***Для цитирования:*** *Дибиргаджиев А.М., Муртазалиев Г.М., Чикаев М.А. Разновидности энергетического метода исследования устойчивости конструкции. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017;44 (2):162-172. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-2-162-172*
***For citation:*** *Dibirgadzhiev A.M., Murtazaliev G.M., Chikaev M.A. Variations of the energy method for studying construction stability. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2017; 44(2):162-172. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-2-162-172*

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
## СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

# РАЗНОВИДНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИИ

**УДК 539.3:624.04**
**DOI:**10.21822/2073-6185-2017-44-2-162-172

***Дибиргаджиев А.М.[2], Муртазалиев Г.М.[1], Чикаев М.А.[3]***
*Дагестанский государственный технический университет,*
*367026 г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70,*
*[1]e-mail: murtazaliev.gelani@mail.ru,*
*[2]e-mail:d.a.m.-001@mail.ru,*
*[3]e-mail: chikaev.magomed@mail.ru*

***Резюме. Цель.*** *Целью работы является поиск наиболее рациональной формы выражения потенциальной энергии нелинейной системы с последующим использованием алгебраических средств и геометрических образов теории катастроф для изучения поведения конструкции под нагрузкой. Исследуются различные формы критериев устойчивости равновесных состояний конструкций. Рассматриваются некоторые аспекты использования различных форм выражений полной энергии системы, ориентированные на последующее использование методов теории катастроф для решения нелинейных задач расчета конструкций, связанных с разрывными явлениями.* ***Метод.*** *По форме записи выражения потенциальной энергии устанавливается связь математического описания решаемой задачи с конкретной катастрофой универсального характера из списка катастроф, после чего поведение рассматриваемой системы может быть предсказано на основе фундаментальных положений, сформулированных в теории катастроф, без интегрирования соответствующей системы нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка в частных производных, к которой сводится решение такого рода задач.* ***Результат.*** *Представлен в виде единых геометрических образов, содержащих всю необходимую качественную и количественную информации о деформировании под нагрузкой целых классов конструкции для широкого диапазона изменения значений внешних (управляющих) и внутренних (поведенческих) параметров.* ***Вывод.*** *Методы теории катастроф являются эффективным математическим инструментарием при решении нелинейных краевых задач с параметрами, связанных с разрывными явлениями, труднее поддающимся анализу традиционными методами. Но они пока не получили должного внимания со стороны исследователей, особенно в области расчетов на устойчивость, остающейся сложной, актуальной и привлекательной проблемой механики конструкций. Для решения конкретной нелинейной краевой задачи расчета конструкций алгебраическими средствами и геометрическими образами теории катастроф установлена связь математического описания решаемой задачи, характеризуемое функционалом разновидности энергетического метода с универсальными задачами, решаемыми на основе фундаментальных положений теории катастроф. Данная работа призвана к возрождению интереса к методам теории катастроф и их использованию для решения различных задач.*

***Ключевые слова:*** *устойчивость, равновесие, деформация, энергетический критерий, ветвление решений, теория катастроф*

## TECHNICAL SCIENCE
## BUILDING AND ARCHITECTURE

# VARIATIONS OF THE ENERGY METHOD FOR STUDYING CONSTRUCTION STABILITY

***Anvar M. Dibirgadzhiev [2], Gelani M.Murtazaliev [1], Magomed A.Chikaev [3]***
*Daghestan State Technical University,*
*70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367026, Russia,*
*[1]e-mail: murtazaliev.gelani@mail.ru,*
*[2]e-mail:d.a.m.-001@mail.ru,*
*[3]e-mail: chikaev.magomed@mail.ru*

***Abstract Objectives*** *The aim of the work is to find the most rational form of expression of the potential energy of a nonlinear system with the subsequent use of algebraic means and geometric images of catastrophe theory for studying the behaviour of a construction under load. Various forms of stability criteria for the equilibrium states of constructions are investigated. Some aspects of the using various forms of expression of the system's total energy are considered, oriented to the subsequent use of the catastrophe theory methods for solving the nonlinear problems of construction calculation associated with discontinuous phenomena.* ***Methods*** *According to the form of the potential energy expression, the mathematical description of the problem being solved is linked to a specific catastrophe of a universal character from the list of catastrophes. After this, the behaviour of the system can be predicted on the basis of the fundamental propositions formulated in catastrophe theory without integrating the corresponding system of nonlinear differential equations of high order in partial derivatives, to which the solution of such problems is reduced.* ***Results*** *The result is presented in the form of uniform geometric images containing all the necessary qualitative and quantitative information about the deformation of whole construction classes under load for a wide range of changes in the values of external (control) and internal (behavioural) parameters.* ***Conclusion*** *Methods based on catastrophe theory are an effective mathematical tool for solving non-linear boundary-value problems with parameters associated with discontinuous phenomena, which are poorly analysable by conventional methods. However, they have not yet received due attention from researchers, especially in the field of stability calculations, which remains a complex, relevant and attractive problem within structural mechanics. To solve a concrete nonlinear boundary value problem for calculating structures by algebraic means and using geometric images of catastrophe theory, it is necessary to establish the connection between the mathematical description of the problem being solved, characterised by the functional of the variety of the energy method and universal problems solved on the basis of the fundamental provisions of catastrophe theory. Present work is an effort to revive interest in the methods of catastrophe theory and their use for solving various problems.*

***Keywords:*** *stability, equilibrium, deformation, energy criterion, branching of solutions, catastrophe theory*

**Введение.** Основным принципом аналитической механики, справедливым как для консервативных, так и для неконсервативных систем, работающих в упругой или пластической области, является принцип возможных перемещений [1-4]. В случае консервативных систем данный принцип сводится к энергетическому принципу Лагранжа, строго доказанному Лежен-Дерихле: если в положении изолированного равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет минимум, это положение равновесия системы устойчиво.

