

Для цитирования: Бунтов А.Е., Гоцев Д.В. Неоднородное напряженно-деформированное состояние упругого цилиндрического тела с учетом внутренней структуры материала. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018;45(1):8-21. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-1-8-21

For citation: Buntov A.E., Gotsev D.V. Inhomogeneous stress-deformed state of an elastic cylindrical body taking into account its material internal structure. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2018;45(1):8-21. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-1-8-21

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ МЕХАНИКА

УДК 539.374

DOI: 10.21822/2073-6185-2018-45-1-8-21

НЕОДНОРОДНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

Бунтов А.Е.¹, Гоцев Д.В.²

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил

«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,
394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а, Россия,

¹e-mail: alexey.buntov@mail.ru, ²e-mail: rbgotsev@mail.ru

Резюме. *Цель.* Исследование напряженно-деформированного состояния пороупругого цилиндрического тела при радиальном равномерном сжатии. **Метод.** Математическое моделирование на основе феноменологического подхода для описания пористых сред, а также в рамках геометрически линейных соотношений теории упругости. **Результат.** Построена математическая модель, описывающая неоднородное напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела для материалов с пористой структурой при упругой работе полностью сжатой матрицы. Деформирование пористой среды под действием заданных равномерно распределенных сжимающих нагрузок разделяется на два взаимосвязанных этапа: упругое деформирование пористой сжимаемой среды и упругое деформирование полностью сжатой матрицы, обладающей свойством дальнейшей не сжимаемости. Задача нахождения напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела на каждом этапе деформирования решается в рамках плоской деформации. При этом не учитываются эффекты, связанные с тем, что рассматриваемое цилиндрическое тело имеет конечную высоту. Получены соотношения, определяющие поля напряжений и перемещений на каждом этапе деформирования. Определена зависимость внешних нагрузок, при которых начальная пористость материала достигает во всем теле нулевого значения. Построены графические зависимости компонент напряжений от координаты при различных значениях величины начального раствора пор и других физико-механических и геометрических параметров материала и конструкции. **Вывод.** Построенные аналитические зависимости описывают неоднородное распределение полей напряжений и перемещений, как на этапе деформирования материала с пористой структурой, так и на этапе деформирования материала цилиндрического тела с полностью сжатой матрицей. Данные соотношения согласуются с общими физическими представлениями о рассматриваемых процессах и допускают предельный переход к известным решениям.

Ключевые слова: пористые материалы, цилиндрическое тело, неоднородное напряженно-деформированное состояние

PHYSICAL-MATEMATICAL SCIENCE MECHANICS

INHOMOGENEOUS STRESS-DEFORMED STATE OF AN ELASTIC CYLINDRICAL BODY TAKING INTO ACCOUNT ITS MATERIAL INTERNAL STRUCTURE

Alexey E. Buntov¹, Dmitriy V. Gotsev²

The military educational and scientific center of the Air Force

*"The Air Force Academy named after Professor N.Ye. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin",
Starykh Bolshevikov Str., 54a, Voronezh 394064, Russia,*

¹e-mail: alexey.buntov@mail.ru, ²e-mail: rbgotsev@mail.ru

Abstract Objectives. An investigation of the stress-deformed state of a poroelastic cylindrical body under uniform radial compression. **Methods.** Mathematical modeling based on the phenomenological approach for the description of porous media, as well as within the framework of geometrical-linear relations of the theory of elasticity. **Results.** A mathematical model is constructed to describe the inhomogeneous stress-deformed state of a cylindrical body for materials having a porous structure under elastic operation of a fully compressed matrix. The deformation of the porous medium under uniformly distributed compressive loads is divided into two interrelated stages: the elastic deformation of the porous compressible medium and the elastic deformation of a fully compressed matrix for which further incompressibility is a defining property. The problem of determining the stress-deformed state of a cylindrical body at each stage of deformation is solved within the framework of a planar deformation. This does not take into account effects associated with the fact that the cylindrical body under consideration has a finite height. Relations determining the stress and displacement fields at each stage of deformation are obtained. The dependency of external loads is determined for which the initial porosity of the material reaches zero throughout the entire body. The graphical dependencies of the stress components on the coordinate are constructed for the different values of initial pore solution and other physical-mechanical and other material and structural geometric parameters. **Conclusion.** The constructed analytical dependencies describe the inhomogeneous distribution of stress and displacement fields at the deformation stage of materials having a porous structure and a cylindrical body with a fully compressed matrix. These relations are consistent with the general physical concepts of the processes under consideration and allow for a limiting transition to known solutions

Keywords: porous materials, cylindrical body, inhomogeneous stress-deformed state

Введение. При проходке и эксплуатации подземных сооружений различного назначения (горные выработки, подземные полости, шахтные стволы и др.) возникает необходимость решения ряда сопутствующих задач, таких как: борьба с горными ударами, взрывные подземные работы, охрана окружающей среды от загрязнения, проблемы сейсмобезопасности и др. В связи с этим возникают требования по проведению укрепительных работ горных выработок и подземных сооружений, то есть создание крепежных конструкций – крепей. Цилиндрические конструкции являются основными объектами, используемыми при возведении крепей указанных объектов подземного строительства.

Цель расчета подземных конструкций заключается в определении полей напряжений и перемещений, возникающих в элементах этих сооружений и установлении условий их прочности и устойчивости. В соответствии с результатами расчета выбираются рациональные конструкции крепей и оптимальные размеры их сечений, обеспечивающих надежную работу сооружений при минимальных затратах [1-8, 13-15].

Помимо объектов исследования механики подземных сооружений цилиндрические конструкции находят широкое применение в различных областях машиностроения и строительной механики. В работах [16-20, 22-24] строятся модели для исследования напряженно-деформированных состояний как изотропных, так и анизотропных тел при их неупругой работе.

