

**Для цитирования:** Пайзулаев М.М., Рашидова Е.В., Соболев Б.В. Концентрация напряжений в вершинах радиальной трещины в стенке трубы с тонким покрытием. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017; 44 (2):37-45. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-2-37-45

**For citation:** Sobol' B.V., Payzulaev M.M., Rashidova E.V. Strain concentration in apices of radial cracks in a thin coated pipe wall. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2017; 44 (2):37-45. (In Russ.) DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-2-37-45

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ МЕХАНИКА

УДК 531, 539.4, 539.2

DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-2-37-45

### КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНАХ РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ В СТЕНКЕ ТРУБЫ С ТОНКИМ ПОКРЫТИЕМ

**Пайзулаев М.М.<sup>3</sup>, Рашидова Е.В.<sup>2</sup>, Соболев Б.В.<sup>1</sup>**

<sup>1,2</sup>Донской государственный технический университет,  
344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, Россия

<sup>3</sup>Дагестанский государственный технический университет,  
367026, г. Махачкала, пр. И.Шамиля, 70, Россия

<sup>1</sup>e-mail: b.sobol@mail.ru, <sup>2</sup>e-mail: el.rash@mail.ru, <sup>3</sup>e-mail: smdstu@mail.ru

**Резюме.** Цель. Известный метод разрывных решений, применяемый при исследовании бесконечных и полубесконечных областей, обобщен при построении решений в рядах Фурье. Это позволяет свести задачу механики деформируемого твердого тела для ограниченной области, содержащей разрез или включения, к решению интегрального уравнения (или системы) относительно разрывов определяемых функций. **Метод.** Метод реализован в применении к решению задачи теории упругости для сечения трубы (плоская деформация), ослабленного внутренней радиальной трещиной. Труба нагружена гидростатическим давлением; на ее внутреннюю поверхность нанесено тонкое покрытие, улучшающее ее физико-механические свойства. Применяемый метод, в сочетании со стандартным интегральным преобразованием, может быть эффективно использован при построении разрывных решений трехмерных задач теории упругости. **Результат.** В качестве модели покрытия использованы специальным образом сформулированные граничные условия. С целью проверки адекватности принятой модели, проведен цикл численных экспериментов. В одних случаях, проведены расчеты сечения трубы с покрытием в конечно-элементных пакетах ANSYS и COMSOL. В других, с использованием широких возможностей пакета FlexPDE, была построена модель трубы без покрытия, но с применением специальных граничных условий. Сравнение полученных результатов позволило удостовериться в адекватности построенных моделей в определенном диапазоне геометрических и физических параметров. **Вывод.** Задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши относительно производной скачка тангенциальной компоненты вектора перемещений на берегах трещины. Его решение строится методом коллокаций с заранее выделенной особенностью. Конечной целью исследования является определение значений коэффициента интенсивности напряжений в вершинах трещины.

**Ключевые слова:** ряд Фурье, трещина, труба, теория упругости, плоская деформация, напряжения, метод малого параметра, метод коллокаций

PHYSICAL-MATEMATICAL SCIENCE  
MECHANICS

STRAIN CONCENTRATION IN APICES OF RADIAL CRACKS IN A THIN  
COATED PIPE WALL

Magomed M. Payzulaev<sup>3</sup>, Elena V. Rashidova<sup>2</sup>, Boris V. Sobol'<sup>1</sup>

<sup>1,2</sup>Don State Technical University,

1 Gagarina square, Rostov-on-Don 344000, Russia,

<sup>3</sup>Dagestan State Technical University,

70 I. Shamil Ave, Makhachkala 367026, Russia,

<sup>1</sup>e-mail: b.sobol@mail.ru, <sup>2</sup>e-mail: el.rash@mail.ru, <sup>3</sup>e-mail: smdstu@mail.ru

