions connected with the theory of the bending of thin plates. 1938; II(2): 181 – 210. (in Russ.)]
12. Maksimenko V.N., Podruzhin E.G. Izgib konechnykh anizotropnykh plastin, sodержashchikh gladkie otverstiya i skvoznye krivolineinye razrezy. Sib. zhurn. industr. matem. 2006;9(4): 125–135. [Maksimenko V.N., Podruzhin E.G. Bending of finite anisotropic plates containing smooth holes and through curved sections. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2006;9(4): 125–135. (in Russ.)]
13. Maksimenko V.N., Podruzhin E.G. Fundamental'nye resheniya v zadachakh izgiba anizotropnykh plastin. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2003; 44(4):135-143. [Maksimenko V.N., Podruzhin E.G. Fundamental solutions in problems of bending of anisotropic plates. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2003; 44(4):135-143. (in Russ.)]

14. Nedorezov P.F. Chislennoe issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v zadachakh izgiba tonkoi anizotropnoi pryamougol'noi plastinki. *Izv. Sarat. un-ta. Nov.ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2009; 9(4):143-148. [Nedorezov P.F. Numerical investigation of a stress-strain state in bending problems of a thin anisotropic rectangular plate. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2009.9(4):143-148.(in Russ.)]
15. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. Metod granichnykh sostoyanii dlya resheniya zadach lineinoi mekhaniki. *Dal'nevostochnyi matematicheskiy zhurnal.* 2001; 2(2):115-137. [Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. The method of edge states for solving linear mechanics problems. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2001;2(2):115-137. (in Russ.)]
16. Pen'kov V.V. Metod granichnykh sostoyanii v zadachakh lineinoi mekhaniki. *Diss... k. f-m. n. Tula;* 2002. 83 s. [Pen'kov V.V. The method of edge states in problems of linear mechanics. *Candidate of physics and mathematical sciences thesis.* Tula; 2002. 83 p. (in Russ.)]
17. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. Metod granichnykh sostoyanii dlya osnovnoi smeshannoi zadachi lineinogo kontinuuma. *Tezisy dokladov Vserossiiskoy konferentsii.* Tula: TulGU; 2000. P. 108-110. [Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. The method of edge states for the basic mixed problem of a linear continuum. *Abstracts of All-Russian conference.* Tula: TulGU; 2000. P. 108-110. (in Russ.)]
18. Podruzhin E.G. Prilozhenie metoda singulyarnykh integral'nykh uravnenii k zadacham izgiba anizotropnykh plastin s mnogosvyaznym konturom. *Dis... d. t. n. Novosibirsk;* 2007. 272 s. [Podruzhin E.G. Application of the method of singular integral equations to the problems of the bending of anisotropic plates with a multiply connected contour. *Doctor of technical sciences thesis.* Novosibirsk; 2007. 272 p. (in Russ.)]
19. Romakina O.M., Shevtsova Yu.V. Metod splain-kollokatsii i ego modifikatsiya v zadachakh staticheskogo izgiba tonkoi ortotropnoi pryamougol'noi plastinki. *Izv. Sarat. un-ta. Nov.ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2010; 10(1):78-82. [Romakina O.M., Shevtsova Yu.V. Spline collocation method and its modification in static bending problems of a thin orthotropic rectangular plate. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2010; 10(1):78-82. (in Russ.)]
20. Ryabchikov P.E. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie anizotropnykh plastin slozhnoi formy pri izgibe. *Dissertatsiya ... k. f-m. n. Novosibirsk;* 2007. 124 s. [Ryabchikov P.E. Stress-strain state of anisotropic plates of complex shape with bending. *Candidate of physics and mathematical sciences thesis.* Novosibirsk; 2007. 124 p. (in Russ.)]
21. Satalkina L.V. Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyanii pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychislenii. *Sbornik tezisev dokladov nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta.* Lipetsk: LGTU; 2007. P. 130 – 131. [Satalkina L.V. Extension of the basis of the state space under tight constraints to the energy consumption of computations. *Abstracts of scientific conference of students and post-graduate students of Lipetsk State Technical University.* Lipetsk: LSTU; 2007. P. 130 – 131. (in Russ.)]
22. Treshchev A.A., Pen'kov V.V. Metod granichnykh sostoyanii: smeshannaya zadacha. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Aktual'nye problemy stroitel'stva i stroitel'noi industrii".* Tula: Tul'skii poligrafist; 2001. P.76. [Treshchev A.A., Pen'kov V.V. Method of edge states: a mixed problem. *Materialy International scientific and technical conference "relevant issues of construction and construction industry".* Tula: Tul'skii poligrafist; 2001. P.76. (in Russ.)]

Сведения об авторе:

Иванычев Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Общая механика».

Information about the author

Dmitriy A. Ivanychev – Cand. Sci. (Physical and Mathematical), Assoc. Prof., Department of «General Mechanics».

Конфликт интересов.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 29.03.2018.

Принята в печать 10.05.2018.

Conflict of interest.

The author declare no conflict of interest.

Received 29.03.2018.

Accepted for publication 10.05.2018