Для цитирования: Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С., Раджабов Р.Г. Моделирование напряжений в композитном изделии стандартным оптически чувствительным материалом. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017; 44(4):8-18. DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-4-8-18

For citation: Agakhanov E.K., Magomedeminov N.S., Radzhabov R.G. Stress modeling in composite products using standard optically sensitive material. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2017; 44(4):8-18. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-4-8-18

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ МЕХАНИКА

УДК 621. 923

DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-4-8-18

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИТНОМ ИЗДЕЛИИ СТАНДАРТНЫМ ОПТИЧЕСКИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ МАТЕРИАЛОМ

Агаханов Э.К.¹, Магомедэминов Н.С.², Раджабов Р.Г.³

¹⁻³ Дагестанский государственный технический университет,

¹⁻³ 367026, г. Махачкала, пр. Имама Шамиля, 70, Россия,

¹ e-mail: elifhan@bk.ru, ² e-mail: nazhmudin@mail.ru, ³ e-mail: asf_smik_dgtu@mail.ru

Резюме. Цель. Рассматривается вопрос физического моделирования напряжений в составном объемном теле вращения сложной формы при сложном распределении нагрузок. Согласно критериям подобия, напряжения, деформации и перемещения от объемных сил снижаются пропорционально масштабу подобия геометрических размеров, что усложняет их прямое моделирование методом фотоупругости с использованием моделей из широко применяемых эпоксидных материалов. **Метод.** На основании принципа независимости действия сил исходная задача представлена в виде суммы двух задач. В первой однородной задаче напряжения в теле вращения от центробежных сил моделируются обычным методом «замораживания». Для решения второй неоднородной задачи производится «замораживание» напряжений в области модели, соответствующих действующим в ней центробежным силам. При комнатной температуре к ней приклеиваются модели, находящиеся в естественном состоянии, и производится «отжиг» составленной модели. **Результат.** Получены картины полос в срезах и компоненты радиальных, тангенциальных и осевых напряжений на контурах в сечениях моделей методами нормального просвечивания и численного интегрирования уравнения равновесия. По критериям моделирования установлена формула перехода от напряжений в моделях к напряжениям в натурной конструкции. Получены результаты анализа влияния соотношения плотностей материалов, из которых составлено тело, на напряженное состояние всей конструкции.

Вывод. Осевые напряжения по сравнению с радиальными и тангенциальными имеют незначительную величину, кроме того, отношение плотностей составного тела оказывает как количественное, так и качественное влияние на напряженное состояние конструкции.

Ключевые слова: физическое моделирование, напряжения, составное объемное тело вращения, центробежные силы, метод фотоупругости, метод «замораживания»

PHYSICAL-MATEMATICAL SCIENCE
MECHANICS

STRESS MODELING IN COMPOSITE PRODUCTS USING STANDARD
OPTICALLY SENSITIVE MATERIAL

Elifkhan K. Agakhanov¹, Nazhmudin S. Magomedeminov², Rustam G. Radzhabov³

¹⁻³Daghestan State Technical University,

¹⁻³70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367026, Russia,

¹e-mail: elifkhan@bk.ru, ²e-mail: nazhmudin@mail.ru, ³e-mail: asf_smik_dgtu@mail.ru

Abstract. Objectives The problem of physically modelling stresses in a compound solid body of revolution having a complex shape and with a complex load distribution is considered. According to the similarity criteria of stress, deformations and displacements from the volume forces decrease proportionally to the scale of similarity of geometric dimensions, which complicates their direct modelling by the photoelasticity method typically using models made from epoxy materials. **Methods** Based on the principle of the independent action of the forces, the initial problem is represented as the sum of two problems. In the first uniform problem, the stresses in the body of revolution from the centrifugal forces are simulated by the conventional "freezing" method. In order to solve the second nonuniform problem, the stresses in the region of the model, corresponding to the acting centrifugal forces, are "frozen". The models are glued in a natural state at room temperature, and the compound model is annealed. **Results** The band patterns in sections as well as components of radial, tangential and axial stresses on contours and in sections of models are obtained by the methods of normal transmission and numerical integration of the equilibrium equation. According to the modelling criteria, the formula for the transition from stresses in models to stresses in the natural structure is established. The results of the analysis of the effect of a body's material density ratio on the stress state of the entire structure are obtained. **Conclusion** Axial stresses have insignificant value as compared to radial and tangential stresses; in addition, the ratio of the densities of the compound body has both a quantitative and qualitative influence on the stress state of the structure.