Характерной особенностью большинства материалов является их пористость, изменяющаяся под влиянием внешних воздействий. Поэтому для решения ряда задач в областях машиностроения, строительной и горной механики необходимым является учет закономерностей, вытекающих из изучения пористых сред: закон уплотнения, характеризующий сжимаемость материалов в результате уменьшения объема пор; зависимость между деформациями и напряжениями, характерную для пористых сред.

Следует отметить, что математическому моделированию поведения пористых сред под действием статических и динамических нагрузок посвящено достаточно большое число работ [5 - 9, 21]. Однако единой теории к настоящему времени еще не создано. Основные трудности на этом пути связаны с тем, что пористые материалы также обладают свойством разносопротивляемости – под действием сжимающих напряжений вплоть до момента схлопывания пор такие материалы оказываются более податливыми, чем при дальнейшем сжатии.

Учитывая вышесказанное, проведенное в этой работе аналитическое исследование неоднородного напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела при радиальном сжатии в рамках модели среды, учитывающей пористую структуру материала при упругой работе полностью сжатой матрицы, является актуальной задачей, имеющей большое прикладное значение.

Постановка задачи. Рассмотрим вопрос об определении напряженно-деформированного состояния протяженного цилиндрического тела, с внешним радиусом b и внутренним – a (рис. 1). По внешней поверхности рассматриваемого тела действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка интенсивностью q_b , по внутренней – равномерно распределенная сжимающая нагрузка интенсивностью q_a .

При определении напряженно-деформированного состояния не учитываются краевые эффекты, связанные с тем, что цилиндрическое тело имеет конечную длину, то есть, как было указано выше, рассматривается протяженное цилиндрическое тело.

Процесс деформирования пористого материала толстостенного цилиндрического тела, находящегося под действием равномерного радиального сжатия, разделим на два взаимосвязанных этапа. Первый – упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй – упругое деформирование полностью сжатой матрицы, обладающей свойством дальнейшей несжимаемости.

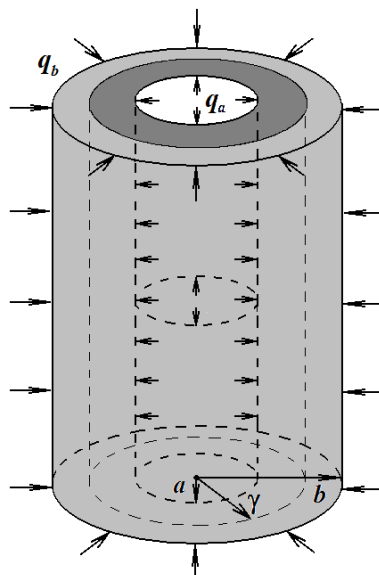


Рис. 1. Толстостенное цилиндрическое тело под действием равномерного радиального сжатия
Fig. 1. Thick-walled cylindrical body under the action of uniform radial compression

Методы исследования. Свойства пористого материала будем определять в рамках модели, механическая схема которой представлена на рис. 2.

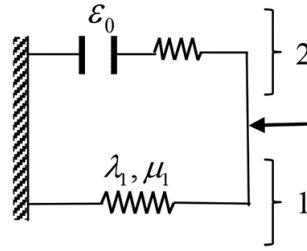


Рис. 2. Механическая модель пористого упругого тела
Fig. 2. Mechanical model of a porous elastic body

Модель представляет собой параллельное соединение упругого сжимаемого элемента «1», характеризуемого коэффициентами Лямэ λ_1, μ_1 с последовательной связкой «2» элемента жесткого контакта, характеризуемого величиной начальной деформации этого элемента - ε_0 (определяется удельным объемом пор), и упругого несжимаемого элемента с модулем сдвига μ_2 .

Напряжения в параллельном соединении «1-2» находятся как сумма напряжений элемента «1» и последовательной связки «2».

$$\sigma_j^\beta = (\sigma_j^\beta)_1 + (\sigma_j^\beta)_2, \quad (1)$$

где σ_j^β – компоненты тензора напряжений.

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе «1» определим законом Гука для сжимаемого тела

$$(\sigma_j^\beta)_1 = \lambda_1 \varepsilon_\alpha^\alpha g_j^\beta + 2\mu_1 \varepsilon_j^\beta, \quad (2)$$

где $g_j^\beta, \varepsilon_j^\beta$ смешанные компоненты метрического тензора и тензора упругих деформаций соответственно.

Уравнение жесткого контакта, входящего в последовательное соединение «2», согласно [9] имеет вид

$$(\sigma_j^\beta)_2 (\varepsilon_\alpha^\alpha + \varepsilon_0) = 0, \quad (3)$$

причем $(\sigma_j^\beta)_2 = 0$ до полного сжатия пор, и $\varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0$ после.

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе, входящем в «2», определим законом Гука для несжимаемого тела

$$(s_j^\beta)_2 = 2\mu_2 (\varepsilon_j^\beta)_2, \quad (4)$$

где $(s_j^\beta)_2 = (\sigma_j^\beta)_2 - \frac{1}{3}(\sigma_k^k)_2 g_j^\beta$ – компоненты девиатора тензора напряжений.

С учетом (3) и (4), согласно [5] зависимость напряжений через деформации в последовательном соединении «2» определяется соотношением

$$(\sigma_j^\beta)_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } -\varepsilon_\alpha^\alpha < \varepsilon_0, \\ 2\mu_2 \left(\varepsilon_j^\beta - \varepsilon_j^{\beta 0} \right) + \frac{1}{3}(\sigma_\alpha^\alpha)_2 g_j^\beta, & \text{если } -\varepsilon_\alpha^\alpha \geq \varepsilon_0 \end{cases}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_j^{\beta 0}$ – деформации компонента «2» до момента полного сжатия пор и $\varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0$ – после.