**Abstract Objectives** The well-known discontinuous solution method, used in the study of infinite and semi-infinite domains, is generalised during the construction of solutions in Fourier series. This makes it possible to reduce the problem of the mechanics of a deformable solid for a limited region containing cuts or inclusions to the solution of an integral equation (or system) with respect to discontinuities of the functions being defined. **Methods** The method was implemented through the application to the solution of the theoretical elasticity problem for a pipe section (plane deformation) weakened by an internal radial crack. The pipe was loaded with hydrostatic pressure and a thin coating is applied on its inner surface, improving its physical and mechanical properties. The applied method, combined with the conventional integral transformation, can be effectively used in the construction of discontinuous solutions of three-dimensional problems of the theory of elasticity. **Results** Specially formulated boundary conditions were used as a coating model. In order to verify the adequacy of the adopted model, a series of numerical experiments was carried out. In some cases, calculations were carried out for the cross-section of a coated pipe in finite-element ANSYS and COMSOL software packages. In others, benefiting from the extensive capabilities of the FlexPDE software package, an uncoated pipe model was constructed, although using special boundary conditions. Comparison of the results obtained made it possible to ascertain the adequacy of the models constructed across a certain range of geometric and physical parameters. **Conclusion** The problem is reduced to the solution of a singular integral equation with a Cauchy kernel with respect to the derivative of the jump in the tangential component of the displacement vector on the crack edges. Its solution is determined by the collocation method with a pre-selected feature. The ultimate goal of the study is to determine the values of the strain intensity coefficient at the apices of the crack.

**Keywords:** Fourier series, crack, pipe, theory of elasticity, plane deformation, strains, small parameter and collocation methods

**Введение.** Анализ мирового опыта расчета элементов с дефектами подтверждает обоснованность поиска эффективных методов расчета материалов с трещинами [1-16].

**Постановка задачи** Метод разрывных решений, применяемый при исследовании бесконечных и полубесконечных областей, обобщен при построении решений в рядах Фурье. Это позволяет свести задачу механики деформируемого твердого тела для ограниченной области, содержащей разрез или включения, к решению интегрального уравнения (или системы) относительно разрывов определяемых функций.

Метод реализован в применении к решению задачи теории упругости для сечения трубы (плоская деформация), ослабленного внутренней радиальной трещиной. Труба нагружена гидростатическим давлением; на ее внутреннюю поверхность нанесено тонкое покрытие, улучшающее ее физико-механические свойства. В качестве модели покрытия использованы специальным образом сформулированные граничные условия.

С целью проверки адекватности принятой модели, проведен цикл численных экспериментов. В одних случаях, проведены расчеты сечения трубы с покрытием в конечно-

элементных пакетах ANSYS и COMSOL [6]. В других, с использованием широких возможностей пакета FlexPDE, была построена модель трубы без покрытия, но с применением специальных граничных условий. Сравнение полученных результатов позволило удостовериться в адекватности построенных моделей в определенном диапазоне геометрических и физических параметров.

**Методы исследования.** Задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши относительно производной скачка тангенциальной компоненты вектора перемещений на берегах трещины. Ее решение строится методом коллокаций с заранее выделенной особенностью. Конечной целью исследования является определение значений коэффициента интенсивности напряжений в вершинах трещины.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для ограниченной области  $|\xi| \leq l$ ,  $l_1 \leq \eta \leq l_2$  в произвольной ортогональной системе координат. Предположим, что компоненты вектора перемещений и их нормальные производные терпят разрыв на некотором отрезке вдоль одной из координатных линий

$$u_i(\xi^* - 0, \eta) - u_i(\xi^* + 0, \eta) = X_i(\eta) \quad (i = 1, 2)$$

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right|_{(\xi^* - 0, \eta)} - \left. \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right|_{(\xi^* + 0, \eta)} = \Psi_i(\eta) \quad (\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2) \quad (1)$$

причем, две из этих четырех функций предполагаются известными, а две другие – подлежащими определению.

Решение задачи строится в виде  $(\lambda_k = k\pi l^{-1})$ :

$$u_i(\xi, \eta) = \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}(\eta) \cos \lambda_k \xi + b_{ki}(\eta) \sin \lambda_k \xi \quad (2)$$

$$a_{ki} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u_i(\xi, \eta) \cos \lambda_k \xi d\xi, \quad b_{ki} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u_i(\xi, \eta) \sin \lambda_k \xi d\xi$$

При реализации разложений вида (2) в уравнениях равновесия (или движения) необходимо предварительно определить вид разложений

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{c_{0i}(\eta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ki}(\eta) \cos \lambda_k \xi + d_{ki}(\eta) \sin \lambda_k \xi \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} = \frac{e_{0i}(\eta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e_{ki}(\eta) \cos \lambda_k \xi + g_{ki}(\eta) \sin \lambda_k \xi$$