Полная потенциальная энергия упругой системы Э (с точностью до постоянного слагаемого) складывается из потенциальной энергии деформации системы U и потенциала внешних сил П:

$$Э=U+П \tag{1}$$

http://vestnik.dgtu.ru/ ISSN (Print) 2073-6185 ISSN (On-line) 2542-095X

В качестве начала отсчета функции Э выбирается либо нулевая точка пространства обобщенных перемещений, либо деформированное исходное равновесное состояние системы, которое каждый раз должно быть специально оговорено. В виду своей фундаментальности, соответствующее (1) выражение может иметь большое разнообразие записей.

**Постановка задачи.** Энергетический подход является основой для решения задач равновесия, изучения устойчивости равновесия и послекритического поведения конструкций.

Этот подход является также основой к использованию методов, средств и образов теории катастроф, поскольку основываются на выражении потенциальной функции, совпадающей с выражением полной потенциальной энергии системы, по виду которой устанавливаются основные особенности поведения системы под нагрузкой.

Так же как решение многих прикладных задач становится ясным и понятным при его сведении к известному виду систем уравнений, так и по виду выражения потенциальной энергии можно предсказать поведение системы при изменении внешних и внутренних параметров системы на основе геометрических образов элементарных катастроф [1, 13-19, 25].

**Методы исследования**. Традиционный метод исследования устойчивости равновесных состояний, вытекающий из указанного принципа, основан на анализе изменения полной потенциальной энергии системы ΔЭ при ее переходе из исходного положения в смежное бесконечно близкое положение: если потенциальная энергия в смежном положении больше потенциальной энергии в исходном положении, то последнее устойчиво; если меньше – то неустойчиво; если приращение полной потенциальной энергии системы при указанном переходе равно нулю имеет место случай безразличного равновесия.

Как известно, энергетический критерий устойчивости может быть записан в различных формах. В основном он записывается по форме С.П.Тимошенко и по форме Дж. Брайана [5].

Разница между указанными формами заключается в том, что при записи энергетического критерия в форме С.П. Тимошенко ΔЭ выражается непосредственно через внешние нагрузки, а в форме Дж. Брайана **Δ**Э выражается через внутренние усилия основного состояния.

Схематично сказанное представлено на рис 1.

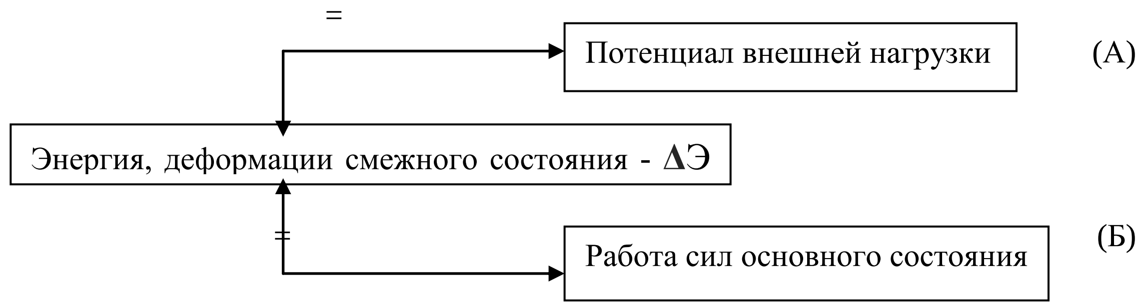


**Рис.1. Возможные схемы записи энергетического критерия**
**Fig.1. Possible schemes for recording the energy criterion**

Схема А соответствует записи энергетического критерия в форме С.П.Тимошенко, схема Б – в форме Дж. Брайана.

При решении нелинейных задач по определению напряженно – деформированного состояния основного процесса, когда учитываются изменения, происходящие в докритическом состоянии, с последующим исследованием устойчивости каждого достигнутого равновесного состояния, предпочтительна запись энергетического критерия в форме Дж.Брайана [6].

В обеих указанных формах подсчитывается изменение полной потенциальной энергии ΔЭ рассматриваемой системы при переходе ее из основного в смежное, в бесконечно близкое к нему, побочное (вторичное) равновесное состояние.

Рассмотрим основные моменты общего алгоритма решения задач для описания возмущенного состояния равновесия, смежного с начальным невозмущенным состоянием. Воспользуемся представлением перемещений в виде ряда разложенного по степеням малого параметра α, не зависящим от координат и сохраним слагаемые до $\alpha^2$:

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2;$$
$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 \upsilon_2;$$
$$w = w_0 + \alpha w_1 + \alpha^2 w_2; \qquad (2)$$

где, $u_0 = u_0(x,y,z)$; $\upsilon_0 = \upsilon_0(x,y,z)$; $w_0 = w_0(x,y,z)$; — перемещения точек тела в начальном невозмущенном состоянии равновесия; — $u_1 = u_1(x,y,z)$; $\upsilon_1 = \upsilon_1(x,y,z)$; $w_1 = w_1(x,y,z)$; $u_2 = u_2(x,y,z)$; $\upsilon_2 = \upsilon_2(x,y,z)$; $w_2 = w_2(x,y,z)$; — конечные функции координат.

