

Для цитирования: Абуев Я.К., Бабаев А.Б., Эсетов Ф.Э. Компьютерное моделирование антиферромагнитных структур, описываемых трехвершинной антиферромагнитной моделью Поттса. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017;44 (1):61-69. DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-1-61-69

For citation: Abuev Y.K., Babaev A.B., Esetov Ph.E. Computer simulation of antiferromagnetic structures described by the three-vertex antiferromagnetic potts model. Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. 2017;44 (1):61-69. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-1-61-69

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 239.2

DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-1-61-69

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУР, ОПИСЫВАЕМЫХ ТРЕХВЕРШИННОЙ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛЬЮ ПОТТСА

Абуев Я.К.¹, Бабаев А.Б.², Эсетов Ф.Э.³

¹Институт физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН,
367003, Махачкала, Россия

²⁻³Дагестанский государственный педагогический университет,
367003, Махачкала, Россия
e-mail: ²b_albert78@mail.ru,

Резюме: Цель. Проведено компьютерное моделирование антиферромагнитных структур описываемых трехвершинной моделью Поттса на треугольной решетке с учетом антиферромагнитных обменных взаимодействий между ближайшими J_1 и вторыми соседями J_2 . Основной целью компьютерного моделирования являлось выяснение основного состояния и областей влияния фрустраций на термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитных структур описываемых низкоразмерной моделью Поттса. **Метод.** Компьютерное моделирование проведено на основе метода Монте-Карло. При этом рассматриваемый метод реализуется с применением алгоритма Метрополиса в сочетании с кластерным алгоритмом Вольфа. Компьютерное моделирование проводилось для низкоразмерных систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами $L=24 \div 124$. **Результат.** На основе анализа теплоемкости и энтропии, показано, что в рассматриваемой модели с величинами взаимодействий обменных параметров $J_1 < 0$ и $J_2 < 0$ в интервалах изменений величины $0 \leq r < 0.2$ и $1.0 < r \leq 2.0$ ($r = J_2/J_1$) наблюдаются фазовые переходы. В промежуточном интервале $0.2 \leq r \leq 1.0$ фазовый переход отсутствует, и наблюдаются фрустрации. Для всех рассмотренных систем с линейными размерами L получены температурные зависимости термодинамических параметров, таких как теплоемкости, восприимчивости, и энтропии. Обсуждается поведение этих параметров, как при низких, так и при высоких значениях температур. На основе применения метода кумулянтов Биндера четвертого порядка определены температуры фазовых переходов. **Вывод.** Показано, в каких случаях в зависимости от величины r в моделируемой системе наблюдается фазовый переход, а в каких - фрустрации. Доказано, что конкуренция обменных параметров первых и вторых ближайших соседей в интервале изменений параметра r $0.2 \leq r \leq 1$ приводит к вырождению основного состояния рассматриваемой структуры и в рассматриваемом интервале наблюдаются фрустрации. На основе полученных данных построена фазовая диаграмма в зависимости от температуры фазового перехода и величины отношения r .

Ключевые слова: фрустрации, фазовые переходы, модель Поттса, треугольная решетка

TECHICALSCIENCE
COMPUTER SCIENCE, COMPUTER ENGINEERING AND MANAGEMENT

COMPUTER SIMULATION OF ANTIFERROMAGNETIC STRUCTURES DESCRIBED BY
THE THREE-VERTEX ANTIFERROMAGNETIC POTTS MODEL

Abuev Y.K.¹, Babaev A.B.², Esetov Ph.E.³

¹Institute of Physics of Daghestan Scientific Center of Russian Academy of Sciences,
52 M. Yaragskogo Str., 367003 Makhachkala, Russia

²⁻³ Daghestan State Pedagogical University,
57 M. Yaragskogo Str., Makhachkala 367003, Russia
e-mail: ²b_albert78@mail.ru,

