

**Для цитирования:** Мурадова С.Ш., Федосеева Л.В. Воздействие сыпучих материалов на стенки целевых бункеров. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017; 44 (3):24-38. DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-3-24-38

**For citation:** Muradova S.Sh., Fedoseeva L.V. Impact of loose materials on track hopper walls. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2017; 44 (3):24-38. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-3-24-38

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ МЕХАНИКА

УДК 62-405.6

DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-3-24-38

### ВОЗДЕЙСТВИЕ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ НА СТЕНКИ ЩЕЛЕВЫХ БУНКЕРОВ

Мурадова С.Ш.<sup>1</sup>, Федосеева Л.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный университет (Институт управления бизнеса и права),  
344068, г. Ростов-на-Дону, пр. Михаила Нагибина, 33а/47, Россия,

<sup>2</sup>Донской государственный технический университет,

344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, Россия,

<sup>1</sup>e-mail: ssh.muradova@mail.ru, <sup>2</sup>e-mail: fedoseevvb@gmail.com

**Резюме. Цель.** При конструировании различного вида устройств важно знать распределение давления, как по их стенкам, так и величину давления на уровне выпускного устройства. В статье выводятся дифференциальные уравнения для равновесного и стационарного состояний сыпучей среды с учётом сил сухого трения между её частицами. **Метод.** Полагая, что вертикальная компонента давления  $P_z$ , соответственно и градиент этой компоненты по оси  $OZ$ , зависят от радиуса. Следовательно, на соседние элементарные кольца по вертикали будут действовать разные силы. Это приведет к тому, что соседнее внешнее элементарное кольцо, по отношению к рассматриваемому, будет смещаться вниз, а соседнее внутреннее кольцо относительно рассматриваемого элементарного кольца будет смещаться вверх. Поэтому силы сухого трения, действующие на внутреннюю и внешнюю боковую поверхность рассматриваемого элементарного кольца, будут направлены в разные стороны. Результирующая сила будет определяться градиентом по координате  $\rho$  компоненты давления  $P_\rho$ . Предположение о зависимости компонент давления, действующего в сыпучем материале, от координат, ведет к необходимости учитывать эту силу. **Результат.** Полученные дифференциальные уравнения интегрируются путём последовательного приближения в граничных условиях, соответствующих протяжённому щелевому бункеру; выведенные аналитические выражения для компонент давления сыпучего материала в бункере иллюстрируются с помощью графиков для реальных параметров бункеров; анализируется распределение давления сыпучего материала по стенкам щелевых бункеров, на основе представлений о сыпучем материале, как о легкодеформируемой анизотропной среде, по своим свойствам отличающейся от жидкости и не подчиняющейся закону Паскаля. **Вывод.** Стенки бункера берут на себя всю нагрузку. Для экономии материала стенки можно принять не постоянной, а переменной величиной, обеспечивая максимальную прочность на уровне 2/3 от высоты, на которой необходимо расположить вибраторы для обеспечения непрерывного истечения сыпучего материала из бункера.

**Ключевые слова:** давление, давление сыпучего материала, анизотропия давления, давление на дно и стенки бункеров

PHYSICAL-MATEMATICAL SCIENCE  
MECHANICS  
IMPACT OF LOOSE MATERIALS ON TRACK HOPPER WALLS

*Safura S. Muradova.<sup>1</sup>, Lyudmila V. Fedoseeva<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Southern University (Institute of Management, Business and Law),*

<sup>1</sup>*33a/4 Nagibina Ave., Rostov-on-Don 344068, Russia,*

<sup>2</sup>*Don State Technical University,*

<sup>2</sup>*1 Gagarina Square, Rostov-on-Don 344000, Russia,*

<sup>1</sup>*e-mail: ssh.muradova@mail.ru, <sup>2</sup>e-mail: fedoseevvb@gmail.com*

**Abstract Objectives.** During the design of different types of devices it is important to obtain reliable information concerning both the pressure distribution along the device's walls and the pressure at the level of the eduction gear. Differential equations for the equilibrium and stationary states of the loose medium accounting for the forces of dry friction between its particles are provided in the article. **Methods.** Both the vertical pressure component  $P_z$  and its gradient along axis  $OZ$  are assumed to depend on the respective radius. Consequently, different forces will act vertically on the neighbouring elementary rings. This leads to the neighbouring outer ring being shifted downwards relative to the one under consideration; conversely the neighbouring inner ring, relative to the latter, will be shifted upwards. Therefore, the forces of dry friction acting on the inner and outer lateral surfaces of the elementary ring under consideration will be directed in opposite directions. The resultant force will be determined by the gradient of the pressure component along the coordinate  $\rho$   $P_\rho$ . The assumption that the components of the pressure acting on the loose material depend on the coordinates leads to the need to take this force into account. **Results.** The resulting differential equations are integrated by successive approximation in the boundary conditions corresponding to an extended track hopper; the derived analytical expressions for the pressure components of loose material in the hopper are illustrated with the help of graphs for the actual parameters of the hoppers; the distribution of loose material pressure along the walls of track hoppers is analysed on the basis of loose material concepts as an easily deformed anisotropic medium, which differs in its properties from a liquid and does not obey Pascal's law. **Conclusion.** The walls of the hopper take on all the load. To save the wall's material, its thickness can be considered not as a constant, but rather as a variable, providing maximum strength at a level of 2/3rds of the height at which vibrators are to be positioned to ensure a continuous flow of loose material from the hopper.

**Keywords:** pressure, loose material pressure, pressure anisotropy, pressure on the bottom and walls of hoppers

**Введение.** Как известно, к целевым коническим бункерам относятся различного рода дозаторы, погрузчики, разгрузчики, которые находят широкое применение в АПК, а также в технических отраслях. При конструировании различного вида этих устройств чрезвычайно важно знать распределение давления, как по их стенкам, так и величину давления на уровне выпускного устройства. Здесь очевидна важность аналитического, а не численного решения. Однако до сих пор не сформирована системная, законченная и общепризнанная теория сыпучих сред.

В настоящее время при создании такой теории рассматривают в основном два направления.

Первое направление – модель сыпучего тела на основе представлений сплошной среды. Основоположник данной модели и теории французский физик и инженер Coulomb [1] еще в 1783 году сформулировал основные положения предельного равновесия. Второе направление предусматривает создание строгой теории предельного равновесия, так называемая модель сыпучего материала. Здесь необходимо отметить работы М.В.Малышева [2] и Г.К.Клейна [3].

Обобщением и развитием работ по статике сплошной среды занимался В.В.Соколовский [4]. Дальнейшее развитие модель сплошной среды получила в работах [5-8] и др.

Дискретную модель зернового материала впервые предложил английский инженер С. Дженкин [9] в 1931 г.

Отечественный ученый Л. В. Гячев развил идеи Coulomb и С. Дженкина, предложив дискретную модель сыпучего тела с сухим трением [10, 11]. Развитием модели, предложенной Л.В. Гячевым, занимались и за рубежом [12 - 14].