Для осесимметричного случая напряженно-деформированное состояние, рассматриваемой цилиндрической конструкции в рамках плоского деформированного состояния в цилин-

дической системе координат (r, θ, z) будем моделировать следующими соотношениями геометрически линейной теории

- уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (6)$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (7)$$

где u – радиальная составляющая вектора перемещений;

- граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r|_{r=a} = -q_a, \quad (q_a > 0, q_b > 0). \quad (8)$$

Связь (2) между напряжениями и деформациями при упругом деформировании пористой среды при принятых допущениях переписывается в форме

$$\sigma_r = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r + \lambda_1\varepsilon_\theta, \quad \sigma_\theta = \lambda_1\varepsilon_r + (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_\theta, \quad \sigma_z = \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \quad (9)$$

Упругие деформации сжатого скелета связаны с напряжениями соотношениями (5), которые в нашем случае примут вид

$$S_r = 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r - 2\mu_0(\varepsilon_r)_0 + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \quad S_\theta = 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_\theta - 2\mu_0(\varepsilon_\theta)_0 + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \\ S_z = \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0. \quad (10)$$

В (10) и далее индекс «0» внизу компонент деформаций, напряжений и перемещений обозначает, что они вычислены на момент полного сжатия пор.

Условие несжимаемости на этапе упругого деформирования материала с полностью сжатой матрицей в случае плоского деформированного состояния для нашей задачи запишется в форме

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = -\varepsilon_0. \quad (11)$$

Определим НДС рассматриваемого цилиндрического тела на первом этапе, то есть при наличии несхлопнутых пор следующим образом.

Запишем уравнение равновесия (6) в перемещениях, для чего подставим (7) в (9), а получившееся напряжения в (6), получим обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0,$$

общее решение которого, имеет вид

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (12)$$

Тогда деформации и напряжения, согласно (7), (9) и (12) определяются в форме

$$\varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_r = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}. \quad (14)$$

Согласно (11) и (13) объемная деформация на этом этапе имеет вид

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_1 + \frac{C_2}{r^2} = 2C_1. \quad (15)$$

Как следует из (15) объемная деформация не зависит от координаты, то есть она одина-

кова во всем теле. Поэтому полное сжатие пор произойдет одновременно во всем теле при достижении объемной деформацией своего предельного значения, равного значению начального раствора пор ε_0 ($\varepsilon_0 > 0$), взятого с противоположным знаком.

С учетом этого условие наличия несхлопнутых пор в теле запишем в форме

$$-(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) < \varepsilon_0,$$

или с учетом (13)

$$-2C_1 < \varepsilon_0. \quad (16)$$

Константы интегрирования C_1 , C_2 определим из граничных условий (8) следующим образом

$$\begin{cases} 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{b^2} = -q_b \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{a^2} = -q_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{q_b - q_a}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 = -q_a + 2\mu_1 \frac{C_2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{q_b - q_a}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \\ C_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{(q_b b^2 - q_a a^2)}{2(\lambda_1 + \mu_1)} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)}, \quad C_2 = \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)}. \quad (17)$$

Тогда условие (16) при учете (17) примет вид

$$q_b b^2 - q_a a^2 < \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2). \quad (18)$$

При этом поля перемещений, деформаций и напряжений согласно (12) – (14) с учетом найденных констант (17) переписуются в форме

$$u = \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)} \cdot r + \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r},$$

$$\varepsilon_r = \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)} - \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)} + \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_r = q_a \cdot \frac{a^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} + q_b \cdot \frac{b^2(a^2 - r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}, \quad \sigma_\theta = q_a \cdot \frac{a^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} - q_b \cdot \frac{b^2(r^2 + a^2)}{r^2(b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_z = q_a \cdot \frac{\lambda_1 a^2}{(\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2)} - q_b \cdot \frac{\lambda_1 b^2}{(\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2)}. \quad (19)$$

Как следует из (18) достижение величины начального раствора пор своего нулевого значения (иначе - достижение объемной деформацией величины $-\varepsilon_0$) при упругом деформировании материала происходит одновременно во всем теле под действием внешних сжимающих нагрузок удовлетворяющих условию

$$q_b b^2 = \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2, \quad (20)$$

$$f(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_0 \neq 0 \\ 0, & \text{если } \varepsilon_0 = 0 \end{cases}.$$

где

При этом напряженно-деформированное состояние (19) на момент полного сжатия пор, то есть при выполнении условия (20), определится соотношениями

$$(u)_0 = -\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot r + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1))}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2}{r},$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_r)_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{2\mu_1 r^2}, & (\varepsilon_\theta)_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{2\mu_1 r^2}, \\ (\sigma_r)_0 &= -\varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{r^2}, \\ (\sigma_\theta)_0 &= -\varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{r^2}, & (\sigma_z)_0 &= -\lambda_1 \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Если после полного сжатия пор среда испытывает дальнейшие деформации, то записанное напряженно-деформированное состояние (21) будет частью напряженно-деформированного состояния после закрытия пор, которое реализуется при выполнении неравенства

$$q_b > q_a \cdot f(\varepsilon_0) \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (22)$$

Перейдем теперь к определению полей напряжений, деформаций и перемещений на втором этапе деформирования, то есть на этапе деформирования материала с полностью сжатой матрицей, обладающей свойством дальнейшей несжимаемости.

Если внешние нагрузки таковы, что выполняется неравенство (22), то полностью сжатый скелет будет деформироваться как несжимаемая упругая среда с модулем сдвига $\mu = \mu_1 + \mu_0$.