Abstract. Objectives A computer simulation of the antiferromagnetic structures described by the three-vertex Potts model on a triangular lattice is performed, taking into account the antiferromagnetic exchange interactions between the nearest J_1 and second J_2 neighbours. The main goal of the computer simulation was to elucidate the effects of ground state and areas of frustration on the thermodynamic and magnetic properties of antiferromagnetic structures described by the low-dimensional Potts model. **Method** The computer simulation is based on the Monte Carlo method. This method is implemented using the Metropolis algorithm in combination with the Wolff cluster algorithm. The computer simulation was carried out for low-dimensional systems with periodic boundary conditions and linear dimensions $L = 24 \div 124$. **Results** On the basis of heat capacity and entropy analysis, phase transitions were observed in the considered model to possess exchange interaction parameters $J_1 < 0$ and $J_2 < 0$ in the variation intervals $0 \leq r < 0.2$ and $1.0 < r \leq 2.0$ ($r = J_2/J_1$). In the intermediate interval $0.2 \leq r \leq 1.0$ there is no phase transition, and frustrations are observed. The temperature dependences of thermodynamic parameters, such as heat capacity, susceptibility and entropy, were obtained for all considered systems with linear dimensions L . The behaviour of these parameters, both at low and high temperatures, is discussed. The temperatures of the phase transitions are determined using the Binder fourth-order cumulant method. **Conclusion** Cases are shown in which, depending on the r -value, either a phase transition or a frustration is observed in the simulated system. It is proved that the competition between the exchange parameters of the first and second nearest neighbors in the r variation interval $0.2 \leq r \leq 1.0$ leads to a degeneracy in the examined structure ground state; frustrations are additionally observed in the interval under consideration. On the basis of the obtained data, a phase diagram is constructed depending on the phase transition temperature and r -ratio.

Keywords: frustrations, phase transitions, Potts model, triangular lattice

Введение. В последние двадцатилетие интенсивно обсуждаются фазовые переходы (ФП) и критические явления (КЯ) в магнетиках, описываемых двумерными (2D) решеточными моделями Изинга и Поттса [1-3]. Это обусловлено тем, что низкоразмерные решеточные модели на треугольной решетке описывают большой класс реальных физических систем: слоистые магнетики, пленки жидкого гелия, сверхпроводящие пленки, адсорбированные пленки и др. [4-10]. Атомы в узлах треугольной решетки отличаются состояниями. В рассматриваемой работе атом в узле может принимать три различные состояния – состояние с $s=1$ – покрашенный черным цветом атом, состояние с $s=2$ – покрашенный серым цветом узел, – состояние с $s=3$ – покрашенный белым цветом атом (рис.1). Если антиферромагнитное (АФ) взаимодействием первых соседей намного больше АФ взаимодействия вторых соседей реализуется конфигурация а) см. рис.1., если же взаимодействия вторых соседей будут намного больше, чем взаимодействие с первыми соседями, то реализуется конфигурации, приведенные на рис. 1 (в), и в промежуточном случае - реализуются конфигурации 1 (б).

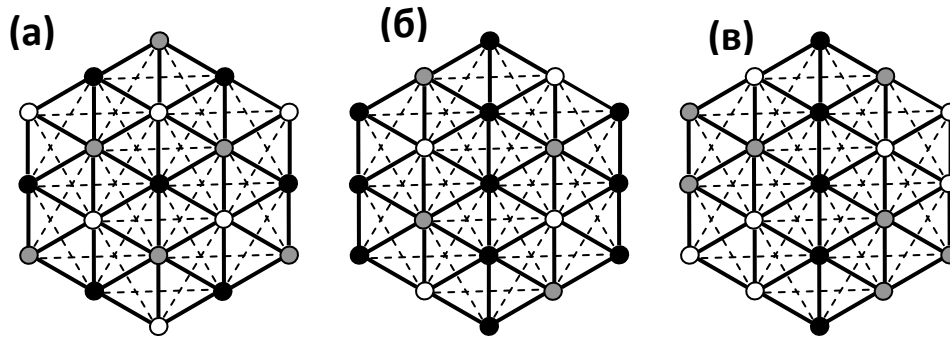


Рис.1. Магнитные структуры в 3-вершинной модели Поттса на треугольной решетке. Исходная фаза (а) соответствует параметру $r=J_2/J_1$ в диапазоне $0 < r < 0.2$; промежуточная фаза (б) – в диапазоне $0.2 < r < 1.0$; конечная фаза (в) – в диапазоне $r > 1.0$.