**Постановка задачи.** В данной работе под сыпучим материалом будем понимать вещество, состоящее из частиц различной величины и формы, взаимодействующих между собой и стенами ограждающей емкости посредством электромагнитных сил, сил сухого и вязкого трения, а также сил сцепления. Если электромагнитные силы, силы вязкого трения и силы сцепления отсутствуют, а проявляются лишь силы сухого трения, то такое состояние вещества будем называть идеальным сыпучим материалом.

Рассмотрим насыпь идеального сыпучего материала, некоторой высоты  $H$ , находящуюся в цилиндрической емкости (рис.1).

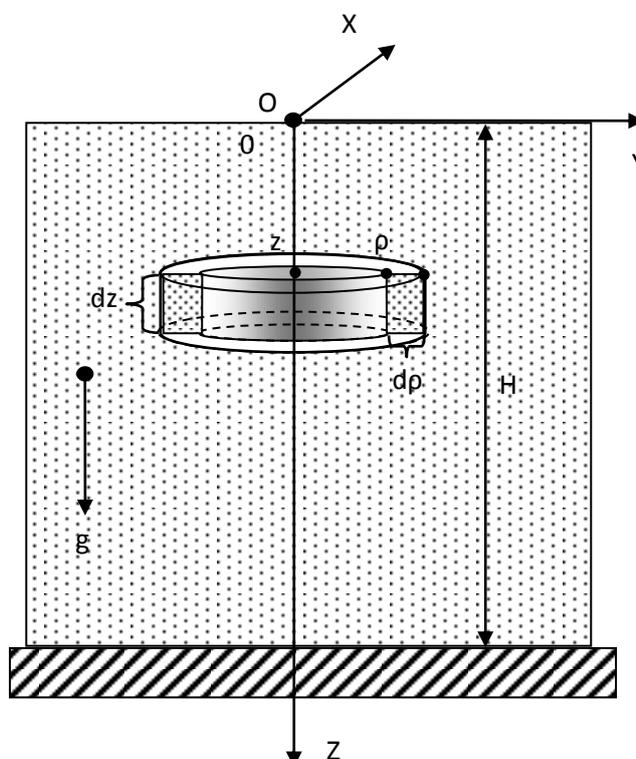


Рис. 1. Схема насыпи, элементарного объема и координатных осей  
Fig. 1. The scheme of a mound, an elementary volume and coordinate axes

В этом случае можно выделить лишь два преимущественных направления: вертикальное, совпадающее с направлением действия силы тяжести, и горизонтальное, перпендикулярное действию силы тяжести. Поэтому для описания состояния идеального сыпучего материала, целесообразно воспользоваться цилиндрической системой координат.

В массе сыпучего материала выделим элементарное кольцо (рис. 1), объем которого в этой системе будет равен:  $2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot dz$ .

Вращательное движение мы пока не рассматриваем, поэтому второй закон Ньютона для элементарного кольца будет иметь вид:

$$\frac{d(m \cdot \vec{V})}{dt} = \sum \vec{F} \quad (1)$$

где,  $m$  – масса элементарного кольца  $\vec{V}$  – скорость его движения,  $\vec{F}$  – силы, действующие на это элементарное кольцо.

При равновесном и стационарном состояниях сыпучего материала, уравнение (1) распадется на два самостоятельных уравнения:

$$\frac{d(m \cdot \vec{V})}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (3)$$

Под равновесным состоянием сыпучего материала будем понимать такое состояние, когда все его части находятся в равновесии и покое (импульс любого выделенного элемента равен нулю).

Под стационарным состоянием будем понимать такое состояние, при котором все его части движутся с постоянной скоростью, оставаясь при этом в равновесии (импульс любого выделенного элемента не зависит от времени, постоянен).

**Методы исследования.** Рассмотрим уравнение (3). Мы полагаем, что в массе сыпучего материала существует давление, компоненты которого  $P_z$  и  $P_\rho$ , и эти компоненты в общем случае не равны друг другу, как в случае идеальной жидкости (закон Паскаля). Также мы полагаем, что эти компоненты зависят от координат  $z$  и  $\rho$ , и не зависят от координаты  $\varphi$ .

В проекции на вертикальную ось  $OZ$  (рис. 1), уравнение (3) будет иметь вид:

$$0 = \gamma \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot dz \cdot g - 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz - \mu_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dz \cdot \frac{\partial P_\rho}{\partial \rho} \cdot d\rho \quad (4)$$

В этом уравнении первое слагаемое – сила тяжести элементарного кольца, направленная вниз, вдоль положительного направления оси  $OZ$ .

Второе – сила сопротивления движению на горизонтальных поверхностях элементарного кольца за счет градиента вертикальной компоненты давления  $P_z$  по вертикали, направленного вверх, вдоль отрицательного направления оси  $OZ$ .

Третье – сила внутреннего, сухого трения на боковых поверхностях кольца за счет градиента радиальной компоненты давления по радиусу, также направленная вверх. Эта сила возникает именно за счет градиента радиальной компоненты давления по радиусу. Если бы отсутствовал этот градиент, то все элементарные кольца разного диаметра двигались бы по вертикали одинаково, инужно было бы рассматривать элементарный слой, как в модели Янсена, Гячева [11], а не элементарное кольцо, как в нашем случае.

Действительно, мы полагаем, что вертикальная компонента давления  $P_z$ , соответственно и градиент этой компоненты по оси  $OZ$ , зависят от радиуса. Следовательно, на соседние элементарные кольца по вертикали будут действовать разные силы. Это приведет к тому, что, например, соседнее внешнее элементарное кольцо, по отношению к рассматриваемому, будет смещаться вниз, а соседнее внутреннее кольцо будет смещаться (относительно рассматриваемого элементарного кольца) вверх.

Поэтому силы сухого трения, действующие на внутреннюю и внешнюю боковую поверхность рассматриваемого элементарного кольца, будут направлены в разные стороны. И результирующая сила будет определяться градиентом по координате  $\rho$  компоненты давления  $P_\rho$ . Таким образом, предположение о зависимости компонент давления, действующего в сыпучем материале, от координат, ведет к необходимости учитывать эту силу.

Далее:  $\gamma$  – плотность сыпучего материала;  $\mu_i$  – коэффициент внутреннего, сухого тре-

ния;  $P_z$  – давление по вертикали или вертикальное давление,  $P_\rho$  – по горизонтали или горизонтальное давление в сыпучем материале.

В проекции на радиальную ось уравнение (3) будет иметь вид:

$$0 = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dz \cdot \frac{\partial P_\rho}{\partial \rho} \cdot d\rho - \mu_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое – сила сопротивления сжатию (или растяжению) элементарного кольца, обусловленная градиентом горизонтального давления по радиальной координате. То есть, элементарное кольцо может сжиматься или расширяться. Второе – сила трения на горизонтальных поверхностях кольца, возникающая при таком сжатии (растяжении).