Keywords: physical modelling, stresses, compound solid body of revolution, centrifugal forces, photoelasticity method, "freezing" method

Введение. Моделирование задач механики деформируемого твердого тела осуществляется с помощью критериев подобия, на основании которых составляется модель, определяются условия нагружения, и осуществляется переход от замеренных на модели величин к соответствующим величинам натурной конструкции [1-5].

Множители подобия напряжений $K_\sigma(t)$, деформаций $K_\varepsilon(t)$, перемещений $K_u(t)$, геометрических размеров K_L , объемных сил $K_F(t)$ и модуля упругости K_E при моделировании задач теории ползучести и задач теории упругости (в задачах теории упругости множители подобия становятся постоянными коэффициентами, т. е. масштабами подобия) связаны соотношениями [6]:

$$\frac{K_L K_F(t)}{K_\sigma(t)} = 1, \quad \frac{K_L K_F(t)}{K_\varepsilon(t) K_E} = 1, \quad \frac{K_L^2 K_F(t)}{K_u(t) K_E} = 1. \quad (1)$$

Из соотношений (1) следует, что напряжения, деформации и перемещения от объемных сил снижаются пропорционально масштабу подобия геометрических размеров. Эта особенность усложняет прямое моделирование даже самого простого вида объемных сил (массовых сил) методом фотоупругости с использованием моделей из широко применяемых эпоксидных материалов.

Общие методы исследования напряжений и деформаций обычно регистрируют их с не-

достаточной чувствительностью. При моделировании задач с разными характеристиками ν, E, γ, α в областях тела, в отличие от задач, когда они в области всего тела имеют постоянную величину, требуется соблюдение дополнительных соотношений между множителями подобия (масштабами) [17]:

$$\begin{aligned} K_{\nu 1} &= K_{\nu 2} = \dots = K_{\nu n} = 1, \\ K_{E 1} &= K_{E 2} = \dots = K_{E n}, \\ K_{F 1}(t) &= K_{F 2}(t) = \dots = K_{F n}(t), \\ K_{\alpha \Delta T} &= 1 \quad K_{\alpha 1} = K_{\alpha 2} = \dots = K_{\alpha n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где: n – число областей с разными характеристиками.

Эти условия создают некоторые ограничения и трудности при использовании традиционных приемов. Они связаны с тем, что возможности получения оптически активных материалов с разными характеристиками ограничены [3, 11].

Определенные возможности для решения таких задач открываются с использованием свойств полимеров, проявляемых в процессе полимеризации (методы полимеризации, стесненной усадки и фиксации температурных напряжений) [16]. Кроме того, разрабатываются методы, специально предназначенные для определения напряжений от действия механических нагрузок и температуры на моделях из стандартного оптически чувствительного материала в задачах с разными характеристиками в областях тела [1, 5, 7, 10, 18]. Сюда же примыкает метод механического моделирования температурных напряжений [2] и метод изучения напряжений на вязкоупругих моделях [19].

Учитывая наличие этих методов, позволяющих получать эффективные решения, при рассмотрении задачи на действие объемных сил прием равенство характеристик ν, E, α в областях тела.

Постановка задачи. В инженерной практике, особенно в машиностроении, все больше находят применение составные (композитные) конструкции (изделия), составленные из материалов с разными объемными массами [9].

В ранее проведенных экспериментальных исследованиях авторы ограничивались однородными вращающимися телами [13,15]. Аналитическое определение напряженно-деформированного состояния составных конструкций сводится к решению сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных, прямое решение которых связано с большими математическими трудностями [4, 8, 12, 21-23].

Таким образом, в настоящее время многие практически важные задачи для составных объемных тел не могут быть решены только теоретическим путем. В первую очередь к ним следует отнести определение напряженно-деформированного состояния составных конструкций сложной формы и при сложном распределении нагрузок [14, 20].