Fig.1. Magnetic structures in the 3-vertex Potts model on a triangular lattice. The initial phase (a) corresponds to the parameter $r = J_2 / J_1$ in the range $0 < r < 0.2$; Intermediate phase (b) - in the range $0.2 < r < 1.0$; The final phase (in) is in the range $r > 1.0$.

Постановка задачи. Антиферромагнетик на треугольной решетке является примером фрустрированной спиновой системы. Эффекты фрустраций играют важную роль в различных магнитных системах. Экспериментальные [3] и теоретические исследования [4] позволили установить, что фрустрированные системы проявляют свойства, отличные от соответствующих нефрустрированных систем. Однако, необходимо отметить, что в случае трехвершинной антиферромагнитной (АФ) модели Поттса на треугольной решетке в основном состоянии фрустрация обусловленная геометрией решетки отсутствует и магнитная система упорядочена при конечной температуре. При учете вторых ближайших соседей конкуренция обменных взаимодействий может привести к фрустрациям, т.е. такому пространственному расположению магнитных моментов атомов в кристалле, при котором невозможно одновременное антиферромагнитное упорядочение всех взаимодействующих спинов (рис.1).

Нами ранее в работах [11, 12] на основе метода Монте-Карло исследовалась трехвершинная антиферромагнитная модель Поттса на треугольной решетке с учетом первых и вторых ближайших соседей с величинами взаимодействий $J_1 < 0$ и $J_2 < 0$ в диапазоне значений $r=0.0 \div 1.0$, $r=J_2/J_1$. Было обнаружено, что в этой модели в интервале изменений величины $0,0 \leq r < 0,2$ наблюдается ФП первого рода, в то время как в интервале изменений $0,2 \leq r \leq 1,0$ – в системе возникают фрустрации, и нет ФП. При этом, в работах не было установлено, что происходит при $r > 1$ – фрустрации или фазовый переход?

Исследование термодинамических параметров в зависимости от величины отношения вторых ближайших соседей к первым $r = J_2/J_1$ в интервале изменений $1,0 \leq r \leq 2,0$ и определение значений r , при которых в магнитной структуре, описываемой трехвершинной моделью Поттса на треугольной решетке, возникают фрустрации, расчет энтропии, температуры фазового перехода, и в зависимости от этого отношения является главной задачей этой работы.

Методы исследования. Антиферромагнитная трехвершинная ($q=3$) модель Поттса на треугольной решетке с учетом взаимодействия вторых ближайших соседей описывается следующим гамильтонианом [5]:

$$H = -J_1 \sum_{i,j} \cos \theta_{i,j} - J_2 \sum_{i,k} \cos \theta_{i,k}, \quad (1)$$

где J_1 и J_2 – параметры обменных антиферромагнитных ($J_1 < 0$, $J_2 < 0$) взаимодействий для ближайших и вторых ближайших соседей соответственно, $\theta_{i,j}$, $\theta_{i,k}$ – углы между взаимодействующими спинами $S_i - S_j$ и $S_i - S_k$ соответственно, причем $\theta_{i,j}$ принимают три

значения 0° , 120° и 240° . Следует отметить, что рассматриваемая нами модель хорошо описывает термодинамические и критические свойства и неупорядоченных магнетиков [13, 14].

Расчеты проведены для систем с периодическими граничными условиями и с линейными размерами $L \times L = N$, $L=24 \div 124$ на основе алгоритма Метрополиса метода Монте-Карло. При этом отношение обменного взаимодействия вторых и ближайших соседей менялось в интервале $0 \leq r \leq 2.0$, где $r = J_2/J_1$. Кроме того нами, осуществлен анализ поведения термодинамических параметров, определены температуры ФП, и вычислены предельные значения энтропии при низких и высоких температурах. Начальные конфигурации задавались таким образом, чтобы все спины находились в разных состояниях. Для вывода системы в равновесное состояние вычислялось время релаксации τ_0 для всех систем с линейными размерами L . Затем усреднение проводилось по участку марковской цепи длиной $\tau = 200\tau_0$. Кроме того, для повышения точности расчетов проводилось усреднение по 10 различным начальным конфигурациям. Затем эти данные использовались для расчета средних значений термодинамических параметров.