Из уравнения (5) вытекает, что горизонтальное давление  $P_\rho$  действительно распределено неравномерно по площади горизонтального сечения (т.е.  $\frac{\partial P_\rho}{\partial \rho} \neq 0$ ). В противном случае и вертикальное давление не изменялось бы по высоте насыпи, что противоречит практическим наблюдениям. Из (5) также следует, что если градиент вертикального давления равномерно распределено по площади поперечного, горизонтального сечения, (т.е.  $\frac{\partial P_z}{\partial z} = f(\rho)$ ), то горизонтальное давление будет линейно зависеть от координаты  $\rho$ .

Предположим, что мы рассматриваем не сыпучее тело, а идеальную жидкость, для которой коэффициент внутреннего, сухого трения –  $\mu_i = 0$ .

В этом случае, согласно уравнению (5), горизонтальное давление  $P_\rho$  не зависело бы от горизонтальной координаты  $\rho$ . Поскольку, согласно закону Паскаля, давление в жидкости передается во все стороны одинаково, т.е. горизонтальное давление равно вертикальному давлению, то и вертикальное давление также не будет зависеть от горизонтальной координаты  $\rho$ .

В этом случае уравнение (4) приняло бы вид:

$$0 = \gamma \cdot g - \frac{dP_z}{dz} \quad (6)$$

Вместо частной производной записана полная производная, поскольку давление зависит только от одной координаты  $z$ .

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$P_z = \gamma \cdot g \cdot z + C$$

В плоскости  $z = 0$  давление равно нулю, отсюда константа интегрирования равна нулю  $C = 0$ , и получаем известное уравнение гидростатики:

$$P_z = \gamma \cdot g \cdot z \quad (7)$$

При этом и горизонтальное давление, согласно закону Паскаля, будет определяться аналогичным выражением:

$$P_\rho = \gamma \cdot g \cdot z$$

Необходимо отметить, что этот результат ( $P_\rho = \gamma \cdot g \cdot z$ ) непосредственно из дифференциальных уравнений (4) и (5) не следует. Он вытекает из экспериментального закона Паскаля для жидкостей.

Для идеального сыпучего материала также существует эмпирическое соотношение, подобное закону Паскаля, установленное на основании практических наблюдений.

Согласно этому соотношению горизонтальное давление прямо пропорционально вертикальному:

$$P_\rho(\rho, z) = k \cdot P_z(\rho, z) \quad (8)$$

Здесь  $k$  – так называемый, боковой коэффициент. Мы будем полагать, что этот коэффициент не зависит от координат, т.е.  $k = const$ .

Можно попытаться обобщить соотношение (8) следующим образом:

$$P_{\beta} = P_z \cdot (1 - (1 - k) \cdot \sin \beta) \quad (9)$$

где  $P_{\beta}$  – давление в сыпучей среде по некоторому произвольному направлению,  $\beta$  – угол между этим направлением и осью  $OZ$ .

Множитель перед первой скобкой – вертикальное давление. Это естественно, так как мы рассматриваем состояние движения сыпучего материала под действием сил гравитации. Следовательно, вертикальное давление будет основным, ведущим фактором, под действием которого формируется все поле давления в сыпучем материале.

Если направление, вдоль которого определяется давление, совпадает с осью  $OZ$ , то угол  $\beta = 0$  и  $P_0 = P_z$ . Если это направление совпадает с осью  $OY$ , либо  $OX$ , т.е. находится в горизонтальной плоскости, то угол  $\beta = \pi/2$  и  $P_{\pi/2} = P_y = k \cdot P_z$ .

То есть, на основании экспериментальных данных, сыпучую среду приходится считать анизотропной средой.

Формулу (9) можно считать универсальной. Для идеальной жидкости  $k = 1$  и давление не зависит от направления.

Для идеально твердого тела  $k = 0$  и давление по разным направлениям будет определяться выражением:

$$P = P_z \cdot (1 - \sin \beta)$$

В частности для идеально твердого тела  $P_y = 0$  (если действует внешнее давление, направленное только по вертикали, т.е.  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ).

Для сыпучего тела коэффициент  $k$  заключен в пределах от нуля до единицы. Очевидно, что этот коэффициент зависит от свойств самого сыпучего материала. Однако до сих пор для него не получено аналитического выражения, применимого для любого сыпучего материала. С использованием (9), для определения давления в сыпучем материале получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \gamma \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot dz \cdot g - 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz - \mu_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dz \cdot \frac{\partial P_{\rho}}{\partial \rho} \cdot d\rho \\ 0 = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dz \cdot \frac{\partial P_{\rho}}{\partial \rho} \cdot d\rho - \mu_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \\ P_{\beta} = P_z \cdot (1 - (1 - k) \cdot \sin \beta) \end{cases} \quad (10)$$

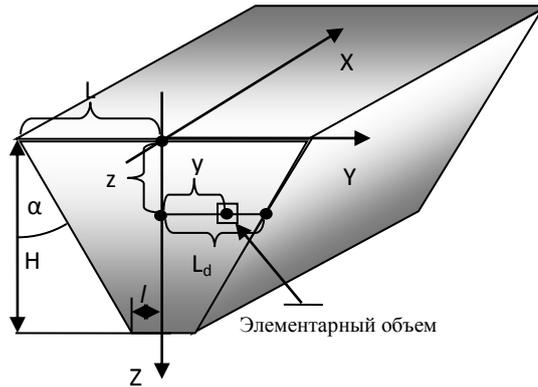
Фактически, первые два уравнения системы (10) представляет собой уравнения Эйлера в гидродинамике идеальной жидкости, записанные применительно к нашей задаче, в случае равенства нулю левой части (ускорения).

Эту систему, с использованием (8), можно разрешить и представить в виде:

$$\begin{cases} 0 = \gamma \cdot g \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho - (1 + \mu_i^2) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \\ k \cdot \frac{\partial P_z}{\partial \rho} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho = \mu_i \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \\ P_{\rho}(\rho, z) = k \cdot P_z(\rho, z) \end{cases} \quad (11)$$

Первое уравнение системы (11) можно использовать для нахождения зависимости вертикального давления от координаты  $z$ . Второе уравнение – для нахождения его зависимости от координаты  $\rho$ . Третье – для нахождения горизонтального давления.

**Обсуждение результатов.** Необходимо отметить, что данный подход является дальнейшим развитием теоретических исследований, опубликованных в работах [15 - 18]. Похожий подход для получения основных уравнений был использован в работах [19 - 20].



**Рис. 2. Щелевой бункер по оси координат**  
**Fig. 2. Slot bunker along the coordinate axis**

Рассмотрим щелевой бункер, достаточно протяженный вдоль оси  $OX$ , с углом наклона стенки к вертикали  $-\alpha$  (рис. 2).