Компоненты напряженно-деформированного состояния, представим также с точностью до слагаемых, имеющих множитель $\alpha^2$:

$$\varepsilon_X = \varepsilon_X^0 + \alpha\varepsilon_X' + \alpha^2\varepsilon_X'';$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \alpha\gamma_{xy}' + \alpha^2\gamma_{xy}''$$

Компоненты деформаций и напряжений в начальном состоянии $\varepsilon^o{}_{x,\ldots,}\gamma^o{}_{xy\ldots,}$ определяются в зависимости от характера решаемой исходной задачи - линейной или нелинейной. Компоненты с коэффициентом α определяют возникшую новую побочную равновесную ветвь, начало которой находится (в общем случае) в точке ветвления решений исходной системы уравнений. Компоненты с коэффициентом $\alpha^2$ характеризуют начальный этап посткритического (послебифуркационного) поведения конструкций.

**Обсуждение результатов.** Такой алгоритм решения задачи соответствует принятой в теории ветвления решений нелинейных уравнений схеме [20] и использован в работах [6-12, 21-23] для решения конкретных нелинейных краевых задач и заключается в решении трех взаимосвязанных и последовательных этапов:

- решение исходной нелинейной краевой задачи и определение возможных форм равновесия, последующее выделение реальных состояний от нереальных и определение способов перехода от одной возможной формы к другой – теория существования;
- определение внешних (управляющих) параметров, при которых происходит ветвление равновесных форм исходного состояния, отыскание числа новых решений и их кратности и установление вида этих форм – теория кратности;
- определение характера начального этапа послекритического поведения – спектральная теория.

В соответствии с этим, исследование поведения под нагрузкой различных конструкций, названное автором работы [6] общей нелинейной краевой задачей, условно разбито на три этапа, в каждом из которых решаются отдельные, но последовательные и взаимосвязанные задачи, позволяющие, в конечном итоге, выявить все характерные особенности их деформирования в широком диапазоне изменения внешних (управляющих) и внутренних (поведенческих) параметров. Каждый из указанных этапов, в зависимости от поставленных целей, может рассматриваться и как отдельная задача.

В конечном итоге, нужно установить зависимость вида [2]:

$$^{P}/_{P_{кр}} = 1 + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \ldots \qquad (4)$$

По знакам коэффициентов $C_1$ и $C_2$ может быть предсказан глобальный характер послекритического поведения конструкции, ее чувствительность к несовершенствам и соотношение между критической и предельной нагрузками для рассчитываемой конструкции.

Наиболее подходящим алгоритмом решения этих задач является использование разновидности энергетического метода с последующим использованием алгебраических средств и геометрических образов теории катастроф.

О наличии катастрофы в семействе потенциальных функций, которыми описывается поведение системы можно судить по основным признакам катастроф, или «флагам катастроф» к числу которых, относятся [1-4, 15-19]:

*Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. Том 44, №2, 2017*
*Herald of Daghestan State Technical University.Technical Sciences. Vol.44, No.2, 2017*
*http://vestnik.dgtu.ru/ ISSN (Print) 2073-6185 ISSN (On-line) 2542-095X*

- модальность – свойство системы, характеризующее тем, что при конкретных значениях управляющих параметров возможно несколько положений равновесия системы;
- недостижимость – в системе имеется одно из положений равновесия, которое не достигается и не наблюдается (существует область недостижимых неустойчивых состояний равновесия, к которым нельзя прийти, выходя из каких-либо устойчивых состояний);
- катастрофические скачки – внезапные переходы системы из одного положения равновесия в другое (малые изменения в значениях управляющих параметров могут вызвать большие изменения в значениях переменных состояния системы по мере того, как система перескакивает из одного локального минимума в другой);
- расходимость – небольшое вначале изменение пути в пространстве параметров, приводит к существенному конечному состоянию системы (малые изменения заданных начальных значений переменных состояния могут привести к серьезным изменениям конечных значений этих переменных);
- гистерезис – переход системы из одного состояния в другое и обратно происходит при разных значениях управляющих параметров.

Если в ходе анализа системы зафиксирован один из признаков катастрофы, то, изменяя ее управляющие параметры, можно обнаружить и остальные.

Классификация потенциальных функций – элементарных катастроф, их основные алгебраические свойства и характеристики поведения представлены в таблице 1 [25]. Так же могут быть представлены и соответствующие им геометрические образы.

В работах [6-10, 21-24] на основе такого алгоритма решены несколько разновидностей нелинейных краевых задач, касающихся расчета тонкостенных систем, в которых может произойти потеря устойчивости равновесных состояний.