Записывая условие (11) в перемещениях с использованием формул Коши (7) получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -\varepsilon_0,$$

общим решением которого, будет

$$u = \frac{D}{r} - \frac{\varepsilon_0}{2} r. \quad (23)$$

Из (7) с учетом (23) деформации на втором этапе деформирования определяются в форме

$$\varepsilon_r = -\frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (24)$$

Запишем разность напряжений $\sigma_r - \sigma_\theta$, входящую в уравнение равновесия (6) через разность компонент девиатора напряжений $\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta$, которая в свою очередь с учетом (10) представима в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = 2(\mu_0 + \mu_1)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) - 2\mu_0((\varepsilon_r)_0 - (\varepsilon_\theta)_0). \quad (25)$$

При этом разность деформаций с учетом (24) имеет вид

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = -\frac{2D}{r^2}; \quad (26)$$

разность деформаций на момент полного сжатия пор определим из (21) в виде

$$(\varepsilon_r)_0 - (\varepsilon_\theta)_0 = -\frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1 r^2}. \quad (27)$$

Соотношение (25) с учетом (26) и (27) переписывается в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -4(\mu_0 + \mu_1) \frac{D}{r^2} + \frac{2\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1 r^2}. \quad (28)$$

Подставляя полученную разность (28) в уравнение равновесия (6) приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными вида

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 4(\mu_0 + \mu_1) \frac{D}{r^3} - \frac{2\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1 r^3},$$

интегрируя которое получим:

$$\sigma_r = \left(\frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} - 2(\mu_0 + \mu_1)D \right) \frac{1}{r^2} + C, \quad (29)$$

где C – константа интегрирования, которую с помощью граничного условия (8) на внешней поверхности крепи можно выразить через константу D следующим образом:

$$C = -q_b - \left(\frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} - 2(\mu_0 + \mu_1)D \right) \frac{1}{b^2}. \quad (30)$$

Тогда из (29) и (28) с учетом (30) напряжения на втором этапе деформирования при реализации условия (22) определяются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(2(\mu_0 + \mu_1)D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) - q_b, \\ \sigma_\theta &= \left(2(\mu_0 + \mu_1)D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} \right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) - q_b. \end{aligned} \quad (31)$$

Константу интегрирования D определим из второго граничного условия (8) на внутренней поверхности крепи

$$2(\mu_0 + \mu_1)D = \frac{(q_b - q_a)a^2b^2}{a^2 - b^2} + \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), (24), (23) получим, что напряжения, деформации и перемещения соответственно переписуются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= q_b \frac{(r^2 - a^2)b^2}{(a^2 - b^2)r^2} - q_a \frac{(r^2 - b^2)a^2}{(a^2 - b^2)r^2}, \quad \sigma_\theta = q_b \frac{(a^2 + r^2)b^2}{(a^2 - b^2)r^2} - q_a \frac{(r^2 + b^2)a^2}{(a^2 - b^2)r^2}, \\ \varepsilon_r &= \frac{a^2}{2\mu r^2} \left(\frac{(q_b - q_a)b^2}{(b^2 - a^2)} + \frac{\mu_0(\varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) - q_a \cdot f(\varepsilon_0))}{\mu_1} \right) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{a^2}{2\mu r^2} \left(\frac{(q_b - q_a)b^2}{(a^2 - b^2)} + \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))}{\mu_1} \right) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ u &= \frac{a^2}{2\mu r} \left(\frac{(q_b - q_a)b^2}{(a^2 - b^2)} + \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))}{\mu_1} \right) - \frac{\varepsilon_0}{2}r, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\mu = \mu_0 + \mu_1$.

Таким образом, если выполнено условие (18), то реализуется этап упругого деформирования пористого материала толстостенного цилиндрического тела при равномерном радиальном сжатии. При этом напряженно-деформированное состояние определяется соотношениями (19).

Выполнение равенства (20) соответствует моменту полного сжатия пор для всей области рассматриваемого цилиндрического тела. Поля перемещений, деформаций и напряжений при

этом выражаются формулами (21).

При выполнении неравенства (22) реализуется этап упругого деформирования материала исследуемой цилиндрической конструкции с полностью сжатой матрицей, которому соответствует напряженно-деформированное состояние, определяемое по формулам (33).

Обсуждение результатов. Графические зависимости, построенные согласно соотношениям (22), (33) представлены на рис. 3-5.

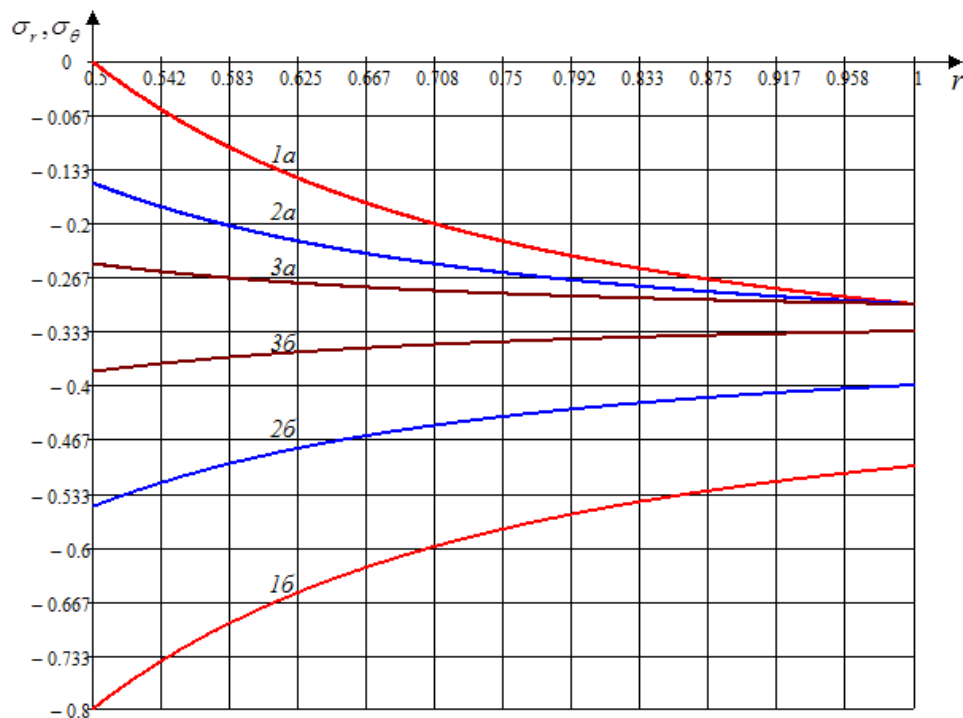
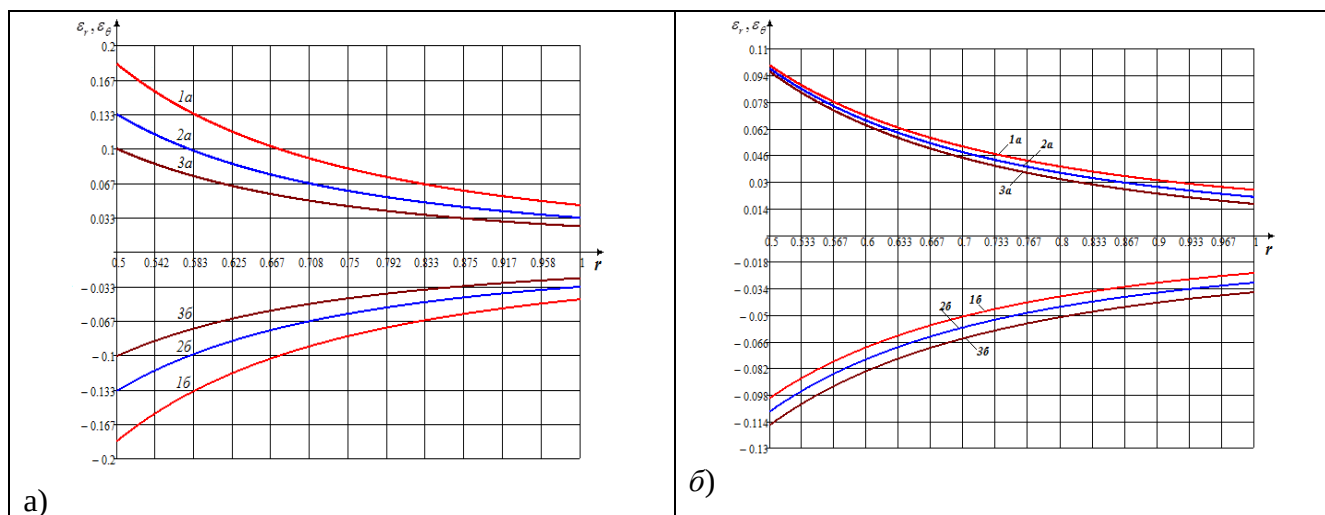