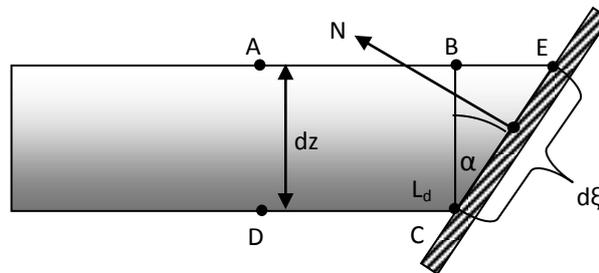
Первое уравнение системы (11) примет вид  $\gamma \cdot g \cdot dy \cdot dz = (1 + \mu_i^2) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dy \cdot dz$

Проинтегрируем это уравнение по координате  $y$  от  $-L_d$  до  $+L_d$ .

Перейдем от элементарного объема к элементарному горизонтальному слою толщиной  $dz$ .

$$\gamma \cdot g \cdot dz \cdot 2 \cdot L_d = (1 + \mu_i^2) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \cdot 2 \cdot L_d + C \quad (12)$$

Константа интегрирования  $C$  по физическому смыслу будет представлять собой вертикальную компоненту силы, действующей на две боковые поверхности элементарного слоя. Для ее нахождения рассмотрим контакт элементарного, горизонтального слоя с боковой поверхностью щелевого бункера (рис. 3).



**Рис. 3. Контакт элементарного слоя с боковой поверхностью бункера**  
**Fig. 3. Contact of the elemental layer with the side surface of the hopper**

В этом случае на боковую поверхность элементарного слоя будет действовать только сила трения, которую определим как силу сухого трения  $F_{TP} = \mu_e N$ , где  $\mu_e$  – коэффициент внешнего трения. Очевидно, что сила реакции стенки  $-N$  будет определяться давлением, действующим на боковую стенку.

В этом случае константа интегрирования  $C$  (вертикальная компонента силы трения) будет равна (рис. 3):

$$C = 2 \cdot \mu_e \cdot N \cdot \cos \alpha = 2 \cdot P \cdot d\xi \cdot \mu_e \cdot \cos \alpha = 2 \cdot P \cdot \frac{dz}{\cos \alpha} \cdot \mu_e \cdot \cos \alpha = 2 \cdot P \cdot \mu_e \cdot dz \quad (13)$$

Подставляя в (13) выражение для давления согласно (9), получим:

$$C = 2 \cdot P_z \cdot \mu_e \cdot (1 - (1 - k) \cdot \cos \alpha) \cdot dz \quad (14)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что угол между направлением силы реакции  $N$  и осью  $OZ$  равен  $\pi/2 - \alpha$  (рис. 2), а в (9) входит угол между вертикальным давлением и давлением по данному направлению.

С учетом (14) уравнение (12) преобразуется следующим образом:

$$\gamma \cdot g \cdot dz \cdot 2 \cdot L_d = (1 + \mu_i^2) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \cdot 2 \cdot L_d + 2 \cdot P_z \cdot \mu_e \cdot (1 - (1 - k) \cdot \cos \alpha) \cdot dz$$

Приведем это уравнение к стандартному виду:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{P_z \cdot \mu_e \cdot (1 - (1 - k) \cdot \cos \alpha)}{(1 + \mu_i^2) \cdot (L - z \cdot \operatorname{tg} \alpha)} - B = 0 \quad (15)$$

Здесь использовано соотношение:

$$L_d = L - z \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (16)$$

Решение уравнения (15) имеет вид:

$$P_z = C \cdot (-L + b \cdot z)^{\frac{A}{b}} - \frac{B}{A - b} \cdot (-L + b \cdot z)$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения:

$$b = \operatorname{tg} \alpha \quad A = \frac{\mu_e \cdot (1 - (1 - k) \cdot \cos \alpha)}{1 + \mu_i^2} \quad (17)$$

На поверхности давление должно равняться нулю. Из этого условия получим выражение для константы интегрирования:

$$C = \frac{B}{A - b} \cdot (-L)^{1 - \frac{A}{b}}$$

При этом решение будет иметь вид:

$$P_z(z) = \frac{B \cdot L}{A - b} \cdot \left(1 - \frac{b \cdot z}{L}\right) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{b \cdot z}{L}\right)^{\frac{A}{b} - 1}\right) \quad (18)$$

При переходе к равновесному состоянию  $\mu_i \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 1$ ,  $A \rightarrow \mu_e$ .

В этом случае давление в щелевом бункере будет определяться выражением:

$$P_0(z) = \frac{\gamma \cdot g \cdot L}{\mu_e - b} \cdot \left(1 - \frac{b \cdot z}{L}\right) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{b \cdot z}{L}\right)^{\frac{\mu_e}{b} - 1}\right) \quad (19)$$

Таким образом, выражение (18) описывает давление в щелевом бункере в стационарном состоянии (при движении сыпучего материала), а выражение (19) в равновесном состоянии (при неподвижном сыпучем материале).

Из выражения (19) видно, что при  $b = \mu_e$  ( $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi$ ) возникает неопределенность типа  $0/0$ . Раскрыв ее с помощью правила Лопитала, получим:

$$P_{0KP}(z) = -\frac{\gamma \cdot g \cdot L}{b} \cdot \left(1 - \frac{b \cdot z}{L}\right) \cdot \ln \left(1 - \frac{b \cdot z}{L}\right) \quad (20)$$

На рис.4 приведены кривые равновесного давления в щелевом бункере (сплошные линии), рассчитанные по формуле (19), и кривая критического равновесного давления (линия из точек  $b = \mu_e$ ), рассчитанная по формуле (20). Как видно из рис.4, никаких разрывов не наблюдается.

На рис. 5 приведены кривые вертикального (сплошная линия) горизонтального (пунктирная линия) в стационарном состоянии и давление в равновесном состоянии (линия из точек) для щелевого бункера.

Как видим, также как и в траншее, вертикальное давление в стационарном состоянии больше давления в равновесном состоянии.

В то же время горизонтальное давление в стационарном состоянии меньше давления в равновесном состоянии указывает на то, что в стационарном состоянии давление на стены меньше, чем в равновесном состоянии.

Это не противоречит физическому смыслу задачи, особенно если провести аналогию с гидродинамикой. А так как происходит непрерывное уплотнение сыпучего материала, то будут наблюдаться пульсации давления на стенке щелевого бункера.