Методы исследования. Рассмотрим объемное тело вращения, составленное из двух материалов с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1).

Данная составная конструкция вращается с угловой скоростью $\omega_{\text{нат}}$ и находится под действием объемных центробежных сил

$$F_x = \rho_1 \omega_n^2 x, \quad F_y = \rho_1 \omega_n^2 y, \quad F_z = 0 \quad \text{в } V_1, \quad (3)$$

$$F_x = \rho_2 \omega_n^2 x, \quad F_y = \rho_2 \omega_n^2 y, \quad F_z = 0 \quad \text{в } V_2. \quad (4)$$

Решение исходной задачи, используя принцип независимости действия сил, представим в виде суммы двух задач:

1. Во всей области составного тела ($v=v_1+v_2$) действуют объемные силы

$$F_x = \rho_2 \omega_{\text{нат}}^2 x, \quad F_y = \rho_2 \omega_{\text{нат}}^2 y, \quad F_z = 0 \quad \text{в } V. \quad (5)$$

2. Составное тело находится под действием объемных сил

$$F_x = (\rho_1 - \rho_2)\omega_{\text{нат}}^2 x, F_y = (\rho_1 - \rho_2)\omega_{\text{нат}}^2 y, F_z = 0 \quad \text{в } V_1, \quad (6)$$

$$F_x = F_y = F_z = 0 \quad \text{в } V_2 \quad (7)$$

Рис. 1. Составное тело вращения под действием центробежных сил

Fig. 1. Composite body of rotation under the action of centrifugal forces

При моделировании этих задач используется стандартный оптически чувствительный материал с характеристиками:

$$T_{\text{зам}} = 130^\circ\text{C}, E_{\text{зам}} = 20,0 \text{ МПа}, \nu_{\text{зам}} = 0,5, \sigma_{0\text{зам}}^{(1,0)} = 0,046 \text{ МПа}.$$

Напряжения в однородном теле вращения от центробежных сил в первой задаче моделируются обычным методом: в модели области V при вращении с угловой скоростью $\omega_{\text{мод}}$ производится «замораживание» напряжений, соответствующих искомому.

Для решения второй задачи в модели области V_1 производится «замораживание» напряжений, соответствующих действующим в ней центробежным силам. Далее к модели области V_1 при комнатной температуре приклеиваются модели области V_2 , находящиеся в естественном состоянии, и производится «отжиг» составленной модели.

На рис. 2 представлены картины полос в меридиональных срезах моделей при нормальном просвечивании.

Рис. 2. Картины полос при нормальном просвечивании

Fig 2. Samples of bands with normal X-ray radiation

Методами нормального просвечивания срезов и численного интегрирования уравнения равновесия вдоль оси z были получены компоненты радиальных σ_r , тангенциальных σ_θ и осевых σ_z напряжений на контурах и в двух сечениях моделей. Эпюры напряжений в моделях показаны на рис. 3-5.

Рис. 3. Эпюры напряжений σ_r , σ_θ и σ_z [МПа] в модели области V

Fig. 3. Stress diagrams, σ_r , σ_θ and σ_z [MPa] in the region V

Рис. 4. Эпюры напряжений σ_r , σ_θ и σ_z [МПа] в модели области V₁

Fig. 4. Stress patterns σ_r , σ_θ and σ_z [MPa] in the region model V₁

Рис. 5. Эпюры напряжений σ_r , σ_θ и σ_z [МПа] в модели, составленной из областей V_1 и V_2 , после отжига

Fig. 5. Stress diagrams σ_r , σ_θ and σ_z [MPa] in the model, composed of regions V_1 and V_2 , after annealing

Согласно критериям моделирования объемной статической упругой задачи получаем формулу перехода от напряжений в моделях к напряжениям в натурной конструкции:

$$\sigma_{ij}^{(nat)} = K_\omega^2 K_\rho K_l \left[K \sigma_{ij}^{(mod)} + (1-K) (\sigma_{ij}^{-(mod)} - \sigma_{ij}^{=(mod)}) \right], \quad (8)$$

$$\text{где: } K_\omega = \frac{\omega_{nat}}{\omega_{mod}}, \quad K_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_{mod}}, \quad K_l = \frac{l_{nat}}{l_{mod}}, \quad K = \frac{\rho_2}{\rho_1};$$

$\sigma_{ij}^{(mod)}$ – напряжения в модели области V;

$\sigma_{ij}^{-(mod)}$ – напряжения в модели области V_1 ;

$\sigma_{ij}^{=(mod)}$ – напряжения в модели, составленной из областей V_1 и V_2 , после отжига.