Рис. 3. Зависимость компонент напряжений σ_r и σ_θ от текущего радиуса при различных значениях внутреннего давления

Fig. 3. Dependence of stress components σ_r and σ_θ on the current radius for different values of internal pressure

Зависимости, представленные на рисунках 3 – 5 соответствуют безразмерным значениям соответствующих величин. При этом все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к величине μ_1 , а имеющие размерность длины – к внешнему радиусу цилиндрического тела b .



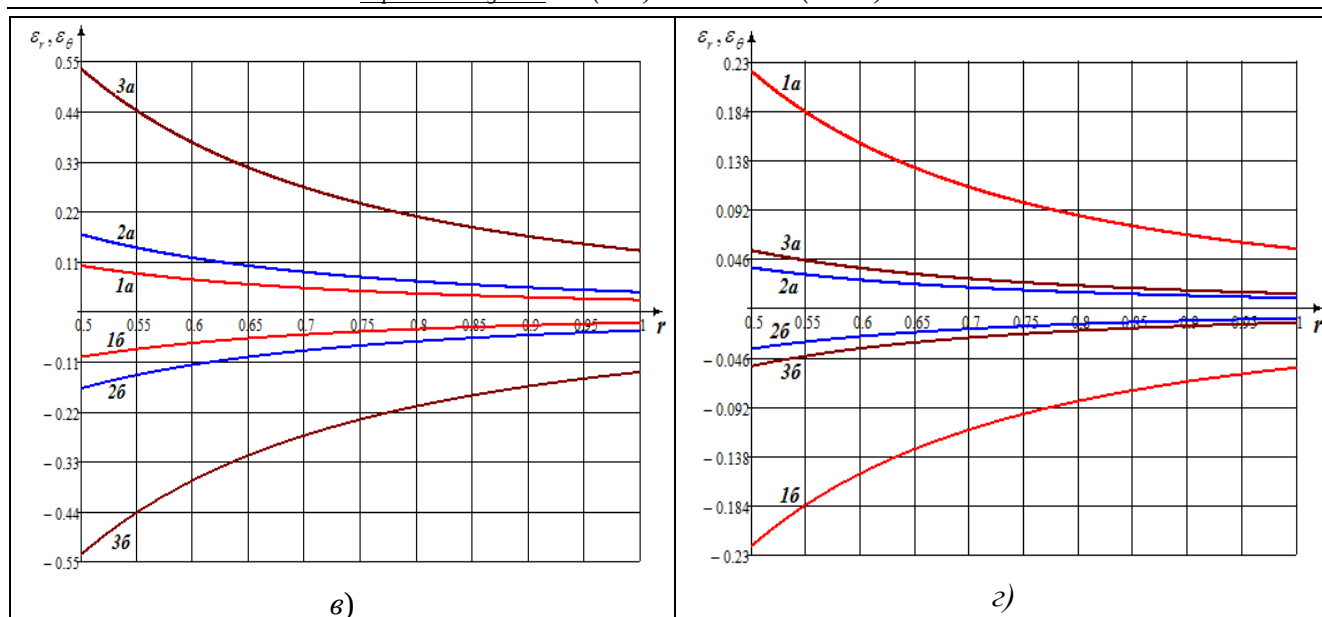


Рис. 4. Зависимость компонент деформаций ε_r и ε_θ от текущего радиуса при различных значениях физико-механических и геометрических параметров материала крепи
Fig. 4. Dependence of the deformation components ε_r and ε_θ on the current radius for different values of physico-mechanical and geometric parameters of the support material