Обсуждение результатов. Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости и восприимчивости нами использовались флуктуационные соотношения [15]:

$$C = (NK^2)(\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2), \quad (2)$$

$$\chi = (NK)(\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2), \quad (3)$$

где $K = J/k_B T$, $N = L^2$ - число магнитных узлов, U - внутренняя энергия, m - параметр порядка системы. Угловые скобки означают термодинамическое усреднение.

На рис.2 представлены характерные зависимости теплоемкости C от температуры T для случая $J_1 < 0$ и $J_2 < 0$ при различных значениях r , полученные для систем с линейными размерами $L=60$. Здесь и далее на всех рисунках погрешность данных не превышает размеров символов, используемых для построения графиков.

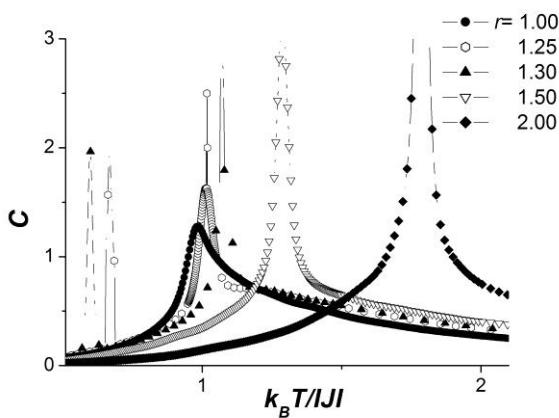


Рис.2. Температурные зависимости теплоемкости в интервале изменений r , $1.0 < r < 2.0$.
 Fig.2. Temperature dependences of heat capacity in the range of changes r , $1.0 < r < 2.0$.

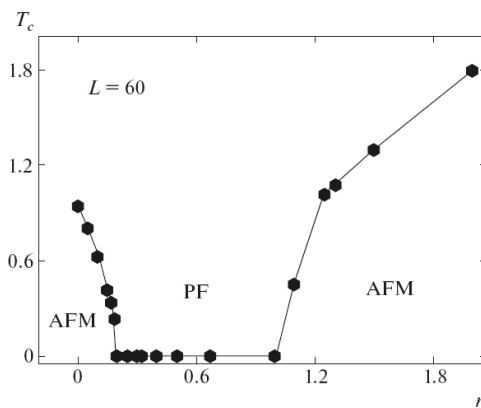


Рис.3. Зависимость точки фазового перехода в 3-вершинной модели Поттса на треугольной решетке от параметра $r = J_2/J_1$.
 Fig.3. Dependence of the phase transition point in the 3-vertex Potts model on a triangular lattice on the parameter $r = J_2 / J_1$.

Как видно из рис.2, уменьшение значения r в интервале $1.0 \leq r \leq 2.0$ приводит к сдвигу максимумов в сторону более низких температур. При этом наблюдается и уменьшение абсолютных значений максимумов теплоемкости. Такое поведение температурных зависимостей теплоемкости в зависимости от r обусловлено тем, что с уменьшением взаимодействия вторых соседей уменьшается вклад энергии взаимодействия по модулю, что ослабевает жесткость системы и, соответственно, понижает температуру фазового перехода.

Уменьшение абсолютных значений максимумов теплоемкости происходит за счет конкуренции первых и вторых ближайших соседей. Кроме того, из рисунка 2 видно, что при $r=1,0$ очевидной расходимости в критической области не наблюдается, что характерно для фрустрированных систем.

И наоборот, для систем с $r=1,25; 1,30; 1,50$ и $2,0$ в критической области наблюдается явная расходимость. При $r=1,25$ и $1,3$ наблюдается расщепление теплоемкости. Расщепление теплоемкости обычно характерно вблизи точки фрустрации. В работе [11] такое поведение теплоемкости было обнаружено для значения $r=0,167$. Зависимость точки фазового перехода в 3-вершинной модели Поттса на треугольной решетке от параметра r представлена на рисунке 3.