Обсуждение результатов. Проведенные экспериментальные исследования позволяют анализировать влияние соотношения плотностей материалов, из которых составлено тело, на напряженное состояние всей конструкции.

Результаты анализа представлены на рис. 6 и 7.

Рис. 6. Влияние параметра $K = \rho_2 / \rho_1$ на напряжения σ_r и σ_θ [МПа]

в сечении $r = 21$ в долях K_ω^2 K_ρ K_ℓ

Fig. 6. Effect of the parameter $K = \rho_2 / \rho_1$ on the voltage σ_r and σ_θ [MPa]

in section $r = 21$ in fractions K_ω^2 K_ρ K_ℓ

Рис. 7. Влияние параметра $K = \rho_2 / \rho_1$ на напряжения σ_r и σ_θ [МПа]

в сечении $r = 41$ в долях K_ω^2 K_ρ K_ℓ

Fig. 7. Effect of the parameter $K = \rho_2 / \rho_1$ on the voltage σ_r and σ_θ [MPa]

in section $r = 41$ in fractions K_ω^2 K_ρ K_ℓ

Для рассмотренной конструкции результаты исследования показали:

- напряжения σ_z по сравнению с σ_r и σ_θ имеют незначительную величину;
- отношение плотностей составного тела оказывает как количественное, так и качествен-

ное влияние на напряженное состояние конструкции.

Следовательно, изменяя соотношение плотностей частей составного тела, т.е. подбирая материалы с различными объемными массами, можно изменять величину и распределение напряжений в том или ином сечении конструкции, что представляет большой практический интерес.

Предположим, что в рассматриваемой составной конструкции требуется, чтобы в точках контура, лежащих на стыке двух материалов, не возникали растягивающие радиальные напряжения.

Растягивающих радиальных напряжений можно избежать соответствующим выбором отношения плотностей K .

Предположив, что в формуле (8) $\sigma_r^{(нат)} = 0$, получим уравнение

$$K_{\omega}^2 K_{\rho} K_l \left[K \sigma_r^{(мод)} + (1-K) \left(\bar{\sigma}_r^{(мод)} - \sigma_r^{(мод)} \right) \right] = 0, \quad (9)$$

из которого, при известных в результате эксперимента величинах $\sigma_r^{(мод)}$, $\bar{\sigma}_r^{(мод)}$ и $\sigma_r^{(мод)}$, и $K_{\omega}^2 K_{\rho} K_l \neq 0$, найдем

$$0,4K + 0,5(1-K) = 0$$

$$K=5$$

Таким образом, при $K \geq 5$ растягивающих радиальных напряжений в точках контура, лежащих на стыке двух материалов, не будет.

Вывод. Поскольку с изменением отношений плотностей частей составного тела происходят существенные изменения, как в величинах, так и в распределении напряжений, то при исследовании подобных конструкций необходимо учитывать неравенство объемных масс материалов составного тела.

Библиографический список:

1. Абдулалиев З.Э. Определение температурных напряжений в деталях из нескольких материалов. Заводская лаборатория. 1970, № 3, с. 347-349.
2. Абдулалиев З.Э., Пригоровский Н.И. Поляризационно-оптические исследования термоупругих напряжений в конструкциях из материалов с различными коэффициентами температурного расширения, Методы исследования напряжений в конструкциях. Под ред. Н. И. Пригоровского, М., 1976, с. 93-104.
3. Бляхман Е.М., Евстифорова А.К. Получение разномодульных материалов путем модификации эпоксидно-диановых смол алифатическими эпоксидными смолами. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, под ред. С.П. Шихобалова, Л. 1966, с. 121-125.
4. Божкова Л.В., Дзю Иун-шуй, Невельская Т.П. Смешанная задача теории упругости для трехслойной кольцевой области, Теор. и эксперим. исслед. прочн. и жесткости элементов строит. конструкций, Моск. гос. строит. ун-т, М., 1997, с. 54-58.
5. Варданян Г.С., Гетрик В.И. О моделировании кусочно-однородных задач теории упругости поляризационно-оптическим методом//VIII Всесоюз. конф. по методу фотоупругости, Таллин, 1979, с. 33-37.
6. Варданян Г.С. Прикладная механика: применение методов теории подобия и анализа размерностей к моделированию задач механики деформируемого твердого тела, Учебное пособие, - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 174 с.
7. Варданян Г.С., Фриштер Л.Ю. О моделировании одного класса кусочно-однородных задач теории упругости, Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, № 6, с. 3-10.
8. Василенко А.Т., Клименко Н.И. Исследование напряженного состояния вращающихся неоднородных анизотропных цилиндров, Прикл. мех. (Киев), 1999, 35, № 8, с. 29-34.
9. Клименко Н.И. Решение задач о напряженном состоянии вращающихся неоднородных в окружном направлении анизотропных полых цилиндров. Прикл. мех., Киев, 1999, 35, №12, с. 56-62.
10. Койнаш Ю.А., Котов Б.П. Моделирование разномодульных конструкций методом радиационной тени. Тр. ин-та, МИСИ, 1976, № 137, с.56-60.
11. Маршалкович А.С., Щелканов И.В., Пятыхев Л.В., Дегтярева А.А. Разработка разномодульных эпоксид-

- ных полимерных материалов для моделирования композитных конструкций, Тр. ин-та, МИСИ, 1987, с. 156-163.
12. Олегин И. П. Решение некоторых классов задач теории упругости для тел вращения методом суперпозиций, Научн. вестник Новосиб. гос. тех. ун-та, 1996, №2, с. 57-67.
  13. Прейсс А.К., Граненко Ф.А. Применение метода «замораживания» к определению напряжений на вращающихся моделях, Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, Под ред. Н. И. Пригоровского, М., 1956, с. 271-279.
  14. Рябенков Н.Г. О выполнении условий свободной границы торца связующего в теории слоистых конструкций//Матер. 4-го Междунар. Симпозиума, Дин.и техно. Проблемы механики конструк. и сплошн. сред. Ярополец, 16-18 февр., 1998, М., 1998, с. 21-22.
  15. Сивчиков Б.Е. Исследование напряжений поляризационно-оптическим методом во вращающейся лопатке осевого компрессора. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, Под ред. С. П. Шихобалова, Л., 1960, с.332-340.
  16. Ушаков Б. Н. Исследование напряжений в композитных конструкциях, VIII Всесоюз. конф. по методу фотоупругости, Таллин. 1979, с. 283-290.
  17. Ушаков Б.Н., Фролов И.П. Напряжения в композитных конструкциях, М., Машиностроение, 1979, 134 с.
  18. Фриштер Л.Ю., Савостьянов В.Н. О представлении кусочно-однородной задачи теории упругости в виде суммы однородных задач, Вопросы математики, механики сплошн. сред и применения математических методов в строительстве, Сб. научн. тр. МГСУ, Москва, 1999, с. 169-178.
  19. Хесин Г.Л., Варданыан Г.С., Мовила Н.И. Моделирование напряженного состояния конструкций из разномодульных материалов на вязкоупругих моделях, Тр. ин-та, МИСИ, 1975, Вып. 125-126, с. 81-89.
  20. Шкелев Л.Т., Одинец Е.А. Приближенный метод решения пространственной задачи теории упругости, Киевск. нац. Ун-т стр-ва и архит., Киев, 1999, 8с., Деп. в ГНТБ Украины 26.07.99, №212-Ук. 99.
  21. Ashida Fumihiko, Tauchert Theodore. Control of a distribution of transient thermoelastical displacement in a composite circular disk, R. ISTAM, 2000, 20th, Intern. cong. of theor. and applied mechanics, Chicago, 27 Aug.-2 Sept., 2000, Abstr. Book. Urbana-Champaign (III), IUTAM, 2000, с. 166.
  22. Bossavit A. On the computation of strains and stresses in symmetrical articulated structures, Exploit. Symmetry Appl. and Numer. Anal, AMS-SIAM Summer Semin, Appl. Math., Fort Collins. Colo, July 26-Aug. 1, 1992, Providence, 1993, с. 111-123.
  23. Jain Rajeev, Ramachandra K., Simha K.R.Y. Rotating anisotropic disc of uniform strength, Int. J. Mech., Sci., 1999, 41, №6, с. 639-648.