**Таблица 1. Классификация потенциальных функций (катастроф), свойства и характеристики поведения**

**Table 1. Classification of potential functions (catastrophes), properties and characteristics behavior**

| Тип катастроф | Число параметров | Канонические уравнения | Поверхность равновесия | Множество сингулярности | Бифуркационное множество |
|---|---|---|---|---|---|
| **Складка** | $l = 1$ $k = 1$ | $V(x, u) = x^3 + ux$ | $M : 3x^2 + u = 0$ | $6x = 0,\ x = 0$ | $U = 0$ |
| **Сборка** | $l = 1$ $k = 1$ | $V(x, u, v) = x^4 - ux^2 + vx$ | $M : 4x^2 - 2ux = 0$ | $S : 12x^2 - 2u = 0$ | $B : 8u^3 - 27v^2 = 0$ |
| **Ласточкин хвост** | $l = 1$ $k = 3$ | $V = x^5 + ux^3 + vx + \omega x$ | $M : 5x^4 + 3u x^2 - 2vx + \omega = 0$ | $S : 20x^3 + 6ux + 2v = 0$ | $B : \exists\, x : 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + \omega = 0$<br>$20x^3 + 6ux + 2v = 0$ |
| **Бабочка** | $l = 1$ $k = 4$ | $V = \pm x^6 + ux^4 + ux^3 + ux^2 + ux$ | $M : = 6x^5 + 3u x^2 - 2v x^3 + \omega$ | $S : 30x^4 + 12tx^2 + 6ux + 2v = 0$ | $B: \exists\, x : 6x^5 + 4tx^3 + 3u\alpha^2 + 2vx + \omega = 0$<br>$30x^4 + 12tx^2 + 6ux + 2v = 0$ |
| **Вигвам** | $l = 1$ $k = 5$ | $V = x^7 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x$ | $M : = 7x^6 + 5a_1 x^4 + 4a_2 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_4 x + a_5$ | $S : 42x^5 + 20a_1x^3 + 12a_2x^2 + 6a_3x + 2a_4 = 0$ | $B : \exists\, x : 7x^6 + 5\alpha_1x^4 + 4\alpha_2x^3 + 3\alpha_3x^2 + 2\alpha_4x + \alpha_5 = 0$<br>$42x^5 + 20\alpha_1x^3 + 12\alpha_2x^2 + 6\alpha_3x + 2\alpha_1 = 0$ |
| **Гиперболическая омбионика** | $l = 2$ $k = 3$ | $V(x, y, u, \omega) = x^3 + y^3 + \omega xy - ux - vy$ | $M: \begin{cases} 3x^2 + \omega y - u = 0 \\ 3y^2 + \omega x - v = 0 \end{cases}$ | $S : \det\begin{vmatrix} 6x & \omega \\ \omega & 6y \end{vmatrix} = 36xy - \omega^2 = 0$ | $B : \exists\, (x, y) : u = + 3x^2 + \omega y$<br>$v = 3x^2 + \omega x + \omega^2 + 36xy$ |
| **Эллиптическая омбионика** | $l = 2$ $k = 3$ | $V = \frac{x^3}{3} + xy^3 + \omega(x^2 + y^2) - ux - vy$ | $M: \begin{cases} x^2 + y^2 - \omega x - u = 0 \\ -2xy^2 + 2\omega y - v = 0 \end{cases}$ | S:det $\begin{vmatrix} 2x + 2\omega & -2y \\ -2y & -2x + 2 \end{vmatrix}$<br>$= 0 \Leftrightarrow x^2 + x^2 = \omega^2$ | $B : \exists\, (x, y) : u - x^2 - y^2 + 2\omega x$<br>$v = 2xy + 2\omega y$<br>$\omega^2 = x^2 + y^2$ |
| **Параболическая омбионика** | $l = 2$ $k = 4$ | $V = x^2 y^2 + y^4 + \omega x^2 + ty^2 - ux - vy$ | $M: \begin{cases} 2xy + 2\omega x - u = 0 \\ x^2 + 4y^3 + 2ty - v = 0 \end{cases}$ | S:det $\begin{vmatrix} 2x + 2\omega & -2y \\ 2x & -12y + \end{vmatrix}$<br>$= 0 \Leftrightarrow x^2$<br>$x^2 = (y + \omega)(y^2 + t^2)$ | $B : \exists\, (x, y) : 2xy + 2\omega x - u = 0$<br>$x^2 + 4y^3 + 2ty - v = 0$<br>$x^2 = (y + \omega)(y^2 + t^2)$ |

$u$, $v$ – параметры; $\omega$ – устойчивость; $t$ – время.

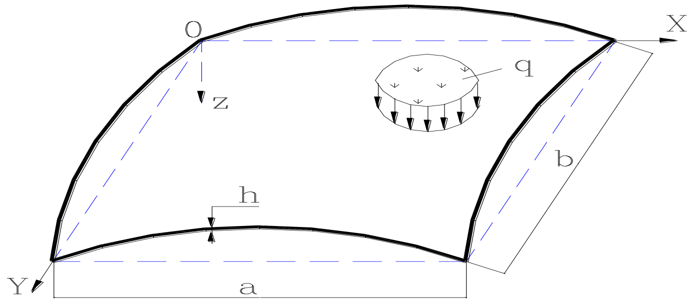


**Рис. 2. Геометрия и схема загружения оболочки**
**Fig. 2. Geometry and scheme of loading the shell**

В качестве примера рассмотрим геометрическую нелинейную задачу расчета свободно опертой по контуру пологой сферической оболочки при действии осесимметричной равномерной нагрузки интенсивности q (рис.2). Для решения задачи воспользуемся энергетическим методом. Полная потенциальная энергия *Э* системы равна сумме потенциальных энергий изгиба *Ub*, растяжения-сжатия срединной поверхности оболочки *Um* и потенциала внешних сил *Пq*:

$$Э = U_b + U_m + П_q, \tag{5}$$

Слагаемые *Ub, Um, Пq* определяются по формулам:

$$U_b = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\left(\nabla^2 W\right)^2 - 2(1-\mu)\cdot L(W,W)\right] dxdy; \tag{6}$$

$$U_m = \frac{1}{2Eh}\int_0^a\int_0^b \left[\left(\nabla^2 F\right)^2 - 2(1+\mu)\cdot L(F,W)\right] dxdy; \tag{7}$$

$$П = -\int_0^a\int_0^b q\cdot W\cdot dxdy; \tag{8}$$

где, W, F – функции прогибов и усилий;