Для анализа характера ФП и особенностей поведения термодинамических характеристик вблизи точки перехода нами применялся метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [16]:

$$V_L(T) = 1 - \frac{\langle E^4 \rangle_L}{3 \langle E^2 \rangle_L^2}, \quad (4)$$

$$U_L(T) = 1 - \frac{\langle m^4(T, L) \rangle_L}{3 \langle m^2(T, L) \rangle_L^2}, \quad (5)$$

где E - энергия и m - параметр порядка системы с линейными размерами L . Выражения (4) и (5) позволяют с хорошей точностью определить T_c при фазовых переходах первого и второго рода соответственно. Следует отметить, что применение кумулянтов Биндера позволяет также хорошо тестировать род фазового перехода в системе.

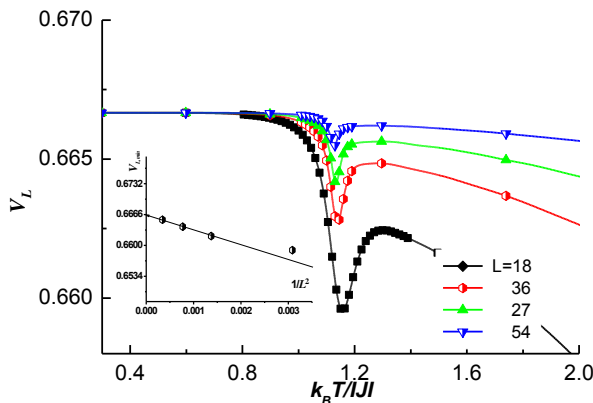


Рис.4. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $V_L(T)$ для двумерной модели Поттса с величинами взаимодействий $J_1 > 0$ и $J_2 < 0$, при $|r|=1/3$.

Fig. 4. Temperature dependence of the Binder capacitor $V_L(T)$ for the two-dimensional Potts model with the interaction quantities $J_1 > 0$ and $J_2 < 0$, with $|r| = 1/3$.

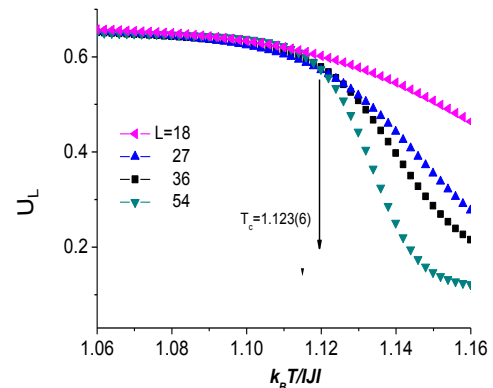


Рис.5. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $U_L(T)$ для трехвершинной модели Поттса с величинами взаимодействий $J_1 > 0$ и $J_2 < 0$, при $|r|=1/3$.

Fig. 5. Temperature dependence of Binder's cumulants $U_L(T)$ for the three-vertex Potts model with the interaction values $J_1 > 0$ and $J_2 < 0$, with $|r| = 1/3$

Методика определения критической температуры нами рассмотрена в работах [17-20]. Известно, что фазовые переходы второго рода характеризуются, в частности, следующими отличительными особенностями [3]: усредненная величина $V_L(T)$ стремится к тривиальному значению V^* согласно выражению

$$V(T) = V^* + bL^{-d} \quad (6)$$

при $L \rightarrow \infty$ и $T = T_c(L)$, где $v^* = 2/3$, что и продемонстрировано на рис. 4. Кроме того, в случае ФП второго рода кривые температурной зависимости кумулянтов Биндера $U_L(T)$ по параметру порядка m имеют четко выраженную точку пересечения.

Характерные зависимости кумулянтов Биндера $U_L(T)$ для 2D модели Поттса от температуры для систем с разными линейными размерами L приведены на рис. 5. Как видно из рис. 5 в критической области наблюдается четко выраженная точка пересечения, что и свидетельствует о ФП второго рода. Кроме того, этот рисунок демонстрирует насколько точно можно определить критическую температуру T_c .

Основываясь на результатах данной работы и предыдущих исследований [11], мы построили зависимость точки фазового перехода (рис.3) в 3-вершинной модели Поттса на треугольной решетке от параметра $r = J_2/J_1$.