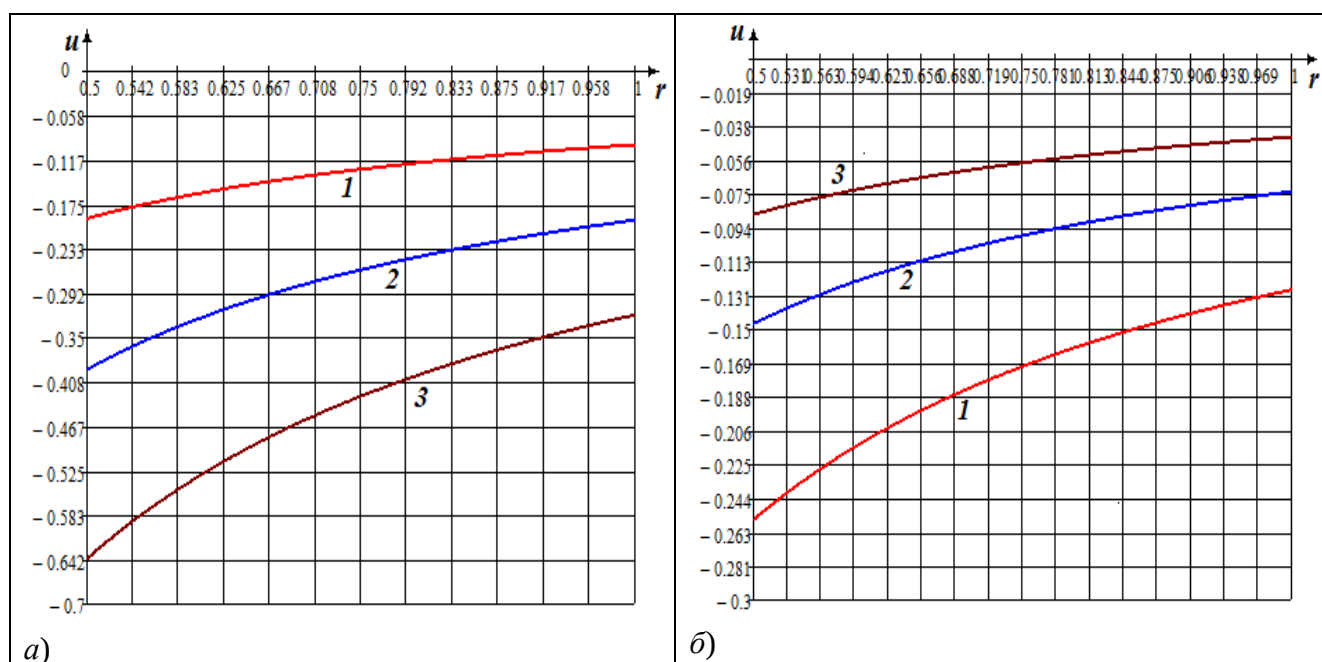


Рис. 5. Зависимость радиальной компоненты вектора перемещений от текущей координаты при различных значениях толщины крепи и внутреннего давления
Fig. 5. Dependence of the radial component of the displacement vector on the current coordinate for different values of the thickness of the support and internal pressure

Безразмерные значения физико-механических параметров материала цилиндрической конструкции и ее геометрических размеров для каждой из кривых выбирались согласно данным, приведенным в табл. 1.

Таблица 1. Геометрические размеры кривых
Table 1. Geometrical dimensions of curves

№	№ кривой	зависимость	λ	μ	ε_0	a	b	q_a	q_b
Рис. 3	Кривая 1а	$\sigma_r(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2а		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.15	0.3
	Кривая 3а		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.25	0.3
	Кривая 1б	$\sigma_\theta(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2б		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.15	0.3
	Кривая 3б		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.25	0.3
Рис. 4а	Кривая 1а	$\varepsilon_r(r)$	0.5	1.1	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2а		0.5	1.5	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 3а		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 1б	$\varepsilon_\theta(r)$	0.5	1.1	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2б		0.5	1.5	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 3б		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
Рис. 4б	Кривая 1а	$\varepsilon_r(r)$	0.5	2	10^{-6}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2а		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 3а		0.5	2	$2 \cdot 10^{-2}$	0.5	1	0	0.3
	Кривая 1б	$\varepsilon_\theta(r)$	0.5	2	10^{-6}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2б		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 3б		0.5	2	$3 \cdot 10^{-2}$	0.5	1	0	0.3
Рис. 4в	Кривая 1а	$\varepsilon_r(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2а		0.5	2	10^{-2}	0.6	1	0	0.3
	Кривая 3а		0.5	2	10^{-2}	0.8	1	0	0.3
	Кривая 1б	$\varepsilon_\theta(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0	0.3
	Кривая 2б		0.5	2	10^{-2}	0.6	1	0	0.3
	Кривая 3б		0.5	2	10^{-2}	0.8	1	0	0.3
Рис. 4г	Кривая 1а	$\varepsilon_r(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.1	0.8
	Кривая 2а		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.5	0.8
	Кривая 3а		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.7	0.8
	Кривая 1б	$\varepsilon_\theta(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.2	0.8
	Кривая 2б		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.5	0.8
	Кривая 3б		0.5	2	10^{-2}	0.5	1	0.7	0.8
Рис. 5а	Кривая 1	$u(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.7	1	0	0.3
	Кривая 2		0.5	2	10^{-2}	0.85	1	0	0.3
	Кривая 3		0.5	2	10^{-2}	0.9	1	0	0.3
Рис. 5б	Кривая 1	$u(r)$	0.5	2	10^{-2}	0.8	1	0.01	0.3
	Кривая 2		0.5	2	10^{-2}	0.8	1	0.1	0.3
	Кривая 3		0.5	2	10^{-2}	0.8	1	0.25	0.3

Отметим, что безразмерные значения физико-механически параметров материала толстостенного цилиндрического тела выбирались произвольно ввиду сугубо фундаментальных целей исследования и отсутствия строгой привязки к конкретному материалу. В тоже время для того чтобы получить качественно верное поведение модели все параметры брались только в диапазонах допустимых для различных марок бетона и растворов, используемых для подземного шахтного строительства, основываясь на информации, приведенной в работах [10 - 11].