E, μ –модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;

$D=Eh^2/(12(1-\mu^2))$ – цилиндрическая жесткость;

$$\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2}; \tag{9}$$

$$\nabla_k^2(\ ) = k_1\cdot\frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + k_2\cdot\frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2}; \tag{10}$$

$$L(W,F) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}; \tag{11}$$

$$L(W,W) = 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Примем (в первом приближении) аппроксимирующую функцию прогибов *W* в виде, удовлетворяющей граничным условиям шарнирного –опирания оболочки с одним произвольным параметром *A*, представляющим прогиб в центре оболочки, подлежащий определению:

$$W(x,y) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right); \tag{13}$$

Подставив (13) в (6-8), вычислив эти интегралы, использовав известную процедуру П.Ф. Папковича и просуммировав по (5) получим следующее выражение полной потенциальной энергии Э для случая квадратной в плане оболочки (при a=b):

$$Э = \frac{2\pi^2 Eh}{9a} A^4 - \frac{\pi^2 Eh}{6Ra^2} A^3 + \frac{D\pi^6}{8a^4} A^2 + \frac{\pi^2 Eh}{32R^2} A \ - qA; \tag{14}$$

Из условия стационарности (14) получим кубическое уравнение, связывающее внешние (управляющие) параметры с внутренним (поведенческим) параметром *A*:

$$\frac{8\pi^2 Eh}{9a^4} A^3 - \frac{\pi^2 Eh}{2Ra^2} A^2 + \left(\frac{D\pi^6}{4a^4} + \frac{\pi^2 Eh}{16R^2}\right) A \ = q. \tag{15}$$

Обычно для установления связи *A* от *q* строятся кривые зависимости (15) представляющие кривые равновесных состояний для различных значений кривизны *k* оболочки, определяя каждую точку каждой кривой по уравнению (15), что является довольно трудоемкой численной процедурой, к тому же связанная с возможной расходимостью процесса при приближении значения нагрузки к предельной.

Выражение полной энергии (13) в терминах теории катастроф соответствует каноническому уравнению элементарной катастрофы сборки (табл.1).

Используя безразмерные параметры $u=A/h$ *и* $P=qa^4/Eh^4$ и подстановку $u=\upsilon+1{,}125k/3$ приведем (15) к каноническому виду:

$$\upsilon^3 - (0{,}140625k^2 - 2{,}50882)\,\upsilon + 0{,}94081k - 0{,}11399P = 0, \tag{16}$$

В терминах теории катастроф выражение (16) соответствует двумерному многообразию канонической катастрофы сборки – сборки Уитни [1, 6, 15-19, 25], представляемое единой геометрической картиной (рис.3), содержащей все качественные и количественные характеристики поведения оболочки.

Внутри области 3, имеющей форму сборки, функция энергии *Э* имеет три изолированные критические точки, в области I – всего одну, вдоль кривых складок 2 и 2' – две вырожденные критические точки, причем вдоль кривой 2 совпадают два значения соответствующие верхним, а вдоль кривой 2' – два значения нижних критических нагрузок (рис. 3 и 4).

Для вычисления координат точки О – начала сборки (рис.3) продифференцируем уравнение (16) два раза подряд:

$$3\upsilon^2 - 0{,}140625k^2 + 2{,}50882 = 0; \tag{17}$$

$$6\upsilon = 0 \tag{18}$$

Решив полученную систему уравнений (16) - (18) в обратном порядке, получим следующие значения координат точки О:

$$u_0 = 1{,}58392; \quad k_0 = 4{,}22380; \quad P_0 = 34{,}8609. \tag{19}$$

Эти значения хорошо согласуются с известными в литературе данными [3].

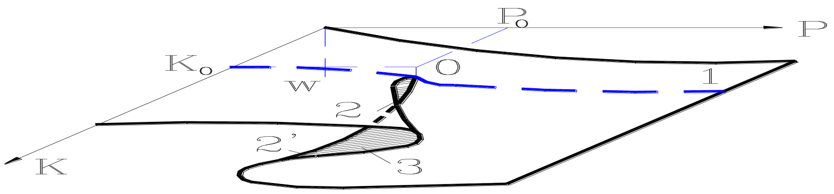


**Рис. 3. Многообразие катастрофы сборки – поверхность равновесных состояний оболочек**
**Fig. 3. The variety of the catastrophe of assembly - the surface of the equilibrium states of the shells**

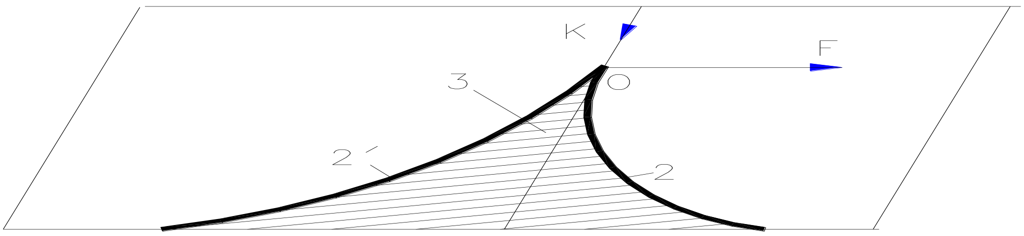


**Рис.4. Отображение катастрофы сборки на плоскость управляющих параметров *K* и *F***
**Fig.4. Displays the catastrophe of the assembly on the plane of the control parameters K and F**

Как видно, использование алгебраических средств и геометрических образов теории катастроф позволяет получить, представить и интерпретировать в единообразной, наглядной и компактной форме наиболее ценные и важные результаты решения конкретных задач, охватывающие полную картину процесса сложного нелинейного поведения целых классов различных видов конструкций, которые обычно рассматриваются разрозненно, с разных точек зрения и требуют получения и обработки большого объема численных данных.