При построении разрывных решений в тригонометрических рядах воспользуемся идеей обобщенного метода интегральных преобразований [1]. Если при определении коэффициентов разложений (3) разбить отрезок интегрирования на два  $\xi \in [-l, \xi^* - 0) \cup (\xi^* + 0, l]$  и применить формулу интегрирования по частям, то, с учетом введенных обозначений (1.1), непосредственные вычисления позволяют выразить коэффициенты разложений (3) через  $a_{ki}, b_{ki}, X_i$  и  $\Psi_i$  ( $k=0, 1, 2, \dots; i=1, 2$ ):

$$c_{ki}(\eta) = \lambda_k b_{ki}(\eta) + l^{-1} \cos \lambda_k \xi^* X_i(\eta) + (-1)^k l^{-1} u_i \Big|_{(-l, \eta)}^{(l, \eta)}$$

$$d_{ki}(\eta) = -\lambda_k a_{ki}(\eta) + l^{-1} \sin \lambda_k \xi^* X_i(\eta)$$

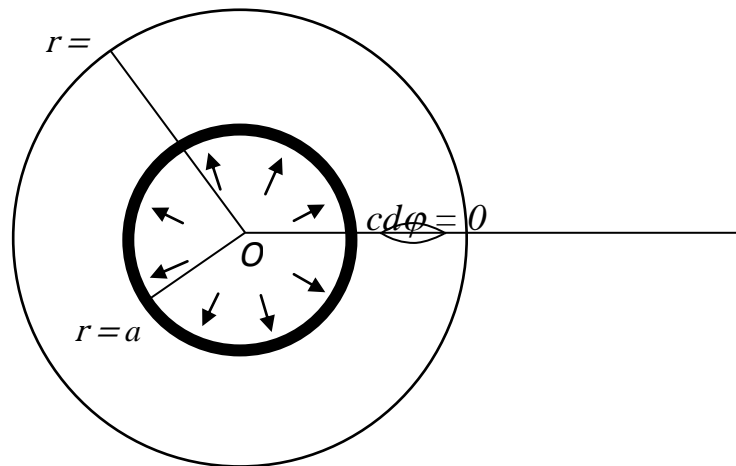
$$e_{ki}(\eta) = \lambda_k d_{ki}(\eta) + l^{-1} \cos \lambda_k \xi^* \Psi_i(\eta) + (-1)^k l^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \Big|_{(-l, \eta)}^{(l, \eta)} \quad (4)$$

$$g_{ki}(\eta) = -\lambda_k c_{ki}(\eta) + l^{-1} \sin \lambda_k \xi^* \Psi_i(\eta)$$

В результате система уравнений равновесия (или движения) распадается на бесконечную последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой из гармоник. Очевидно, граничные условия задачи на координатных линиях  $\eta = l_1$ ,  $\eta = l_2$  предварительно должны быть представлены в виде соответствующих разложений.

Полученные частные решения краевых задач для каждой из гармоник суммируются в ряды, после чего представляется возможным удовлетворить двум заданным условиям вдоль линий разрыва. Описанный алгоритм позволяет в общем случае свести задачу к системе пары интегральных уравнений второго рода относительно двух функций из (1), подлежащих определению. Очевидно, в случае симметрии задачи относительно координатной линии  $\xi = \xi^*$ , между двумя неизвестными функциями из (1) можно установить простую связь и одну из них исключить из рассмотрения, а каждое из разложений (2), (3) будет содержать только четные (или нечетные) гармоники. Заметим, что описанный метод, в сочетании со стандартным интегральным преобразованием, может быть эффективно использован при построении разрывных решений трехмерных задач теории упругости. В качестве примера подобного сочетания можно назвать работу [2], где вдоль оси, пересекающей разрез, применяется обобщенное интегральное преобразование Фурье, а вдоль оси, где все определяемые функции являются гладкими – стандартное интегральное преобразование Фурье.

**Кольцевая область с покрытием, ослабленная радиальным разрезом.** Рассмотрим задачу о плоской деформации упругого кольца  $a \leq r \leq b$ , содержащего разрез вдоль луча  $\varphi = 0$  на интервале  $c \leq r \leq d$ . На внутренней границе кольца, усиленной тонким гибким покрытием толщины  $h$ , действует гидростатическое давление интенсивности  $p$ ; внешняя граница ( $r = b$ ) свободна от внешних воздействий. Очевидно, при такой нагрузке трещина будет находиться в раскрытом состоянии, и ее берега предполагаются свободными от напряжений (рис.1).