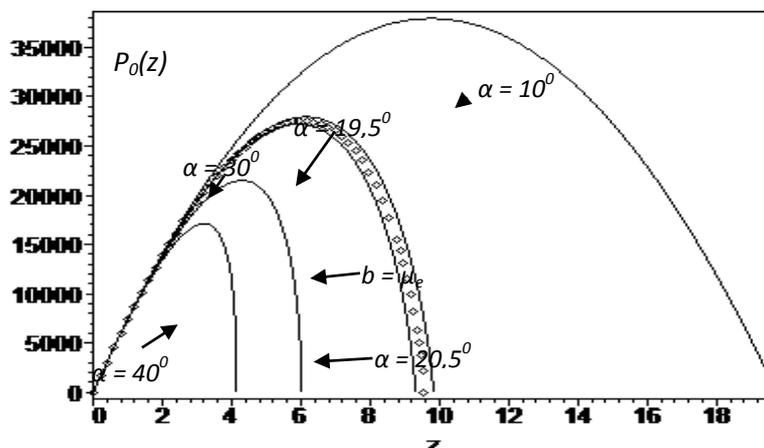


Рис. 4. Кривые равновесного давления в щелевом бункере (сплошные линии) при разных углах наклона стенки и кривая критического равновесного давления ( $b = \mu_c$ ) в том же бункере (кривая из точек)  $L = 3,5$  м,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\phi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ ,  $\gamma = 800$  кг / м<sup>3</sup>

Fig. 4. Equilibrium pressure curves in the slit bin (solid lines) at different angles of the wall inclination and the curve of the critical equilibrium pressure ( $b = \mu_c$ ) in the same bin (curve from the points)  $L = 3.5$  m,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\phi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ ,  $\gamma = 800$  kg / m<sup>3</sup>

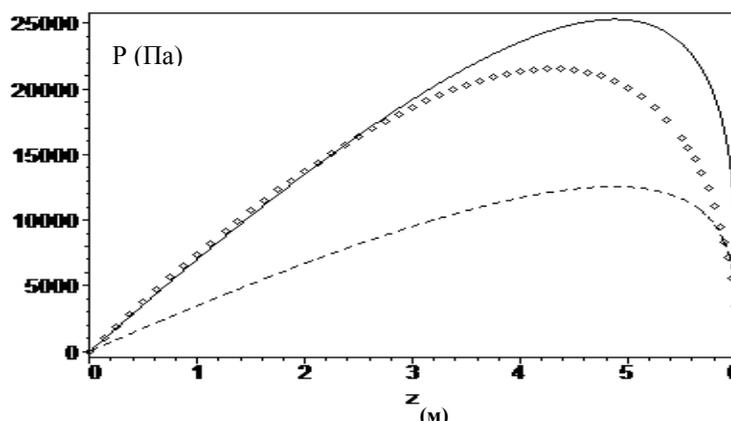


Рис. 5. Вертикальное (сплошная линия) и горизонтальное (пунктирная линия) давление в щелевом бункере в стационарном случае и давление в равновесном состоянии (линия из точек)  $L = 3,5$  м,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\phi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ ,  $\gamma = 800$  кг / м<sup>3</sup>

Fig. 5. Vertical (solid line) and horizontal (dotted line) pressure in the slot hopper in the stationary case and pressure in the equilibrium state (line of points)  $L = 3.5$  m,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\phi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ ,  $\gamma = 800$  kg / m<sup>3</sup>

На рис. 6 представлены кривые зависимости вертикального давления от координаты  $z$  при разных углах наклона стенки бункера (сплошные линии). Для сравнения на этом же графике приведена кривая зависимости вертикального давления от координаты  $z$  для прямоугольной траншеи (линия из точек).

При этом горизонтальный размер, ширина в верхней части  $L$ , для них одинаков -  $L = 3,5$  м. Как видно по рис.6, при уменьшении угла наклона стенки бункера к вертикали, различие между кривыми для щелевого бункера и прямоугольной траншеи уменьшаются.

Ведем теперь в полученное решение зависимость от координаты  $y$ . С этой целью, все пространство, занятое щелевым бункером разобьем на две области, как показано на рис.7. Ре-

шение в области I представим в виде:  $P_z^I = B \cdot z$ . Решение в области II будем искать в виде:

$$P_z^{II}(y, z) = \frac{B \cdot L}{A - b} \cdot \left( 1 - \frac{b \cdot z}{L} \cdot \left( 1 - \frac{L_d - y}{L_d - L_b} \right) \right) \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{b \cdot z}{L} \cdot \left( 1 - \frac{L_d - y}{L_d - L_b} \right) \right)^{\frac{A}{b} - 1} \right) + B \cdot \frac{L_d - y}{L_d - L_b} \cdot z \quad (21)$$

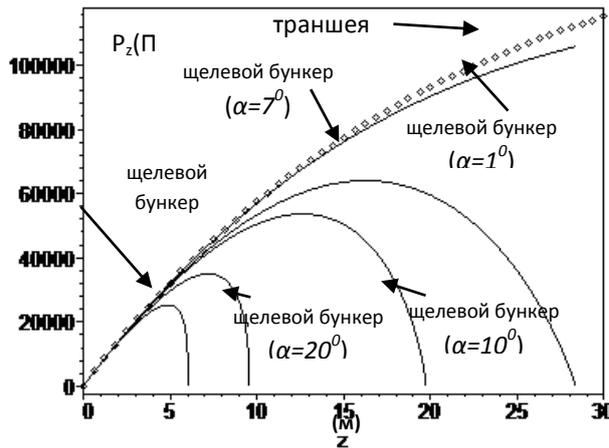


Рис. 6. Зависимость вертикального давления от координаты z для различных углов наклона стенки щелевого бункера ( $\psi=16^\circ$ ,  $\phi=20^\circ$ ,  $\chi=30^\circ$ ,  $\gamma=800 \text{ кг/м}^3$ ,  $W=3,5 \text{ м}$ )

Fig. 6. Dependence of the vertical pressure on the z coordinate for different slope angles of the slit-bin wall ( $\psi = 160$ ,  $\phi = 200$ ,  $\chi = 300$ ,  $\gamma = 800 \text{ kg / m}^3$ ,  $W = 3.5 \text{ m}$ )

При этом (рис. 7):

$$L - L_b = \frac{z}{\text{tg } \chi}; \quad L - L_d = b \cdot z \quad (22)$$

На границе областей, определяемой уравнением:  $y = L_b$  (рис. 7), первое слагаемое решения (21) обращается в нуль, а второе слагаемое переходит в  $P_z^I$ . На боковой поверхности щелевого бункера, определяемой уравнением  $y = L_d$ , второе слагаемое (21) обращается в нуль, а первое переходит в (18).

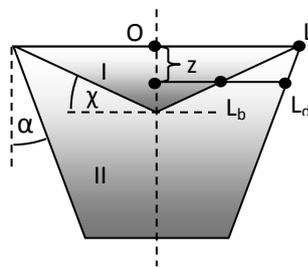


Рис. 7. Разделение пространства щелевого бункера на области  
 Fig. 7. Split the space of the slot hopper into areas

Таким образом, решения (18), (19) и (21) удовлетворяют граничным условиям и предельному переходу к идеальной жидкости. Посмотрим, удовлетворяет ли решение (21) второму уравнению системы (11). Для этого формулу (21) представим в виде явной зависимости от координат:

$$P_z^{\mu}(y, z) = \frac{B \cdot L}{A - b} \cdot \left( \left( 1 - \frac{b}{L} \cdot \frac{z - (L - y) \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \right) - \left( 1 - \frac{b}{L} \cdot \frac{z - (L - y) \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \right)^{\frac{A}{b}} \right) + \quad (23)$$

$$+ B \cdot \frac{L - b \cdot z - y}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \cdot \operatorname{tg} \chi$$