**Вывод.** Наличие широкого комплекса пакетов прикладных программ для численного решения линейных и нелинейных задач расчета конструкций не исключает необходимости поиска эффективных, хотя и приближенных, аналитических методов решения нелинейных краевых задач с параметрами, связанными с разрывными явлениями, которые трудно анализировать традиционными математическими методами. Одной из эффективных теорий для решения таких задач является теория катастроф.

Для решения конкретной нелинейной краевой задачи расчета конструкций алгебраическими средствами и геометрическими образами теории катастроф следует установить связь математического описания решаемой задачи, характеризуемую функционалом разновидности энергетического метода с универсальными задачами, решаемыми на основе фундаментальных положений теории катастроф.

В этой формулировке содержится алгоритм решения нелинейных краевых задач методами теории катастроф.

Не заменяя численные методы, обладающие большими возможностями для решения инженерных задач, аналитические методы теории катастроф эффективны в изучении разрывных явлений.

В ближайшем будущем, эффективным математическим инструментарием для решения нелинейных краевых задач не только механики конструкции, связанных с необходимостью анализа разрывных явлений, станут средства и образы теории катастроф, не получившие пока должного внимания, но обретающие широкую популярность.

**Библиографический список:**

1. Постон Т. Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980. 607с.
2. Koiter W. T. The non-linear buckling problem of a complete spherical shell under uniform external pressure.- Proc. K. ned. Akad. Wet., Ser., B, 1969 72, p. 40.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Наука, 1967. - 984с.
4. Thomson J. M. T., Hunt G. W. Elastic Instability Phenomena.- London: Wiley, 1984.
5. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Машиностроение, 1991. - 336 с.
6. Муртазалиев Г.М. Методы теории катастроф в задачах устойчивости оболочек. ДГТУ. Махачкала 2004. -200с.
7. Mukharlyamov R. G., Amabili M., Garziera R., Riabova K. Устойчивость нелинейных колебаний пологих оболочек двойной кривизны // Вестн. РУДН. сер. Мат. Информат. Физ.— 2016 № 2.— С. 53-63.
8. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей Н. А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры. Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. — Москва: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2013. — 329 с.
9. Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Шошин Д. В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях / Прикладная механика и техническая физика— 2014 т. 55 № 1.— С. 13-22.
10. Ганеева М. С., Моисеева В. Е. Нелинейный изгиб и устойчивость сферических и эллипсоидальных оболочек при неосесимметричном нагружении / Пробл. прочн. и пластич.— 2013 № 75 ч. 2.— С. 105-114.
11. Малых К. С., Новичков А. А., Придатько И. С. Устойчивость сферических оболочек с учетом начальных неправильностей формы / Молодежь. Техника. Космос: Труды 6 Общероссийской молодежной научно-технической конференции, Санкт-Петербург, 19-21 марта, 2014.— 2014.— С. 62-64.
12. Петров В. В., Кривошеин И. В. Влияние неоднородности материала на устойчивость нелинейно деформируемых пологих оболочек двоякой кривизны / Вестн. СГТУ.— 2014 № 4.— С. 20-25.
13. Пикуль В. В. Устойчивость оболочек / Пробл. машиностр. и автоматиз.— 2012 № 2.— С. 81-87.
14. Семко В. В., Кривошеин И. В. / Моделирование влияния вида граничных условий на устойчивость нелинейно деформируемых пологих оболочек / Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-26): Сборник трудов 26 Международной научной конференции, Нижний Новгород, 27-30 мая, —2013.— С. 53-55.
15. Арнольд В.И. Теория катастроф//Издание четвертое, дополненное - Москва: Ленанд, 2016 - с.134.
16. Острейковский В. А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф: Учебное пособие для студентов вузов. — Москва: Издательство "Высшая школа", 2005. — 327с.
17. Postle D. Calastrophe Theory.- London: Fontana, 1980.
18. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2 кн. – М.: Наука, 1990. Кн.1.- 350с.
19. Томпсон Д.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. 256с.
20. Келлер Дж. Б., Антман С. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974. 254с.
21. Муртазалиев Г.М. К расчету гибких оболочек методами теории катастроф // Прочность и надежность сооружений: Сб. научных тр. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко.-М: Стройиздат, 1989.-С34-41.
22. Муртазалиев Г.М. К использованию методов теории катастроф для анализа поведения цилиндрических панелей переменной толщины // Деп. в ВИНИТИ 24.09.92, N 2839 – В92.
23. Муртазалиев Г.М., Пайзулаев М.М., Гусейнова С.В. Геометрические образы теории катастроф в нелинейных задачах //Теория сооружений: достижения и проблемы: сборник статей по материалам всероссийской научно-практической конференции, 19-20 ноября 2012г. Махачкала/ ДГТУ. – Махачкала: Изд-во ДГТУ, 2012.-126с.
24. Муртазалиев Г.М., Пайзулаев М.М. Методы теории катастроф в механике конструкций //Теория сооружений: достижения и проблемы: сборник статей по материалам II Всероссийской научно-практической конференции, 27-28 ноября 2015г. Махачкала/ ДГТУ. – Махачкала: Типография RIZO-PRESS, 2015.-132с.