**Рис. 1. Кольцевая область с покрытием, ослабленная радиальным разрезом**

**Fig. 1. Coated ring region, weakened by radial incision**

В качестве математической модели тонкого покрытия, сформулируем специальные граничные условия на внутренней границе кольца, при  $r = a$  [3]:

$$\sigma_r^{(1)} = 0, \quad \frac{h}{a} \frac{d\sigma_\varphi^{(1)}}{d\varphi} = \tau_{r\varphi}^{(2)} \quad (5)$$

На внутренней границе кольца, при  $r = b$ , имеем:

$$\sigma_r^{(1)} = -p, \quad \tau_{r\varphi}^{(2)} = 0 \quad (6)$$

Верхний индекс соответствует основному материалу кольца (1) и покрытию (2). В дальнейшем, отсутствие верхнего индекса соответствует материалу кольца. Решение уравнений равновесия в цилиндрической системе координат, в силу симметрии задачи относительно луча  $\varphi = 0$ , будем строить в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \cos k\varphi, \quad v(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(r) \sin k\varphi \quad (7)$$

Здесь  $u(r, \varphi)$  и  $v(r, \varphi)$  – соответственно, радиальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений в полярной системе координат. Коэффициенты разложений (5) имеют обычный вид:

$$a_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad b_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi$$

Здесь задача сводится к определению функций

$$v|_{(r,+0)}^{(r,-0)} = X(r), \quad \partial u / \partial \varphi|_{(r,+0)}^{(r,-0)} = \Psi(r) \quad (8)$$

на интервале  $c \leq r \leq d$ ,  $\varphi = 0$ . Будем считать, что вне этого интервала функции  $X$  и  $\Psi$  тождественно обращаются в нуль.

Компонента  $\tau_{r\varphi}$  тензора напряжений на берегах трещины обращается в нуль. Этот факт позволяет установить зависимость между скачками (6) и исключить функцию  $\Psi$  из рассмотрения  $\Psi = -r^2(X/r)'$ .

Коэффициенты разложений Фурье функций

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{c_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r) \cos k\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(r) \sin k\varphi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{d_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) \cos k\varphi, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(r) \sin k\varphi$$

в силу рассуждений, приведенных выше, будет иметь вид

$$c_k = X\pi^{-1} + kb_k, \quad e_k = -ka_k \quad (9)$$

$$d_k = r^2\pi^{-1}(r^{-1}X)' - k^2a_k, \quad g_k = -k\pi^{-1}X - k^2b_k$$

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой гармонике разложений (5):

$$\begin{cases} a_k'' + \frac{a_k'}{r} - \left(1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k^2\right) \frac{a_k}{r^2} + \frac{k}{2(1-\nu)} \frac{b_k'}{r} - \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \frac{k}{r^2} b_k = f_1(r) \\ b_k'' + \frac{b_k}{r} - \left(1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}k^2\right) \frac{b_k}{r^2} + \frac{k}{1-2\nu} \frac{a_k'}{r} - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{k}{r^2} a_k = f_2(r) \end{cases}$$

$$f_1(r) = \frac{1}{\pi r} \left( \frac{X}{r} - \frac{\nu}{1-\nu} X' \right), \quad f_2(r) = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{k}{\pi r^2} X \quad (10)$$

где  $k=0, 1, 2, \dots$ ,  $b_0=0$ ; здесь и далее  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль упругости основного материала кольца.

Общее решение системы (8) строится методом вариации произвольных постоянных и имеет вид:

$$a_k(r) = \frac{1}{8} r \pi^{-1} (1-\nu)^{-1} [-(k-2)t_{k-2}(r) + (k+2(1-2\nu))t_k(r) - (k-2(1-2\nu))t_k(r) - (k+2)t_{-k-2}(r)] + C_{1k} r^{k-1} + C_{2k} r^{1-k} + C_{3k} r^{k+1} + C_{4k} r^{-k-1}$$