Найдем теперь первые производные по координатам:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{B \cdot L}{A - b} \cdot \frac{b}{L} \cdot \frac{1}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \left( \frac{A}{b} \cdot \left( 1 - \frac{b}{L} \cdot \frac{z - (L - y) \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \right)^{\frac{A}{b} - 1} - 1 \right) - B \cdot \frac{b \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi}$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial y} = \frac{B \cdot L}{A - b} \cdot \frac{b}{L} \cdot \frac{\operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \cdot \left( \frac{A}{b} \cdot \left( 1 - \frac{b}{L} \cdot \frac{z - (L - y) \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \right)^{\frac{A}{b} - 1} - 1 \right) - B \cdot \frac{\operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi}$$

Подставим теперь найденные значения производных во второе уравнение системы (11):

$$k \cdot \frac{B \cdot L}{A - b} \cdot \frac{b}{L} \cdot \frac{\operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \cdot \left( \frac{A}{b} \cdot \left( 1 - \frac{b}{L} \cdot \frac{z - (L - y) \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \right)^{\frac{A}{b} - 1} - 1 \right) - B \cdot \frac{\operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} =$$

$$= \mu_i \cdot \frac{B \cdot L}{A - b} \cdot \frac{b}{L} \cdot \frac{1}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \left( \frac{A}{b} \cdot \left( 1 - \frac{b}{L} \cdot \frac{z - (L - y) \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \right)^{\frac{A}{b} - 1} - 1 \right) - B \cdot \frac{b \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi}$$

Преобразовав это выражение, получим:

$$(k \cdot \operatorname{tg} \chi - \mu_i) \cdot \frac{b}{A - b} \cdot \left( \frac{A}{b} \cdot \left( 1 - \frac{b}{L} \cdot \frac{z - (L - y) \cdot \operatorname{tg} \chi}{1 - b \cdot \operatorname{tg} \chi} \right)^{\frac{A}{b} - 1} - 1 \right) = (1 - b) \cdot \operatorname{tg} \chi$$

Если, как и раньше, считать, что  $k = \frac{\mu_i}{\operatorname{tg} \chi}$ , то для удовлетворения получившегося выражения необходимо положить, что  $\operatorname{tg} \chi = 0$ . Но если  $\operatorname{tg} \chi = 0$ , то и  $\mu_i = 0$ , а отсюда следует  $k = 1$ .

В этом случае область  $I$  вообще исчезает, параметр  $B$  примет значение  $B = \gamma g$ , параметр  $A$  примет значение  $A = \mu_e$ , а решение в области  $II$  примет вид, совпадающий с (19).

Решение (19), будем считать решением задачи для равновесного состояния, а решения, (21) и (23) решениями задачи для стационарного состояния.

На рис. 8 представлены графики зависимости вертикального давления от координаты  $z$  для трех случаев.

Давление у стенки щелевого бункера (сплошная линия), давление в центре щелевого бункера (линия из точек) и давление у стенки прямоугольной траншеи (штриховая линия). На рис. 8.а для угла наклона стенки щелевого бункера к вертикали  $\alpha = 30^\circ$  и на рис. 8.б для  $\alpha = 15^\circ$ .

Как видно из графиков, давление, с ростом  $z$ , растет, достигает экстремума, а затем спадает до нуля. Кроме того, давление в центре траншеи несколько превышает давление вдоль стенки.

Относительное положение максимума давления зависит от параметров бункера. Расхождение между графиками для траншеи и щелевого бункера, как отмечалось, имеют существенные значения в нижней части бункера.

Давление на стенку в щелевом бункере определяется выражением (18) и соотношением (9):

$$P_{\perp} = \frac{a \cdot B \cdot L}{A - b} \cdot \left( \left( 1 - \frac{b \cdot z}{L} \right) - \left( 1 - \frac{b \cdot z}{L} \right)^{\frac{A}{b}} \right) \quad (24)$$

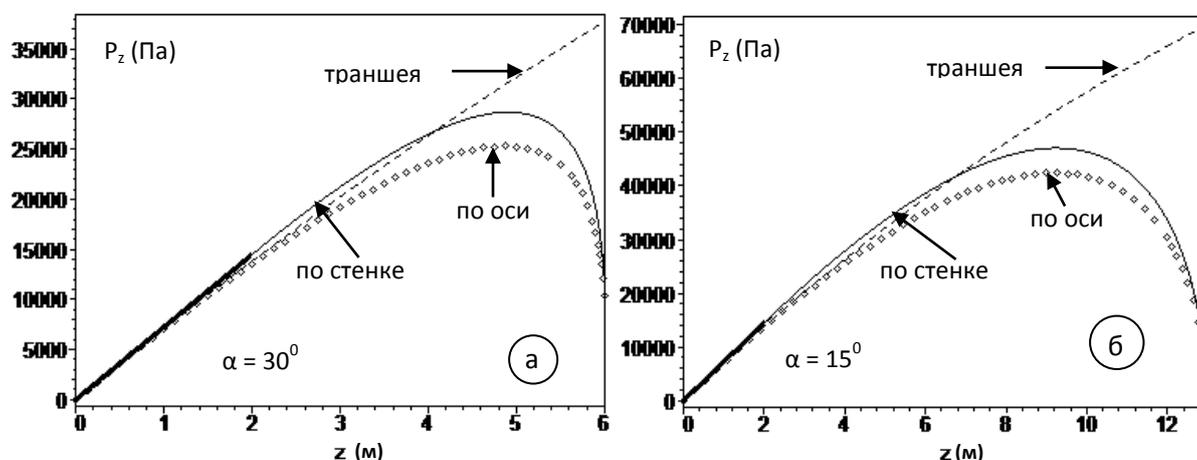


Рис. 8. Зависимости вертикального давления от координаты  $z$  для трех случаев: у стенки щелевого бункера (сплошная линия), в центре щелевого бункера (линия из точек) и у стенки прямоугольной траншеи (штриховая линия) ( $\gamma = 800 \text{ кг / м}^3$ ,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ ,  $L = 3,5 \text{ м}$ ,  $a - \alpha = 30^\circ$ ,  $b - \alpha = 15^\circ$ )

Fig. 8. Dependences of the vertical pressure on the coordinate  $z$  for three cases: at the wall of the slot hopper (solid line), at the center of the slot hopper (line of points) and at the wall of the rectangular trench (dashed line) ( $\gamma = 800 \text{ kg / m}^3$ ,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ ,  $L = 3.5 \text{ m}$ , and  $a - \alpha = 30^\circ$ ,  $b - \alpha = 15^\circ$ )

где для сокращения записи введено обозначение  $a = \left( 1 - \left( 1 - \frac{\mu_i}{\text{tg} \chi} \right) \cdot \cos \alpha \right)$ .

На рис. 9 представлен трехмерный график зависимости вертикального давления в щелевом бункере от переменных  $y$  и  $z$ , составленный из решений в областях  $I$  и  $II$ , с нанесенными изолиниями вертикального давления.