References:

1. Abdulaliev Z.E. Opređenje temperaturnykh napryazhenii v detalyakh iz neskol'kikh materialov. Zavodskaya-laboratoriya. 1970; 3:347-349. [Abdulaliev Z.E. Determination of temperature stresses in details made of several materials. Industrial laboratory. 1970;3:347-349. (In Russ.)]
2. Abdulaliev Z.E., Prigorovskii N.I. Polyarizatsionno-opticheskie issledovaniya termouprugikh napryazhenii v konstruktsiyakh iz materialov s razlichnymi koeffitsientami temperaturnogo rasshireniya. Metody issledovaniya napryazhenii v konstruktsiyakh (Pod red. N. I. Prigorovskogo). M.; 1976. S. 93-104. [Abdulaliev Z.E., Prigorovskii N.I. Polarisation-optical investigations of thermoelastic stresses in structures made of materials with different coefficients of thermal expansion. Methods for studying stresses in constructions. (Ed. N.I. Prigorovskii). Moscow; 1976. P. 93-104. (In Russ.)]
3. Blyakhman E.M., Evstiforova A.K. Poluchenie raznomodul'nykh materialov putem modifikatsii epoksidno-dianovykh smol alifaticeskimi epoksidnymi smolami. Polyarizatsionno-opticheskii metod issledovaniya napryazhenii (Pod red. S.P. Shikhobalova). L.; 1966. C. 121-125. [Blyakhman E.M., Evstiforova A.K. Preparation of different-modular materials by modification of epoxy-diane resins with aliphatic epoxy resins. Polarisation-optical method for studying stresses (Ed. S.P. Shikhobalov). L.; 1966. C. 121-125. (In Russ.)]
4. Bozhkova L.V., Dzyulun-shui, Nevel'skaya T.P. Smeshannaya zadacha teorii uprugosti dlya trekhslonoinol'tsevoi oblasti. Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya prochnosti i zhestkosti elementov stroitel'nykh konstruktsii. M.: Moskovskii gosudarstvennyi stroitel'nyi universitet; 1997. S. 54-58. [Bozhkova L.V., Dzyulun-shui, Nevel'skaya T.P. Mixed problem of the theory of elasticity for a three-layer annular region. Theoretical and experimental studies of the strength and rigidity of structural elements. Moscow: State University of Civil Engineering; 1997. P. 54-58. (In Russ.)]
5. Vardanyan G.S., Getrik V.I. O modelirovanii kusochno-odnorodnykh zadach teorii uprugosti i polyarizatsionno-opticheskim metodom. VIII Vsesoyuznaya konferentsiya po metodu fotouprugosti. Tallin; 1979. S. 33-37. [Vardanyan G.S., Getrik V.I. On the simulation of piecewise-homogeneous problems of the theory of elasticity by the polarisation-optical method. The Proceedings of VIII All-Union Conference on the photoelasticity method. Tallin; 1979. P. 33-37. (In Russ.)]
6. Vardanyan G.S. Prikladnaya mekhanika: primeneniye metodov teorii podobiya i analiza razmernosti k modelirovaniyu zadach mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela. Uchebnoeposobie. M.: NITs INFRA-M; 2016. 174 s. [Vardanyan G.S. Applied mechanics: application of methods of similarity theory and analysis of dimensions to modelling problems of mechanics of a deforming solid. Tutorial. M.: NITs INFRA-M; 2016. 174 p. (In