$$b_k(r) = \frac{1}{8} r \pi^{-1} (1-\nu)^{-1} [-(k-2)t_{k-2}(r) + (k-4(1-\nu))t_{-k}(r) + (k+4(1-\nu))t_k(r) - (k+2)t_{-k-2}(r)] - C_{1k} r^{k-1} + C_{2k} \frac{k-4(1-\nu)}{k+2(1-2\nu)} r^{-k+1} - C_{3k} \frac{k+4(1-\nu)}{k-2(1-2\nu)} r^{k+1} + C_{4k} r^{-k-1} \quad (11)$$

$$t_\alpha(r) = r^\alpha \int_c^r \rho^{-\alpha-2} X(\rho) d\rho$$

Постоянные  $C_{ik}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) определяются в результате выполнения граничных условий (5), (6). Отметим, что аналогичная постановка задачи без учета покрытия была исследована ранее в [4-5] на основе описанного подхода. Удовлетворение граничному условию свободных берегов трещины позволяет свести задачу к решению сингулярного интегрального уравнения I рода с ядром Коши:

$$\int_c^d \chi' \frac{d\rho}{r-\rho} + \frac{1}{r} \int_c^d \left\{ \frac{\rho}{r-\rho} + \frac{2r}{\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1} - (k-2) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-1} \right] \right\} \chi' d\rho -$$

$$- \frac{2b^2(a^2+r^2)}{r^2(b^2-a^2)} [s(-2) + s(0)] + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ -D_1 \left(\frac{r}{b}\right)^{k-2} + (k-2) D_2 \left(\frac{a}{r}\right)^k \left(\frac{a}{b}\right)^{k-2} - \right.$$

$$\left. -(2+k) D_3 \left(\frac{r}{b}\right)^k + D_4 \left(\frac{a}{r}\right)^k \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{b}{r}\right)^2 \right\} = -\frac{a^2(b^2+r^2)}{r^2(b^2-a^2)} \frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} p, \quad (12)$$

$$\text{где, } s(\alpha) = b^\alpha \int_c^d \rho^{-\alpha-2} \chi(\rho) d\rho,$$

$$y(\alpha, \beta) = \varepsilon^\alpha + (k^2 - 1)\varepsilon^{-2\beta} - k^2\varepsilon^{-2k-2-\alpha}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a} > 1 \quad d(\alpha, \beta) = \varepsilon^\alpha - \varepsilon^\beta,$$

$$D = ag \left( (\varepsilon^{-2k} - 1)^2 - k^2 \frac{(\varepsilon^2 - 1)^2}{\varepsilon^{2k+2}} \right) + hk(1 + \gamma) \left( 2k \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^{2k+2}} - (1 - \varepsilon^{-4k}) \right),$$

$$\gamma = (1 - 2\nu) / (1 - 2\nu^{(1)}),$$

$$D_1 = \{ ag(k-1)[k^2(1+k)d(-2k, -2k-2)s(k) + k^2d(0, -2k-2)s(-k) -$$

$$-(1+k)(2+k)d(0, -2k)s(-k-2) - (k-2)y(0, k)s(k-2)] +$$

$$+ hk(1+\gamma)[k(k+1)(k\varepsilon^{-2k} - 2(k-1)\varepsilon^{-2-2k})s(k) +$$

$$+(k-2)(k-1)(2k\varepsilon^{-2-2k} - (1+k)\varepsilon^{-2k} + 1)s(k-2) +$$

$$+(1+k)(2+k)(\varepsilon^{-2k} + k-1)s(-k-2) -$$

$$-(k-1)k(2\varepsilon^{-2-2k} + k)s(-k)] \} / D,$$

$$D_2 = \{ ag(k-1)[(k+1)d(-2, -2k-2)s(k) - (k-2)d(0, -2k-2) \times$$

$$s(k-2) - (k+1)(k+2)d(0, -2)s(-k-2) - y(-2k-2, 1)s(-k)] +$$

$$+ hk(1+\gamma) \times [(k-2)(k-1)\varepsilon^{-2-2k}s(k-2) +$$

$$+(1+k)(\varepsilon^{-2} - (k-1)\varepsilon^{-2-2k})s(k) +$$

$$+(1+k)(2+k)\varepsilon^{-2}s(-k-2) - (k-1)(\varepsilon^{-2-2k} + (1+k)\varepsilon^{-2})s(-k)] \} / D,$$