Вывод. Из анализа результатов, представленных зависимостей следует, что распределение компонент напряжений σ_r и σ_θ происходит почти симметричным образом вдоль значения, определяемого интенсивностью внешнего давления Q_b , при этом, чем больше разница внутреннего и внешнего давлений, тем больше отклонение напряжений от внешнего давления (рис. 3);

- при увеличении относительного модуля сдвига μ материала с полностью сжатой матрицей деформации уменьшаются (рис. 4а); с ростом величины ε_0 , определяемой удельным объемом пор, абсолютное значение радиальной компоненты деформаций ε_r тела с полностью сжатой матрицей уменьшаются, в то время как модули двух других компонент ε_θ , ε_ϕ тензора деформаций увеличиваются (рис. 4б);
- с ростом относительного внутреннего радиуса цилиндрического тела деформации материала с полностью сжатой матрицей увеличиваются (рис. 4в);
- при уменьшении разности внешнего и внутреннего давлений деформации уменьшаются (рис. 4г);
- абсолютные значения радиальных компонент вектора перемещения увеличиваются с ростом относительного внутреннего радиуса рассматриваемого цилиндрического тела и уменьшаются при уменьшении разности внутреннего и внешнего давлений (рис. 5а, 5б).

Необходимо отметить, что если в формулах (18), (33), описывающих напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела на этапе упругого деформирования материала с полностью сжатой матрицей, предположить $\varepsilon_0 = 0$, то получим результаты работы [12].

Библиографический список:

1. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. М., Недра, 1982. 270 с.
2. Кацауров И.Н. Механика горных пород. М.: Недра. – 1981. – 161 с.
3. Алимжанов М.Т. Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики // Успехи механики, 1990, 13, №3, С. 21 – 57.
4. Гоцев Д.В., Ененко И.А., Спорыхин А.Н. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруго-вязко-пластических массивах. // Прикладная механика и техническая физика, СО РАН.-2005.-Т46, №2. С. 141-150.
5. Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.
6. Гоцев Д. В., Бунтов А.Е. Устойчивость монолитной крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и неупругой работы сжатого скелета // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер Физ.-мат. науки», 2016. Т. 20, №3. С. 457 – 474..
7. Гоцев Д. В., Бунтов А.Е., Перунов Н.С. Математическая модель процесса деформирования крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и упруговязкопластических свойств сжатого скелета // Проблемы прочности и пластичности. Т.78, №3.-
- Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2016. С. 289 – 299.
8. Гузь А.Н. Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наук. думка, 1977. 204 с.
9. Садовская О. В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 368 с.
10. Докунин О.С., Косков И.Г., Друцко В.П., Бернштейн С.А. Бетоны и растворы для подземного шахтного строительства. Справочное пособие. – М.: Недра, 1989. – 216 с.
11. Баженов Ю.М. Технология бетона. Учебник. -М.: Изд-во АСВ, 2003 - 500 с.
12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТЛ, 1955. –491 с.
13. Jefferies M.G., Shuttle D.A. Calibration and use. Prediction, analysis and design in geomechanical applications // Norsand (The 11th Conf. of IACMAG vol 1), 2005. P. 345–352
14. Tien Y.M., Kuo M.C. A failure criterion for transversely isotropic rocks // Int. J Rock Mech Min 38, 2001. P. 399–412
15. Vervoort A., Min K., Konietzky H., Cho J. W., Debecker B., Dinh Q., Frühwirth T., Tavallali A. Failure of transversely isotropic rock under Brazilian test conditions // Int. J Rock Mech Min 70, 2014. P. 343–352
16. Borja R.I., Lin C.H., Montans F.J., Cam-clay plasticity, Part IV: Implicit integration of anisotropic, bounding surface model with nonlinear hyperelasticity and ellipsoidal loading

function // Comp. Meth. Appl. Mach. Engng., Vol. 190(26-27), 2001. P.3293-3323.
 17. Desai C.S. Mechanics of Materials and Interfaces, The Disturbed State Concept // CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2001.
 18. Ingham T.J. Issues in the seismic analysis of bridges // Bathe, K.J., ed., Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier Science, 2001.
 19. Jeremic B., Runesson K., Sture S. A model for elastic-plastic pressure sensitive materials subjected to large deformations // Int. J. Solids and Structures, Vol. 36, 1999. P.4901-4918.
 20. Kawka M., Bathe K.J. Implicit integration for solution of metal forming processes // Bathe, K.J., ed., Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier Science, 2001.

References:

1. Bulychev N.S. Mekhanika podzemnykh sooruzhenii. M.: Nedra; 1982. 270 s. [Bulychev N.S. Mechanics of underground constructions. M.: Nedra; 1982. 270 p. (In Russ.)]
 2. Katsaurov I.N. Mekhanika gornyx porod. M.: Nedra; 1981. 161 s. [Katsaurov I.N. Mechanics of rocks. M.: Nedra; 1981. 161 p. (In Russ.)]
 3. Alimzhanov M.T. Problemy ustoichivosti ravновесiya v zadachakh geomekhaniki. Uspekhi mekhaniki. 1990;13(3):21-57. [Alimzhanov M.T. Equilibrium stability issues in the problems of geomechanics. Uspekhi mekhaniki. 1990;13(3):21-57. (In Russ.)]
 4. Gotsev D.V., Enenko I.A., Sporykhin A.N. Lokal'naya neustoiichivost' gorizonta'nykh vyrabotok mnogougol'noi formy v uprugovyyazko-plasticheskikh massivakh. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2005;46(2):141-150. [Gotsev D.V., Enenko I.A., Sporykhin A.N. Local instability of horizontal mines of polygonal shape in elastic-viscous-plastic massifs. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2005;46(2):141-150. (In Russ.)]
 5. Gotsev D.V., Sporykhin A.N. Metod vozmushchenii v zadachakh ustoichivosti podkreplennykh gornyx vyrabotok. Voronezh: Voronezhskii gosudarstvennyi universitet; 2010. 299 s. [Gotsev D.V., Sporykhin A.N. The perturbation method in the problems of the stability of reinforced mines. Voronezh: Voronezh State University; 2010. 299 p. (In Russ.)]
 6. Gotsev D. V., Buntov A.E. Ustoichivost' monolitnoi krepki vertikal'noi gornoi vyrabotki s uchetom nachal'noi poristosti materiala i neuprugoi raboty szhatogo skeleta. Vest. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser Fiz.-mat. nauki. 2016;20(3):457 - 474. [Gotsev D. V., Buntov A.E. Stability of a monolithic support of vertical mining with regard to the initial porosity of the material and the inelastic work of the compressed skeleton. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2016;20(3):457 - 474. (In Russ.)]
 7. Gotsev D. V., Buntov A.E., Perunov N.S. Matematicheskaya model' protsessa deformirovaniya krepki vertikal'noi gornoi vyrabotki s uchetom nachal'noi poristosti materiala i uprugovyyazkoplasticheskikh svoystv szhatogo skeleta. Problemy prochnosti i plastichnosti. 2016;78(3):289 - 299. [Gotsev D. V., Buntov A.E., Perunov N.S. A mathematical model of the deformation process of the vertical mining support with regard to the initial porosity of the material and the elastic-viscous-plastic properties of the compressed skeleton. Problems of strength and plasticity. 2016;78(3):289 - 299. (In Russ.)]