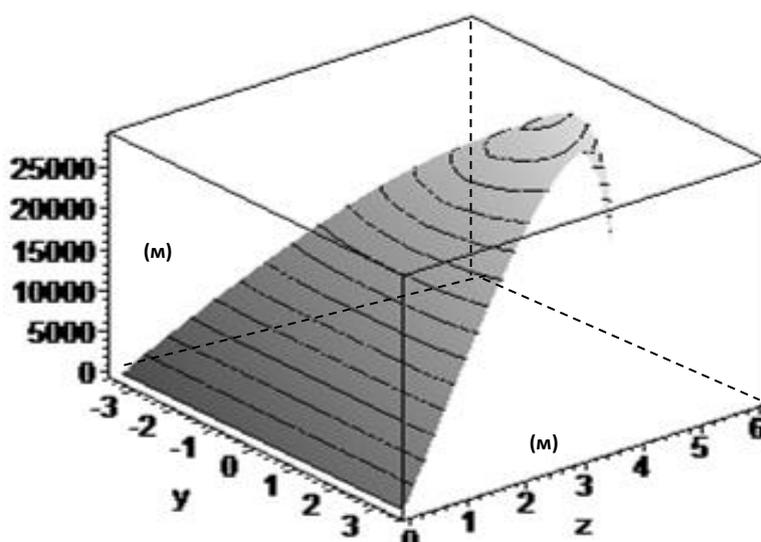


Рис. 9. Трехмерный график изолиний вертикального давления в щелевом бункере ( $L = 3,5 \text{ м}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ) от координат  $y$  и  $z$  ( $\gamma = 800 \text{ кг / м}^3$ ,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ )

Fig. 9. Three-dimensional plot of vertical pressure isolines in a slotted silo ( $L = 3.5 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ) from the coordinates  $y$  and  $z$  ( $\gamma = 800 \text{ kg / m}^3$ ,  $\psi = 16^\circ$ ,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\chi = 30^\circ$ )

Как видно, давление достигает максимума на глубине порядка  $2/3$  высоты щелевого бункера, что согласуется с экспериментальными данными.

**Вывод.** Давление в щелевом бункере достаточно сложно меняется по высоте. На поверхности бункера оно равно нулю, затем давление возрастает и достигает максимума примерно на расстоянии 2/3 от поверхности, а далее стремительно падает вплоть до нуля (если выпускная щель имеет достаточно малую ширину).

Следовательно, стенки бункера берут на себя всю нагрузку. Но для экономии материала эти стенки можно делать не постоянной, а переменной величиной, обеспечивая максимальную прочность на уровне 2/3 от высоты. Кроме того, на этой же высоте необходимо ставить различного рода вибраторы для обеспечения непрерывного истечения сыпучего материала из бункера.

#### **Библиографический список:**

1. Coulomb. Application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de statiqu relatifs a J'architecture. Mem des Savants Etrangers de J'dcad d / Coulomb // Sc. de Paris, 1773.
2. Малышев М.В. Об определении угла внутреннего трения и сцепления предельно напряженной сыпучей среды / М.В. Малышев // Изв. АН СССР. Сер. ОТН. – 1954.- № 7. – С. 18-21.
3. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел / Г.К. Клейн. - М.: Госстройиздат, 1956. – 252 с.
4. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.: Физматгиз, 1960. – 186 с.
5. Соловых С.Ф. О связи напряженного состояния сыпучего тела с формой движения его в силосе / С.Ф. Соловых // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1962. - № 5. - С. 22-25.
6. Ехансон. А.И. Поля напряжений и скоростей при гравитационном течении масс / А.И. Ехансон // Прикладная механика. – 1964. - № 3. – С. 149.
7. Гениев Г.А. Об одном варианте течения сыпучей среды / Г.А. Гениев // Строительная механика. – 1965. - № 6. – С. 23-26.
8. Дерсевич Г. И. Механика зернистой среды / Г.И. Дерсевич // Проблемы механики. – М., 1961. - Вып. III. – 368 с.
9. Jenkin C.F. Pressure Exerted by Granular Material an Application of the Principles of Dilatancy / C.F. Jenkin // Proceedings pf Royal Society of London. Ser. A. - 1931. - Vol. 131. - P. 53-89.
10. Гячев Л.В. О механической модели сыпучего тела / Л.В. Гячев // Механика сыпучих материалов: тез. докл. Всесоюз. конф. – Одесса, 1975. – С. 3-4.
11. Гячев Л.В. Движение сыпучих материалов в трубах и бункерах / Л.В. Гячев. - М.: Машиностроение, 1968. - 184 с.
12. Keller H. Das Schuttgutmodell von L.V.Gjachev zur Beschreibung der Gesetzmabigkeiten der Bunkerung kohasionsloser Schuttgutter und seine experimentelle Uberprufung / H. Keller . - Weimer, 1982. – 76 s.
13. Keller H. Korrekturformeln zur Theorie des Schuttgutausflusses aus Bunkern von L.V.Gjachev / H. Keller // Wissenschaftlice Zeitschrift der Hochschule fur Architectur und Bauwessen. – Weimar, 1987. – Raie B.h. 5/6. – S. 292-295.
14. Keller H. Beitrage zum Schuttgutausflub aus Behaltern: Dissertationen / H. Keller. – Weimar, 1989. - 238 s.
15. Федосеев В.Б., Шполянский А.Я. Связь между компонентами давления в сыпучем материале. // Научная мысль Кавказа. Междисциплинарные и специальные исследования. – 2007. - №1. – С. 70-76.
16. Федосеев В.Б., Кунаков В.С. Угол естественного откоса идеального сыпучего материала. // Изв. вузов. Сев. – Кавк. регион. Естеств. науки. – 2008. - №1. – С. 47-53.
17. Федосеев В.Б., Гордеева А.Б. Боковой коэффициент и давление в пристеночной насыпи сыпучего материала // Изв. вузов. Сев. – Кавк. регион. Естеств. науки. – 2010. - №2. – С. 58-60.
18. Федосеев В.Б., Серченко О.Н., Грошев Л.М. Давление сыпучего материала в круглом силосе // Вестник Донского государственного технического университета. – ФГОУ ВПО ДГТУ, 2011. – т. 11, №10(61) 185 С. – С. 1843-1849.
19. Федосеев В.Б., Гордеева А.Б., Зацаринная И.А. Теоретический расчёт давления в ёмкостях, заполненных дискретной средой // Вестник Донского государственного технического университета. – ФГОУ ВПО ДГТУ, 2011. – т. 11, № 2 (53). С. 163-168.
20. Федосеев В.Б., Зацаринная И.А. Стохастический характер образования динамических сводов при установившемся режиме истечения сыпучих материалов из бункеров // Вестник Мичуринского государственного аграрного университета. – Мичуринск: ФГОУ ВПО МичГАУ, 2011. – №1, Ч. 1. С. 196-199.