$$D_3 = \{ ag(k+1)[-(k-1)d(0, -2k)s(-k) + (k-2)(k-1) \times$$

$$\times d(-2k-2, -2k)s(k-2) + (k+2)d(0, -2k-2)s(-k-2) +$$

$$+ y(0, k)s(k)] + hk(1+\gamma) \times$$

$$\times [(k-1)(\varepsilon^{-2k} + k+1)s(-k) - (k-2)(k-1)\varepsilon^{-2k}s(k-2) +$$

$$(1+k)((k-1)\varepsilon^{-2k} - 1)s(k) - (1+k)(2+k)s(-k-2)] \} / D,$$

$$D_4 = \{ ag(1+k)[(2+k)y(-2k, 0)s(-k-2) +$$

$$+(k-1)k^2d(-2, 0)s(-k) + (k-2)(k-1)d(0, -2k)s(k-2) +$$

$$+ k^2d(-2k, -2)s(k)] + hk(1+\gamma)[-(k-1)k(k-2(1+k)\varepsilon^{-2})s(-k) +$$

$$+(k-2)(k-1)(1 - (1+k)\varepsilon^{-2k})s(k-2) + k(1+k)(k\varepsilon^{-2k} - 2\varepsilon^{-2})s(k) +$$

$$+(1+k)(2+k)(\varepsilon^{-2k} - 2k\varepsilon^{-2} + k-1)s(-k-2)] \} / D.$$

В предельном случае, когда толщина покрытия  $h$  стремится к 0, получаем (12) соответствующие соотношения [4].

Последующее построение решения полученного уравнения реализуется двумя способами: методом малого параметра и методом коллокаций. Это, в свою очередь, позволяет определить значения коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершин трещины – важнейшей характеристики в механике разрушения.

С целью проверки адекватности принятой модели, проведен цикл численных экспериментов. В данном случае, в конечноэлементном пакете ANSYS, строится конечно-элементная модель сечения трубы, усиленной тонким внутренним покрытием.

На внутреннюю поверхность трубы действует гидростатическое давление. Материал трубы – сталь ( $\nu=0.28$ ,  $E=210$  ГПа), материал покрытия – вольфрам ( $\nu=0.29$ ,  $E=350$  ГПа). Особое внимание уделено детализации сетки конечных элементов в области покрытия.

Тип конечного элемента установлен как Quadrilateral. В пакете COMSOL построена аналогичная конечно-элементная модель. Сетка конечных элементов в области соединения покрытия и трубы значительно детализирована. В данном случае тип конечного элемента установлен как Triangular. Также в пакете FlexPDE была построена модель трубы с покрытием, соответствующая двум предыдущим моделям.

На успех решения задачи с применением метода конечных элементов влияет то, насколько точно геометрия, граничные условия и поведение материала модели соответствует действительности. Ошибки формулировки имеют место, если конечные элементы неточно описывают поведение физической задачи. Выбор подходящего типа элемента и сетки уменьшают ошибки формулировки. При этом, формулировка граничных условий является наиболее критичным шагом анализа. В то же время числовые ошибки обычно более редки по сравнению с ошибками формулировки и дискретизации. Стоит обратить внимание на то, что количество конечных элементов в трех построенных моделях различается незначительно, а их тип в крайне малой степени влияет на полученное решение.

**Обсуждение результатов.** Проведен ряд расчетов моделей, при этом толщина покрытия варьировалась в пределах от 1 до 10% относительно толщины стенки трубы. Общее количество расчетов моделей составляет 4500. В связи с повышенными требованиями к вычислительным ресурсам было принято решение о применении системы распределенных вычислений (локальной grid-системы).

Для проведения в дальнейшем анализа результатов были получены значения напряжений внутри объекта, а также на его внешней и внутренней поверхностях.

Проанализировав полученные результаты можно сделать вывод о том, что построенные модели средствами FlexPDE, ANSYS и COMSOL идентичны, а уравнения, применяемые при моделировании (FlexPDE), адекватно отражают поставленную задачу. При этом погрешность решений составляет от 0,1% до 2,5%, что позволяет говорить о достоверности полученных результатов и возможности дальнейшего моделирования граничных условий. Во втором случае, с использованием широких возможностей пакета FlexPDE, была построена модель трубы без покрытия, но с применением специальных граничных условий.

**Вывод.** Сравнение полученных результатов позволило удостовериться в адекватности построенной модели. При этом погрешность решения составляет от 1% до 2,5% при толщине моделируемого покрытия до 5% относительно толщины стенки трубы.