Известно, что в системах с фрустрациями энтропия S при низких температурах должна стремиться к отличному от нуля значению, а при высоких температурах энтропия должна стремиться к величине $\ln(q)$, поскольку при $T \rightarrow \infty$ статистическая сумма равна q^N . Указанные особенности для двумерной АФ 3-вершинной модели Поттса на треугольной решетке продемонстрированы на рис. 6. Зависимость нуль-температурной энтропии от величины r приведена на рис. 7.

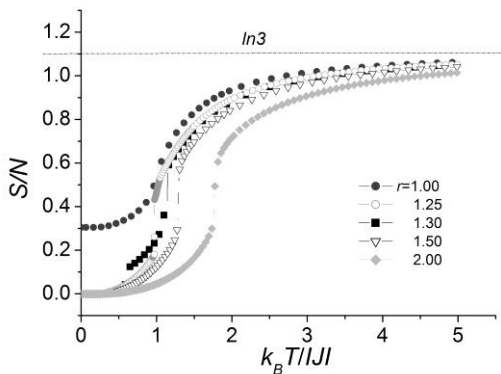


Рис.6. Температурная зависимость энтропии S для 2D АФ модели Поттса с $q=3$ в интервале изменений величины $1,0 \leq r \leq 2,0$.
Fig.6. Temperature dependence of entropy S for the 2D AF Potts model with $q = 3$ in the range of changes of magnitude $1,0 \leq r \leq 2,0$.

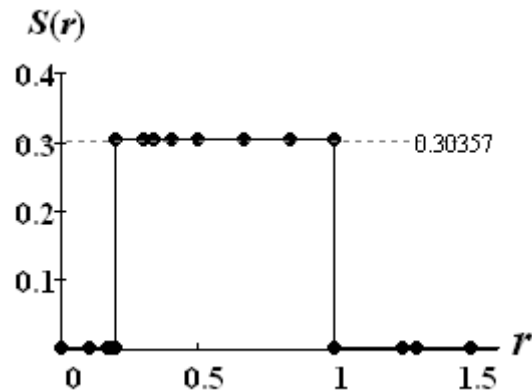


Рис.7. Зависимость энтропии (при $T=0$) в 3-вершинной модели Поттса на треугольной решетке от параметра $r = J_2/J_1$.
Fig.7. Dependence of entropy (at $T = 0$) in the 3-vertex Potts model on a triangular lattice on the parameter $r = J_2/J_1$.

Как видно из рис. 7 выделяются две фазы с соответствующими интервалами изменений величины r , $0 \leq r < 0,2$ и $1,0 < r \leq 2,0$ для которых имеется дальний порядок по ориентации спинов в каждой из подрешетках. Энтропия этих упорядоченных фаз как видно из рис. 7 равна нулю. В тоже время в интервале изменений величины $0,2 \leq r < 1,0$ энтропия отлична от нуля, что является характерным признаком отсутствия упорядочения в рассматриваемой магнитной системе.

Вывод. Таким образом, наши данные, полученные для антиферромагнитной структуры, описываемой двумерной трехвершинной моделью Поттса на треугольной решетке, на основе алгоритма Метрополиса метода Монте-Карло в широком интервале изменений величины $r = J_2/J_1$ — отношения взаимодействия между вторыми соседями к взаимодействию между ближайшими соседями $0 \leq r \leq 2,0$, приводят к следующим результатам:

1. В интервалах изменений величины $0 \leq r < 0,2$ и $1,0 \leq r \leq 2,0$ в рассматриваемых структурах возникают фазовые переходы первого рода.

2. Конкуренция обменных параметров первых и вторых ближайших соседей в интервале изменений параметра r $0,2 \leq r \leq 1$ приводит к вырождению основного состояния рассматриваемой структуры, и в рассматриваемом интервале наблюдаются фрустрации.