21. Kojic M. Stress integration procedures for inelastic material models within the finite element method // Appl. Mech. Reviews, Vol. 55, No. 4, 2002. P.389-414
 22. Montans F.J., Bathe K.J. On the stress integration in large strain elasto-plasticity // Bathe, K.J., ed. Computational Fluid and Solid Mechanics, Proc. Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier Science, 2003.
 23. Ulm F.J., Coussy O. Mechanics and Durability of Solids // Vol.1, Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 2003.
 24. Simo J.C., Hughes T.J.R. Computational Inelasticity // Springer-Verlag, New York., 1998.

8. Guz' A.N. Osnovy teorii ustoichivosti gornyx vyrabotok. Kiev: Nauk. dumka; 1977. 204 s. [Guz' A.N. Fundamentals of the theory of stability of mines. Kiev: Nauk. dumka; 1977. 204 p. (In Russ.)]
 9. Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh mekhaniki sypuchikh sred. M.: FIZMATLIT; 2008. 368 s. [Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M. Mathematical modeling in problems of mechanics of loose media. M.: FIZMATLIT; 2008. 368 p. (In Russ.)]
 10. Dokunin O.S., Koskov I.G., Drutsko V.P., Bernshtein S.A. Betony i rastvory dlya podzemnogo shakhtnogo stroitel'stva. Spravochnoe posobie. M.: Nedra; 1989. 216 s. [Dokunin O.S., Koskov I.G., Drutsko V.P., Bernshtein S.A. Concretes and solutions for underground mine construction. Reference book. M.: Nedra; 1989. 216 p. (In Russ.)]
 11. Bazhenov Yu.M. Tekhnologiya betona. Uchebnik. M.: Izd-vo ASV; 2003. 500 s. [Bazhenov Yu.M. Technology of concrete. A tutorial. M.: Izd-vo ASV; 2003. 500 p. (In Russ.)]
 12. Lur'e A.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti. M.: GITL; 1955. 491 s. [Lur'e A.I. Spatial problems in the theory of elasticity. M.: GITL; 1955. 491 p. (In Russ.)]
 13. Jefferies M.G., Shuttle D.A. Calibration and use. Prediction, analysis and design in geomechanical applications. Norsand (The 11th Conf. of IACMAG vol 1). 2005. pp. 345-352.
 14. Tien Y.M., Kuo M.C. A failure criterion for transversely isotropic rocks. Int. J Rock Mech Min. 2001;38:399-412.
 15. Vervoort A., Min K., Konietzky H., Cho J. W., Debecker B., Dinh Q., Frühwirth T., Tavallali A. Failure of transversely isotropic rock under Brazilian test conditions. Int. J Rock Mech Min. 2014;70:343-352.
 16. Borja R.I., Lin C.H., Montans F.J., Cam-clay plasticity, Part IV: Implicit integration of anisotropic, bounding surface model with nonlinear hyperelasticity and ellipsoidal loading function. Comp. Meth. Appl. Mach. Engng. 2001;190(26-27):3293-3323.
 17. Desai C.S. Mechanics of Materials and Interfaces, The Disturbed State Concept. CRC Press: Boca Raton, FL, USA; 2001.
 18. Ingham T.J. Issues in the seismic analysis of bridges. Computational Fluid and Solid Mechanics (Ed. Bathe K.J.). Elsevier Science; 2001.
 19. Jeremic B., Runesson K., Sture S. A model for elastic-plastic pressure sensitive materials subjected to large deformations. Int. J. Solids and Structures. 1999;36:4901-4918.
 20. Kawka M., Bathe K.J. Implicit integration for solution of metal forming processes. Computational Fluid and Solid Mechanics (Ed. Bathe K.J.). Elsevier Science; 2001.

21. Kojic M. Stress integration procedures for inelastic material models within the finite element method. Appl. Mech. Reviews. 2002;55(4):389-414.
22. Montans F.J., Bathe K.J. On the stress integration in large strain elasto-plasticity. Computational Fluid and Solid Mechanics (Ed. Bathe K.J.). Elsevier Science; 2003.

23. Ulm F.J., Coussy O. Mechanics and Durability of Solids. Solid Mechanics. Vol.1. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J.; 2003.
24. Simo J.C., Hughes T.J.R. Computational Inelasticity. Springer-Verlag: New York; 1998.

Сведения об авторах:

Бунтов Алексей Евгеньевич – капитан, старший научный сотрудник.

Гоцев Дмитрий Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики.

Information about the authors.

Alexey E. Buntov – Captain, Senior Researcher.

Dmitriy V. Gotsev – Dr. Sci. (Physical and Mathematical), Prof., Department of Mathematics.

Конфликт интересов.

Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 28.12.2017.

Received 28.12.2017

Принята в печать 28.01.2018.

Accepted for publication 28.01.2018.