#### **Библиографический список:**

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 382 с.
2. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
3. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука 1979. 486 с.
4. Ватульян А.О., Соболев Б.В. Об одном эффективном методе построения разрывных решений в задачах механики для тел конечных размеров// Известия РАН, Механика твердого тела. 1995. №6. с.62–69.
5. Рашидова Е.В., Соболев Б.В. Равновесная поперечная внутренняя трещина в составной упругой полуплоскости. Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. № 3. С. 348-364.
6. Морозов, Е. М. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения [Текст] // Е. М. Морозов, А. Ю. Муйземнек, А. С. Шадский. – М. : ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.

7. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. -М.: Физматлит, 2006. - 328 с.
8. Глушков С.В., Скворцов Ю.В., Перов С.Н. Сравнение результатов решения задачи механики разрушения для трубы с несквозной трещиной // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2014. - № 3. - С. 36-49. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.03
9. Li C.Q., Yang S.T. Stress intensity factors for high aspect ratio semi-elliptical internal surface cracks in pipes // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. - 2012. - Vol. 96-97. - P. 13-23. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2012.05.005
10. Yang S.T., Ni Y.L., Li C.Q. Weight function method to determine stress intensity factor for semi-elliptical crack with high aspect ratio in cylindrical vessels // Eng. Fract. Mech. - 2013. - Vol. 109. - P. 138-149. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.05.014
11. Elastic-plastic fracture analyses for pipeline girth welds with 3D semi-elliptical surface cracks subjected to large plastic bending / Y.M. Zhang, D.K. Yi, Z.M. Xiao, Z.H. Huang, S B. Kumar // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. - 2013. - Vol. 105-106. - P. 90-102. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2013.03.009
12. Chiodo M.S.G., Ruggieri C. J and CTOD estimation procedure for circumferential surface cracks in pipes under bending // Eng. Fract. Mech. - 2010. -Vol. 77(3). - P. 415-436. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2009.10.001
13. Madia M., Arafan D., Zerbst U. Reference load solutions for plates with semi-elliptical surface cracks subjected to biaxial tensile loading // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. - 2014. - Vol. 119. - P. 19-28. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2014.02.004
14. Atroshchenko E., Potapenko S., Glinka G. Stress intensity factor for a semi-elliptical crack subjected to an arbitrary mode I loading // Mathematics and Mechanics of Solids. - 2014. - Vol. 19(3). - P. 289-298. DOI: 10.1177/1081286512463573
15. Predan J., Mocilnik V., Gubelj N. Stress intensity factors for circumferential semi-elliptical surface cracks in a hollow cylinder subjected to pure torsion // Eng. Fract. Mech. - 2013. - Vol. 105. - P. 152-168. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.03.033
16. Linear and non-linear analyses for semi-elliptical surface cracks in pipes under bending / B. Mechab, B. Serier, B.B. Bouiadjra, K. Kaddouri, X. Feaugas // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. - 2011. - Vol. 88(1). -P. 57-63. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2010.11.001

#### References:

1. Popov G.Ya. Kонтсентратсия uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vkluycheniy i podkrepleny. M.: Nauka; 1982. 382 s. [Popov G.Ya. Concentration of elastic stresses near the stamps, sections, fine inclusions and reinforcements. Moscow: Nauka; 1982. 382 p. (in Russ.)]
2. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V. Tonkie kontsentratory napryazheniy v uprugikh telakh. M.: Nauka; 1993. 224 s. [Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V. Fine stress concentrators in elastic bodies. Moscow: Nauka; 1993. 224 p. (in Russ.)]
3. Aleksandrov V. M., Mkhitarian S. M. Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami. M.: Nauka; 1979. 486 s. [Aleksandrov V. M., Mkhitarian S. M. Contact problems for bodies with thin coatings and layers. Moscow: Nauka; 1979. 486 p. (in Russ.)]
4. Vatul'yan A.O., Sobol' B.V. Ob odnom effektivnom metode postroeniya razryvnykh resheniy v zadachakh mekhaniki dlya tel konechnykh razmerov. Izvestiya RAN, Mekhanika tverdogo tela. 1995;6:62–69. [Vatul'yan A.O., Sobol' B.V. About the one effective method of discontinuous solution composition in the problems of mechanics of finite dimensional bodies. Mechanics of Solids. 1995;6:62–69. (in Russ.)]
5. Rashidova E.V., Sobol' B.V. Ravnovesnaya poperechnaya vnutrennyaya treshchina v sostavnoy uprugoy poluploskosti. Prikladnaya matematika i mekhanika. 2017;81(3):348-364. [Rashidova E.V., Sobol' B.V. Equilibrium transversal inner crack in combined elastic semi-plane. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017;81(3):348-364. (in Russ.)]
6. Morozov E.M., Muzyemnek A.Yu., Shadskiy A.S. ANSYS v rukakh inzhenera: Mekhanika razrusheniya. M.: LENAND; 2010. 456 s. [Morozov E.M., Muzyemnek A.Yu., Shadskiy A.S. ANSYS in the hands of an engineer: mechanics of destruction. Moscow: LENAND; 2010. 456 p. (in Russ.)]