- Russ.))
7. Vardanyan G.S., Frishter L.Yu. O modelirovaniy odnogo klassa kusochno-odnorodnykh zadach teorii uprugosti. Izv. AN Arm. SSR. Mekhanika. 1985; 6:3-10. [Vardanyan G.S., Frishter L.Yu. On the modelling of a class of piecewise-homogeneous problems in the theory of elasticity. Izv. AN Arm. SSR. Mechanics. 1985; 6:3-10. (In Russ.))
8. Vasilenko A.T., Klimenko N.I. Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya vrashchayushchikhsya neodnorodnykh anizotropnykh tsilindrov. Prikl. mekh. (Kiev). 1999; 35(8):29-34. [Vasilenko A.T., Klimenko N.I. Investigation of the stressed state of rotating in homogeneous anisotropic cylinders. International Applied Mechanics. 1999; 35(8):29-34. (In Russ.))
9. Klimenko N.I. Reshenie zadach o napryazhenom sostoyanii vrashchayushchikhsya neodnorodnykh v okruzhnom napravlenii i anizotropnykh polykh tsilindrov. Prikl. mekh. (Kiev). 1999; 35(12):56-62. [Klimenko N.I. Solution of problems on the stressed state of rotating anisotropic hollow cylinders that are nonuniform in the circumferential direction. International Applied Mechanics. 1999; 35(12):56-62. (In Russ.))
10. Koinash Yu.A., Kotov B.P., Modelirovanie raznomodul'nykh konstruktсий metodom radiatsionnoy tenozometrii. Trudy MISI. 1976; 137:56-60. [Koinash Yu.A., Kotov B.P., Modelling of multimodular structures using the shadow radiation method. Proceedings of MISI. 1976; 137:56-60. (In Russ.))
11. Marshalkovich A.S., Shchelkanov I.V., Pyatyshev L.V., Degtyareva A.A. Razrabotka raznomodul'nykh epoksidnykh polimernykh materialov dlya modelirovaniya kompozitnykh konstruktсий. Trudy MISI. 1987; 156-163. [Marshalkovich A.S., Shchelkanov I.V., Pyatyshev L.V., Degtyareva A.A. Development of multimodular epoxy polymeric materials for the modelling of composite structures. Proceedings of MISI. 1987; 156-163. (In Russ.))
12. Olegin I.P. Reshenie nekotorykh klassov zadach teorii uprugosti dlya tel vrashcheniya metodom superpozitsii. Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 1996; 2:57-67. [Olegin I.P. Solution of certain classes of problems in the theory of elasticity for bodies of revolution by the superposition method. Scientific Bulletin of the Novosibirsk State Technical University. 1996; 2:57-67. (In Russ.))
13. Preiss A.K., Granenko F.A. Primeneniye metoda "zamrazhivaniya" k opredeleniyu napryazheniya vrashchayushchikhsya modelyakh. Polyarizatsionno-opticheskiy i metod issledovaniya napryazhenii (Pod red. N.I. Prigorovskogo). M.; 1956. С. 271-279. [Preiss A.K., Granenko F.A. Application of the "freezing" method to the determination of stresses on rotating models. Polarisation-optical method for studying stresses (Ed. N.I. Prigorovskii). M.; 1956. P. 271-279. (In Russ.))
14. Ryabenkov N.G. O vypolnenii uslovii svobodnoy granitsy torga svyazuyushchego v teorii sloistnykh konstruktсий. Materialy 4-go mezhdunarodnogo simpoziuma "Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktсий i sploshnykh sred". Yaropolets, 1998. S. 21-22. [Ryabenkov N.G. On the fulfillment of the conditions for the free boundary of the end of the binder in the theory of layered structures. Materials of the 4th international symposium "Dynamic and technological problems of mechanics of structures and continuous media". Yaropolets, 1998. P. 21-22. (In Russ.))
15. Sivchikov B.E. Issledovanie napryazhenii polyarizatsionno-opticheskim metodom vo vrashchayushcheysya lopatke oseвого kompressora. Polyarizatsionno-opticheskiy metod issledovaniya napryazhenii (Pod red. S. P. Shikhobalova). L.; 1960. С. 332-340. [Sivchikov B.E. Investigation of stresses by the polarisation-optical method in a rotating blade of an axial compressor. Polarisation-optical method for studying stresses (Ed. S.P. Shikhobalov). L.; 1960. P. 332-340. (In Russ.))
16. Ushakov B.N. Issledovanie napryazhenii v kompozitnykh konstruktсийakh. VIII Vsesoyuznaya konferentsiya po metodu fotouprugosti. Tallin; 1979. S. 283-290. [Ushakov B.N. Investigation of stresses in composite structures. The Proceedings of VIII All-Union Conference on the photoelasticity method. Tallin; 1979. P. 283-290. (In Russ.))
17. Ushakov B.N., Frolov I.P. Napryazheniya v kompozitnykh konstruktсийakh. M.: Mashinostroyeniye; 1979. 134 s. [Ushakov B.N., Frolov I.P. Stresses in composite structures. M.: Mashinostroyeniye; 1979. 134 p. (In Russ.))
18. Frishter L. Yu., Savost'yanov V. N. O predstavlenii kusochno-odnorodnoy zadachi teorii uprugosti v vide summy odnorodnykh zadach. Voprosy matematiki, mekhaniki sploshnykh sred i primeneniya matematicheskikh metodov v stroitel'stve. Sb. nauchn. tr. MGSU. Moskva. 1999. S. 169-178. [Frishter L. Yu., Savost'yanov V. N. On the representation of a piecewise homogeneous problem of the theory of elasticity in the form of a sum of homogeneous problems. Problems of Mathematics, Continuum Mechanics, and Mathematical Methods in Construction. Collection of scientific works of MGSU, Moscow. 1999. P. 169-178. (In Russ.))
19. Khesin G.L., Vardanyan G.S., Movila N.I. Modelirovanie napryazhennogo sostoyaniya konstruktсий iz raznomodul'nykh materialov na vyazkouprugikh modelyakh. Trudy MISI. 1975; (125-126):81-89. [Khesin G.L., Vardanyan G.S., Movila N.I. Modelling of the stressed state of constructions from different modular materials by viscoelastic models. Proceedings of MISI. 1975; (125-126):81-89. (In Russ.))
20. Shkelev L.T., Odinets E.A. Priblizhennyy metod resheniya prostanstvennoy zadachi teorii uprugosti. Kievskiy inatsional'nyi Universitet stroitel'stva i arkhitektury. Kiev; 1999, 8 s., Dep. v GNTB Ukrainy 26.07.99, №212-Uk. 99. [Shkelev L.T., Odinets E.A. Approximate method for solving the spatial problem of the theory of elasticity. Kyiv National University of Construction and Architecture. Kiev; 1999, 8 p., Dep. in the State Technical Library of Ukraine on July 26, 1999, №212-Uk. 99. (In Russ.))
21. Ashida F., Tauchert T. Control of adistribution of transient thermoelastic displacement in a composite circular