## References:

1. Coulomb C.-A. Essais sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. Mémoires de mathématique & de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savans. vol. 7. Paris: De l'Imprimerie Royale, 1776.
2. Malyshev M.V. Ob opredelenii ugla vnutrennego treniya i stsepleniya predel'no napryazhennoi sypuchei sredy. Izv. AN SSSR. Ser. OTN. 1954; 7:18-21. [Malyshev M.V. On the determination of the angle of internal friction and the adhesion of an extremely stressed loose medium. Izv. AN SSSR. Ser. OTN. 1954; 7: 18-21. (In Russ.)]
3. Klein G.K. Stroitel'naya mekhanika sypuchikh tel. M.: Gosstoriizdat; 1956. 252 s. [Klein G.K. Construction mechanics of loose bodies. M.: Gosstoriizdat; 1956. 252 p. (In Russ.)]
4. Sokolovskii V.V. Statika sypuchei sredy. M.: Fizmatgiz; 1960. 186 s. [Sokolovskii V.V. Statistics of the loose medium. M.: Fizmatgiz; 1960. 186 p. (In Russ.)]
5. Solovykh S.F. O svyazi napryazhennogo sostoyaniya sypuchego tela s formoi dvizheniya ego v silose. Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1962; 5:22-25. [Solovykh S.F. On the relationship between the stressed state of a loose body and the form of its movement in a silage. News of higher educational institutions. Construction. 1962; 5:22-25. (In Russ.)]
6. Ekhanson A.I. Polya napryazhenii i skorostei pri gravitatsionnom techenii mass. Prikladnaya mekhanika. 1964; 3:149. [Ekhanson A.I. Fields of stresses and velocities in the gravitational flow of masses. International Applied Mechanics. 1964; 3:149. (In Russ.)]
7. Geniev G.A. Ob odnom variante techeniya sypuchei sredy. Stroitel'naya mekhanika. 1965;6:23-26. [Geniev G.A. About a version of the loose medium flow. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 1965; 6:23-26. (In Russ.)]
8. Dersevich G. I. Mekhanika zernistoi sredy. Problemy mekhaniki. Vyp. III. M.: 1961. 368 s. [Dersevich G. I. Mechanics of a granular medium. Issues of Mechanics. Vol. III. M.: 1961. 368 p. (In Russ.)]
9. Jenkin C.F. Pressure Exerted by Granular Material an Application of the Principles of Dilatancy. Proceedings of Royal Society of London. Ser. A. 1931; 131:53-89.
10. Gyachev L.V. O mekhanicheskoi modeli sypuchego tela. Tezisy dokladov Vsesoyuznoy konferentsii "Mekhanika sypuchikh materialov". Odessa; 1975. S. 3-4. [Gyachev L.V. On the mechanical model of a loose body. Materials of All-Union conference "Mechanics of loose materials". Odessa; 1975. P. 3-4. (In Russ.)]
11. Gyachev L.V. Dvizhenie sypuchikh materialov v trubakh i bunkerakh. M.: Mashinostroenie; 1968. 184 s. [Gyachev L.V. Motion of loose materials in pipes and hoppers. M.: Mashinostroenie; 1968. 184 p. (In Russ.)]
12. Keller H. Das Schuttgutmodell von L.V.Gjachev zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten der Bunkerung kohasionsloser Schuttgutter und seine experimentelle Überprüfung. Weimar; 1982. 76 p.
13. Keller H. Korrekturformeln zur Theorie des Schuttgutausflusses aus Bunkern von L.V.Gjachev. Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen. Raie B.h. 5/6. Weimar; 1987. P. 292-295.
14. Keller H. Beiträge zum Schuttgutausflug aus Behaltern: Dissertationen. Weimar; 1989. 238 p.
15. Fedoseev V.B., Shpolyanskii A.Ya. Svyaz' mezhdru komponentami davleniya v sypuchem materiale. Nauchnaya mysl' Kavkaza. Mezhdistsiplinarnye i spetsial'nye issledovaniya. 2007;1:70-76. [Fedoseev V.B., Shpolyanskii A.Ya. The relationship between the pressure components in the bulk material. Scientific Thought of Caucasus. Interdisciplinary and Special Research. 2007;1:70-76. (In Russ.)]
16. Fedoseev V.B., Kunakov V.S. Ugol estestvennogo otkosa ideal'nogo sypuchego materiala. Izvestiya VUZov. Severo - Kavkazskiy Region. Estestvennye nauki. 2008;1:47-53. [Fedoseev V.B., Kunakov V.S. The angle of the natural slope of an ideal loose material. Universities' News. North-Caucasian Region. Natural Sciences Series. 2008;1:47-53. (In Russ.)]
17. Fedoseev V.B., Gordeeva A.B. Bokovoi koeffitsient i davlenie v pristenochnoi nasypi sypuchego materiala. Izvestiya VUZov. Severo - Kavkazskiy Region. Estestvennye nauki. 2010;2:58-60. [Fedoseev V.B., Gordeeva A.B. Lateral coefficient and pressure in the wall mound loose material. Universities' News. North-Caucasian Region. Natural Sciences Series. 2010; 2:58-60. (In Russ.)]
18. Fedoseev V.B., Serchenko O.N., Groshev L.M. Davlenie sypuchego materiala v kruglom silose. Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2011;10(61):1843-1849. [Fedoseev V.B., Serchenko O.N., Groshev L.M. Pressure of loose material in a round silo. Vestnik of Don State Technical University. 2011;10(61):1843-1849. (In Russ.)]

19. Fedoseev V.B., Gordeeva A.B., Zatsarinnaya I.A. Teoreticheskii raschet davleniya v emkostyakh, zapolnennykh diskretnoi sredoi. Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2011;2(53):163-168. [Fedoseev V.B., Gordeeva A.B., Zatsarinnaya I.A. Theoretical calculation of the pressure in tanks filled with a discrete medium. Vestnik of Don State Technical University. 2011;2(53):163-168. (In Russ.)]
20. Fedoseev V.B., Zatsarinnaya I.A. Stokhasticheskii kharakter obrazovaniya dinamicheskikh svodov pri ustanovivshemsya rezhime istecheniya sypuchikh materialov iz bunkerov. Vestnik Michurinskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2011;1:196-199. [Fedoseev V.B., Zatsarinnaya I.A. Stochastic character of the formation of dynamic arches under steady-state conditions for the flow of loose materials from hoppers. Vestnik Michurinsk State Agrarian University. 2011;1:196-199. (In Russ.)]

**Сведения об авторах:**

**Мурадова Сафура Шиховна** - кандидат педагогических наук, доцент.

**Федосеева Людмила Владимировна** - старший преподаватель.

**Information about the authors.**

**Safura S. Muradova** - Cand. Sci. (Pedagogical), Assoc.Prof.

**Lyudmila V. Fedoseeva** - Senior Lecturer.

**Конфликт интересов.**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Поступила в редакцию** 15.08.2017.

**Принята в печать** 08.09.2017.

**Conflict of interest.**

The authors declare no conflict of interest.

**Received** 15.08.2017.

**Accepted for publication** 08.09.2017.