7. Matvienko Yu.G. Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya. M.: Fizmatlit; 2006. 328 s. [Matvienko Yu.G. Models and criteria of mechanics of destruction. Moscow: Fizmatlit; 2006. 328 p. (in Russ.)]
8. Glushkov S.V., Skvortsov Yu.V., Perov S.N. Sravnenie rezul'tatov resheniya zadachi mekhaniki razrusheniya dlya truby s neskvoznoy treshchinoy. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika. 2014;3:36-49. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.03 [Glushkov S.V., Skvortsov Yu.V., Perov S.N. Comparison of solution results of the problem of mechanics of destruction for a pipe with a blind crack. PNRPU Mechanics Bulletin. 2014;3:36-49. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.03 (in Russ.)]
9. Li C.Q., Yang S.T. Stress intensity factors for high aspect ratio semi-elliptical internal surface cracks in pipes. Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2012;96-97:13-23. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2012.05.005
10. Yang S.T., Ni Y.L., Li C.Q. Weight function method to determine stress intensity factor for semi-elliptical crack with high aspect ratio in cylindrical vessels. Eng. Fract. Mech. 2013;109:138-149. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.05.014
11. Zhang Y.M., Yi D.K., Xiao Z.M., Huang Z.H., Kumar S.B. Elastic-plastic fracture analyses for pipeline girth welds with 3D semi-elliptical surface cracks subjected to large plastic bending. Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2013;105-106:90-102. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2013.03.009
12. Chiodo M.S.G., Ruggieri C. J and CTOD estimation procedure for circumferential surface cracks in pipes under bending. Eng. Fract. Mech. 2010; 77(3):415-436. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2009.10.001
13. Madia M., Arafan D., Zerbst U. Reference load solutions for plates with semi-elliptical surface cracks subjected to biaxial tensile loading. Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2014;119:19-28. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2014.02.004
14. Atroshchenko E., Potapenko S., Glinka G. Stress intensity factor for a semi-elliptical crack subjected to an arbitrary mode I loading. Mathematics and Mechanics of Solids. 2014;19(3):289-298. DOI: 10.1177/1081286512463573
15. Predan J., Mocilnik V., Gubelj N. Stress intensity factors for circumferential semi-elliptical surface cracks in a hollow cylinder subjected to pure torsion. Eng. Fract. Mech. 2013;105:152-168. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.03.033
16. Mechab B., Serier B., Bouiadjra B.B., Kaddouri K., Feaugas X. Linear and non-linear analyses for semi-elliptical surface cracks in pipes under bending. Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2011;88(1):57-63. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2010.11.001

**Сведения об авторах:**

**Пайзулаев Магомед Муртазалиевич** - кандидат технических наук, старший преподаватель, кафедра сопротивления материалов, теоретической и строительной механики.

**Рашидова Елена Викторовна** - кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра информационных технологий.

**Соболь Борис Владимирович** - доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий.

**Information about the authors.**

**Magomed M. Payzulaev** – Cand. Sci. (Technical), Senior lecturer, Department of Resistance of Materials, Theoretical and Building Mechanics.

**Elena V. Rashidova** – Cand. Sci. (Physics and Mathematical), Prof., Department of Information Technologies.

**Boris V. Sobol'** – Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of Information Technologies.

**Конфликт интересов.**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. The authors declare no conflict of interest.

**Поступила в редакцию** 10.05.2017.

**Received** 10.05.2017.

**Принята в печать** 30.05.2017.

**Accepted for publication** 30.05.2017.