25. Бородин А.И., Новикова Н.Н., Шаш Н.Н. Применение синергетических методов и теории катастроф // Журнал "Эффективное антикризисное управление". - №2(89)/2015.-с. 84-90.

**References:**

1. Poston T., Styuart I. Teoriya katastrof i ee prilozheniya. M.: Mir; 1980. 607 s. [Poston T., Styuart I. Catastrophe theory and its applications. Moscow: Mir; 1980. 607 p. (in Russ.)]
2. Koiter W.T. The non-linear buckling problem of a complete spherical shell under uniform external pressure. Proc. K. ned. Akad. Wet., Ser. B. 1969;72:40.
3. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh sistem. M.: Nauka; 1967. 984 s. [Vol'mir A.S. Stability of deforming systems. Moscow: Nauka; 1967. 984 s. (in Russ.)]
4. Thomson J. M. T., Hunt G. W. Elastic Instability Phenomena. London: Wiley; 1984.
5. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem. M.: Mashinostroenie; 1991. 336 s. [Alfutov N.A. Calculation fundamentals for stability of elastic systems Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem. Moscow: Mashinostroenie; 1991. 336 p. (in Russ.)]
6. Murtazaliev G.M. Metody teorii katastrof v zadachakh ustoychivosti obolochek. DGTU. Makhachkala; 2004. 200 s. [Murtazaliev G.M. Methods of catastrophe theory in shell stability problems. DGTU. Makhachkala; 2004. 200 p. (in Russ.)]
7. Mukharlyamov R. G., Amabili M., Garziera R., Riabova K. Ustoychivost' nelineynykh kolebaniy pologikh obolochek dvoynoy krivizny. Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika. 2016;2:53-63. [Mukharlyamov R. G., Amabili M., Garziera R., Riabova K. Stability of non-linear vibrations of doubly curved shallow shells. RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. 2016;2:53-63. (in Russ.)]
8. Bazhenov V. A., Krivenko O. P., Solovey N. A. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost' uprugikh obolochek neodnorodnoy struktury. Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennye i novye zadachi. Moskva: Knizhnyy dom "LIBROKOM"; 2013. 329 s. [Bazhenov V. A., Krivenko O. P., Solovey N. A. Non-linear deformation and stability of elastic shells with heterogeneous structure. Models, methods, algorithms, poorly-studied and new problems. Moscow: Knizhnyy dom "LIBROKOM"; 2013. 329 p. (in Russ.)]
9. Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Shoshin D. V. Ustoychivost' i predel'nye sostoyaniya uprugoplasticheskikh sfericheskikh obolochek pri staticheskikh i dinamicheskikh nagruzheniyakh. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2014;55(1):13-22. [Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Shoshin D. V. Stability and ultimate states of elastic-plastic spherical shells at static and dynamic loadings. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014;55(1):13-22. (in Russ.)]
10. Ganeeva M. S., Moiseeva V. E. Nelineynyy izgib i ustoychivost' sfericheskikh i ellipsoidal'nykh obolochek pri neosesimmetrichnom nagruzhenii. Probl. prochn. i plastich. 2013;75(2):105-114. [Ganeeva M. S., Moiseeva V. E. Non-linear bend and stability of spherical and ellipsoidal shells at non-axissymmetrical loading. Problems of Strength and Plasticity. 2013;75(2):105-114. (in Russ.)]
11. Malykh K. S., Novichkov A. A., Pridat'ko I. S. Ustoychivost' sfericheskikh obolochek s uchetom nachal'nykh nepravil'nostey formy. Trudy 6 Obshcherossiyskoy molodezhnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Molodezh'. Tekhnika. Kosmos". Sankt-Peterburg. 2014. S. 62-64. [Malykh K. S., Novichkov A. A., Pridat'ko I. S. stability of spherical shells accouting for initial form irregularities. Procсedings of the 6th All-Russian scientific-technical conference "Youth. Technics. Cosmos". Sankt-Peterburg. 2014. P. 62-64. (in Russ.)]
12. Petrov V. V., Krivoshein I. V. Vliyanie neodnorodnosti materiala na ustoychivost' nelineyno deformiruemykh pologikh obolochek dvoyakoy krivizny. Vestnik SGTU. 2014;4:20-25. [Petrov V. V., Krivoshein I. V. Material heterogeneity influence on stability of non-linear deformed shallow shells of double curvature. Vestnik Saratov State Technical University. 2014;4:20-25. (in Russ.)]
13. Pikul' V. V. Ustoychivost' obolochek. Probl. mashinostr. i avtomatiz. 2012;2:81-87. [Pikul' V. V. Shell stability. Engineering and Automation Problems. 2012;2:81-87. (in Russ.)]
14. Semko V. V., Krivoshein I. V. Modelirovanie vliyaniya vida granichnykh usloviy na ustoychivost' nelineyno deformiruemykh pologikh obolochek. Sbornik trudov 26 Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh (MMTT-26)". Nizhniy Novgorod; 2013. S. 53-55. [Semko V. V., Krivoshein I. V. Modelirovanie vliyaniya vida granichnykh usloviy na ustoychivost' nelineyno deformiruemykh pologikh obolochek. Proceedings of the 26 International scientific conference "Mathematical modeling in technics and technologies (MMTT-26)". Nizhniy Novgorod; 2013. P. 53-55. (in Russ.)]