- disk.R.IS TAM, 2000, 20th, Intern.cong. of theor. and applied mechanics, Chicago, 27 Aug.-2Sept., 2000, Abstr. Book. Urbana-Champaign (III), IUTAM, 2000, P. 166.
22. Bossavit A. On the computation of strains and stresses in symmetrical articulated structures. Exploit. Symmetry Appl. and Numer. Anal, AMS-SIAM Summer Semin, Appl. Math., Fort Collins. Colo, July 26-Aug. 1, 1992, Providence, 1993, P. 111-123.
23. Jain R., Ramachandra K., Simha K.R.Y. Rotating anisotropic disc of uniform strength. Int. J. Mech. Sci. 1999; 41(6):639-648.

Сведения об авторах:

Агаханов Элифхан Керимханович – доктор технических наук, профессор, кафедра автомобильных дорог, оснований и фундаментов.

Магомедэминов Нажмудин Серажудинович – кандидат технических наук, старший преподаватель, кафедра строительных материалов и инженерных сетей.

Раджабов Рустам Габирович – старший преподаватель, кафедра строительных материалов и инженерных сетей.

Information about the authors:

Elifkhan K. Agakhanov – Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of Automobile Roads, Basements and Foundations.

Nazhmudin S. Magomedeminov – Cand. Sci. (Technical), Senior Lecturer, Department of Building Materials and Engineering Networks.

Rustam G. Radzhabov – Senior Lecturer, Department of Building Materials and Engineering Networks.

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 10.09.2017.

Принята в печать 20.10.2017.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 10.09.2017.

Accepted for publication 20.10.2017.