Библиографический список:

1. Diep H.T., Frustrated spin systems, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2004.
2. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Tricritical point of the three-dimensional Potts model ($q = 4$) with quenched nonmagnetic disorder // JETP Letters, 2014, 99, 9, 535.
3. Loison D., Schotte K.D., First and second order transition in frustrated XY systems // The European Physical Journal B, 1998, 5, 735.
4. Гехт Р.С., Магнитные состояния и фазовые переходы во фрустрированных антиферромагнетиках с треугольной решеткой // УФН, 1989, 159, 261.
5. Wu F.Y., The Potts model // Rev. Mod. Phys., 1982, 54, 235.
6. Малеев С.В., УФН, 2002, 172, 6, 617.
7. Liao H.J., Xie Z.Y., Chen J., Liu Z.Y., Xie H.D., Huang R.Z., Normand B., Xiang T., Gapless Spin-Liquid Ground State in the $S=1/2$ Kagome Antiferromagnet // Phys. Rev. Lett., 2017, 118, 137202.
8. Hallas A.M., Sharma A.Z., Cai Y., Munsie T.J., Wilson M.N., Tachibana M., Wiebe C.R., and Luke G.M., Relief of frustration in the Heisenberg pyrochlore antiferromagnet $Gd_2Pt_2O_7$ // Phys. Rev. , 2016, 94, 134417.
9. Landau D.P., Binder K., A Guide to Monte-Carlo Simulations in Statistical Physics (Cambridge: Cambridge University Press), 2009.
10. Nagai T., Okamoto Y., Janke W. Crossover scaling in the two-dimensional three-state Potts model. Condensed Matter Physics, 2013, 16, 23605.
11. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Magomedov M.A., Kassin-Ogly F.A., Proshkin A.I., Frustrations and phase transitions in the three-vertex Potts Model with next-nearest-neighbor interactions on a triangular lattice // JETP Letters, 2014, 100, 4, 242.
12. Бабаев А.Б., Муртазаев А.К., Сулейманов Э.М., Ризванова Т.Р., Исследование влияния фрустраций на термодинамические свойства низкоразмерной модели Поттса методами компьютерного моделирования // ФТТ, 2016, 58,10, 2001.
13. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Ya., Phase transitions in a three-dimensional diluted Potts model with 4 spin states // Low Temperature Physics, 2011, 37, 134.
14. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Ataeva G.Ya., Phase transitions in two-dimensional ferromagnetic Potts model with $q=3$ on a triangular lattice // Low Temperature Physics, 2013, 39, 2, 147.
15. Peczac P., Ferrenberg A.M., Landau D.P., High-accuracy Monte Carlo study of the three-dimensional classical Heisenberg ferromagnet // Phys.Rev. B1991,43, 6087.
16. Eichhorn K., Binder K., Monte Carlo investigation of the three-dimensional random-field three-state Potts model // J. Phys.: Condens. Matter, 1996, 8, 5209.
17. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Phase transitions in the two-dimensional Ferro- and antiferromagnetic Potts models on a triangular lattice // JETP, 2012, 115, 6, 1042.
18. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Y., Phase transition properties of three-dimensional systems described by diluted Potts model // JETP, 2009, 109, 3, 442.
19. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Y., Investigation of the critical properties in the 3d site-diluted Potts model // Diffusion and Defect Data Pt.B: Solid State Phenomena, 2009, 152-153, 571.
20. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Y., Phase transitions in 3D site-diluted Potts model with spin states $q=4$ // Diffusion and Defect Data Pt.B: Solid State Phenomena, 2011, 168-169, 357.

References:

1. Diep H.T. Frustrated spin systems. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd; 2004.

2. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Tricritical point of the three-dimensional Potts model ($q = 4$) with quenched nonmagnetic disorder. *JETP Letters*. 2014; 99:535.
3. Loison D., Schotte K.D., First and second order transition in frustrated XY systems. *The European Physical Journal B*. 1998; 5:735.
4. Geht R.S. Magnitnye sostoyaniya i fazovye perekhody vo frustrirovannykh antiferromagnetikakh s treugol'noi reshetkoi. *Uspekhi fizicheskikh nauk*; 1989; 159:261. [Geht R.S. Magnetic states and phase transitions in frustrated antiferromagnets with a triangular lattice. *Advances in Physical Sciences*; 1989; 159:261. (in Russ.)]
5. Wu F.Y. The Potts model. *Rev. Mod. Phys.* 1982; 54:235.
6. Maleev S.V. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 2002; 172(6):617. [Maleev S.V. *Advances in Physical Sciences*. 2002; 172(6):617. (in Russ.)]
7. Liao H.J., Xie Z.Y., Chen J., Liu Z.Y., Xie H.D., Huang R.Z., Normand B., Xiang T. Gapless Spin-Liquid Ground State in the $S=1/2$ Kagome Antiferromagnet. *Phys. Rev. Lett.* 2017; 118:137202.
8. Hallas A.M., Sharma A.Z., Cai Y., Munsie T.J., Wilson M.N., Tachibana M., Wiebe C.R., Luke G.M. Relief of frustration in the Heisenberg pyrochlore antiferromagnet $Gd_2Pt_2O_7$. *Phys. Rev.* 2016; 94:134417.
9. Landau D.P., Binder K., *A Guide to Monte-Carlo Simulations in Statistical Physics*. Cambridge: Cambridge University Press; 2009.
10. Nagai T., Okamoto Y., Janke W. Crossover scaling in the two-dimensional three-state Potts model. *Condensed Matter Physics*. 2013; 16:23605.
11. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Magomedov M.A., Kassan-Ogly F.A., Proshkin A.I. Frustrations and phase transitions in the three-vertex Potts Model with next-nearest-neighbor interactions on a triangular lattice. *JETP Letters*. 2014; 100(4):242.
12. Babaev A.B., Murtazaev A.K., Suleymanov E.M., Rizvanova T.R. Issledovanie vliyaniya frustratsii na termodinamicheskie svoystva nizkorazmernoi modeli Potts metodom kompyuternogo modelirovaniya. *Fizika tverdogo tela*. 2016; 58(10):2001. [Babaev A.B., Murtazaev A.K., Suleymanov E.M., Rizvanova T.R. Investigation of frustration effect on the thermodynamic properties of the low-dimensional Potts model using computer simulation. *Physics of the Solid State*. 2016; 58(10):2001. (in Russ.)]
13. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Ya. Phase transitions in a three-dimensional diluted Potts model with 4 spin states. *Low Temperature Physics*. 2011; 37:134.
14. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Ataeva G.Ya. Phase transitions in two-dimensional ferromagnetic Potts model with $q=3$ on a triangular lattice. *Low Temperature Physics*. 2013; 39(2):147.
15. Peczac P., Ferrenberg A.M., Landau D.P. High-accuracy Monte Carlo study of the three-dimensional classical Heisenberg ferromagnet. *Phys.Rev. B*. 1991; 43:6087.
16. Eichhorn K., Binder K. Monte Carlo investigation of the three-dimensional random-field three-state Potts model. *J. Phys. Condens. Matter*. 1996; 8:5209.
17. Murtazaev A.K., Babaev A.B. Phase transitions in the two-dimensional Ferro- and antiferromagnetic Potts models on a triangular lattice. *JETP*. 2012; 115(6):1042.
18. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Y. Phase transition properties of three-dimensional systems described by diluted Potts model. *JETP*. 2009; 109(3):442.
19. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Y. Investigation of the critical properties in the 3d site-diluted Potts model. *Diffusion and Defect Data Pt.B: Solid State Phenomena*. 2009; (152-153):571.
20. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Y. Phase transitions in 3D site-diluted Potts model with spin states $q=4$. *Diffusion and Defect Data Pt.B: Solid State Phenomena*, 2011; (168-169): 357.

Сведения об авторах.

Абуев Яраш Козовович – научный сотрудник Института физики, Дагестанского научного центра Российской академии наук.

Бабаев Альберт Бабаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информатики и вычислительной техники» факультета математики, физики и информатики.

Эсетов Фархад Эзединович – кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Информатики и вычислительной техники» факультета математики, физики и информатики.

Information about the authors.

Yarash K. Abuev - research fellow at the Institute of physics, Dagestan scientific center of the Russian academy of sciences.

Albert B. Babaev - Cand. Sc.(Phys.- Math.1), Assoc. Prof., Department of Informatics and computer engineering at the faculty of mathematics, physics and informatics.

Pharkhat E. Esetov - Cand. Sc.(Pedagogic.), Assoc. Prof., Department of informatics and computer engineering of the faculty of mathematics, physics and informatics.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 30.11.2016.

Принята в печать 13.01.2017.

Conflict of interest

Received 30.11.2016.

Accepted for publication 13.01.2017.