15. Arnol'd V.I. Teoriya katastrof. Moskva: Lenand; 2016. 134 s. [Arnol'd V.I. Catastrophe theory. Moscow: Lenand; 2016. 134 p. (in Russ.)]
16. Ostreykovskiy V. A. Analiz ustoychivosti i upravlyaemosti dinamicheskikh sistem metodami teorii katastrof: Uchebnoe posobie dlya studentov vuzov. Moskva: Izdatel'stvo "Vysshaya shkola"; 2005. 327 s. [Ostreykovskiy V. A. Analysis of stability and controllability of dynamic systems by catastrophe theory methods: a tutorial for students of higher education institutions. Moscow: Izdatel'stvo "Vysshaya shkola"; 2005. 327 p. (in Russ.)]
17. Postle D. Calastrophe Theory. London: Fontana; 1980.
18. Gilmor R. Prikladnaya teoriya katastrof. M.: Nauka; 1990. 350 s. [Gilmor R. Applied calastrophe theory. Moscow: Nauka; 1990. 350 p. (in Russ.)]
19. Tompson D.M.T. Neustoychivosti i katastrofy v nauke i tekhnike. M.: Mir; 1985. 256 s. [Tompson D.M.T. Non-stabilities and calastrophes in science and technics. Moscow: Mir; 1985. 256 p. (in Russ.)]
20. Keller Dzh. B., Antman S. Teoriya vetvleniya i nelineynye zadachi na sobstvennye znacheniya. M.: Mir; 1974. 254 s. [Keller Dzh. B., Antman S. Branching theory and non-linear eigenproblem. Moscow: Mir; 1974. 254 p. (in Russ.)]
21. Murtazaliev G.M. K raschetu gibkikh obolochek metodami teorii katastrof. Prochnost' i nadezhnost' sooruzheniy: Sb. nauchnykh tr. TsNIISK im. V.A. Kucherenko. M: Stroyizdat; 1989. S. 34-41. [Murtazaliev G.M. On the calculation of flexible shells by calastrophe theory methods. Durability and reliability of constructions: scientific work collection of TSNIISK named after V.A. Koucherenko. Moscow: Stroyizdat; 1989. P. 34-41. (in Russ.)]
22. Murtazaliev G.M. K ispol'zovaniyu metodov teorii katastrof dlya analiza povedeniya tsilindricheskikh paneley peremennoy tolshchiny. Dep. v VINITI 24.09.92, N 2839 – V92. [Murtazaliev G.M. On the application of calastrophe theory methods in behavior analysis of cilindric planes of variable thikness. Dep. in VINITI 24.09.92, N 2839 – V92. (in Russ.)]
23. Murtazaliev G.M., Payzulaev M.M., Guseynova S.V. Geometricheskie obrazy teorii katastrof v nelineynykh zadachakh. Sbornik statey po materialam vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Teoriya sooruzheniy: dostizheniya i problemy”. Makhachkala; 2012. 126 s. [Murtazaliev G.M., Payzulaev M.M., Guseynova S.V. Geometric images of calastrophe theory in non-linear problems. Matrials of All-Russian scientific-practical conference “Theory of construction: acheivments and problems”. Makhachkala; 2012. 126 p. (in Russ.)]
24. Murtazaliev G.M., Payzulaev M.M. Metody teorii katastrof v mekhanike konstruktsiy. Sbornik statey po materialam II Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Teoriya sooruzheniy: dostizheniya i problemy”. Makhachkala; 2015. 132 s. [Murtazaliev G.M., Payzulaev M.M. Calastrophe theory methods in the mechanics of constructions. Matrials of All-Russian scientific-practical conference “Theory of construction: acheivments and problems”. Makhachkala; 2015. 132 p. (in Russ.)]
25. Borodin A.I., Novikova N.N., Shash N.N. Primenenie sinergeticheskikh metodov i teorii katastrof. Effektivnoe antikrizisnoe upravlenie. 2015;2(89):84-90. [Borodin A.I., Novikova N.N., Shash N.N. Application of synergetic methods and calastrophe theory. Effective Crisis Management Journal. 2015;2(89):84-90. (in Russ.)]

**Сведения об авторах:**

**Муртазалиев Гелани Муртазалиевич –** доктор технических наук, профессор, кафедра сопротивления материалов, теоретической и строительной механики;

**Дибиргаджиев Анвар Магомедович** – ассистент.

**Чикаев Магомед Ахмедович** – аспирант.

**Information about the authors:**

**Gelani M.Murtazaliev -** Dr.Sci. (Technical), Prof., Department of Materials Strength, Theoretical and Construction Mechanics;

**Anvar M. Dibirgadzhiev -**Assistant Lecturer.

**Magomed A.Chikaev -** Postgraduate Student.

**Конфликт интересов.** **Conflict of interest**.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.The authors declare no conflict of interest.

**Поступила в редакцию** 13.05.2017. **Received** 13.05.2017.

**Принята в печать** 23.06.2017. **Accepted for publication** 23.06.2017.