

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

УДК 624.04

Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Языев С.Б.

РАСЧЁТ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЁТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ СРЕДНЕГО СЛОЯ

Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V., Yazyev S.B.

CALCULATION OF THE THREE-LAYER PLATE BY THE METHOD OF FINAL ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT CREEP OF THE CENTRE

Получены разрешающие уравнения метода конечных элементов для задачи изгиба трехслойной гибкой пластинки с учетом ползучести заполнителя. Данные уравнения справедливы для произвольных законов связи деформаций ползучести и напряжений. При выводе основных соотношений МКЭ учитывалась только работа заполнителя на сдвиг. Выполнено сравнение решения в МКЭ с результатами, получаемыми методом конечных разностей с учетом работы несущих слоев.

Ключевые слова: *трехслойная пластинка, ползучесть, метод конечных разностей, метод конечных элементов.*

The resolving equations of finite element method for the problem of bending of three-layer flexible plate taking into account creep were obtained. These equations are valid for arbitrary laws of connection between creep strain and stress. In deriving the basic relations of FEM we took into account only the work of aggregate on shift. Comparison of the solutions in the FEM with the results obtained by finite difference method with the work of bearing layers was made.

Key words: *three-layer plate, creep, finite difference method, finite element method.*

Введение

Трехслойные пластинки, сочетающие в себе легкость и высокую несущую способность, в настоящее время широко применяются в строительстве. Известно, что пенопластам, которые используются в таких пластинках в качестве среднего слоя, присущи не только упругие свойства, но и вязкость. Поэтому для адекватного описания НДС трехслойных панелей необходимо использовать аппарат теории ползучести [1, 2].

Вопросам расчета трехслойных конструкций с учетом реологических свойств заполнителя посвящено достаточно много работ [4–9]. Однако авторы, как правило, ограничиваются определенным законом связи деформаций ползучести и напряжений. Имеется решение данной задачи в случаях, когда ползучесть описывается законами Фойгта [8], Максвелла–Томпсона [5], уравнением Больцмана–Вольтерра при экспоненциальном ядре [6]. В действительности ползучесть полимерных материалов характеризуется более сложными зависимостями, поэтому существует необходимость в универсальной методике расчета.

Постановка задачи

Предположим, что толщина наружных слоев одинакова и равна t . Кроме того, t намного меньше общей толщины пластинки h (рис. 1). Будем считать, что крайние слои передают нормальные и касательные усилия в своей плоскости, а средний слой работает только на сдвиг [3]. Пусть u^B, v^B, w^B — перемещения точек верхнего слоя, u^H, v^H, w^H — соответственно перемещения нижнего слоя. Полагаем, что средний слой несжимаем, т.е. $w^B = w^H = w$. Деформации верхнего и нижнего слоя при больших прогибах будут равны:

$$\varepsilon_x^{B(H)} = \frac{\partial u^{B(H)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y^{B(H)} = \frac{\partial v^{B(H)}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma_{xy}^{B(H)} = \frac{\partial u^{B(H)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{B(H)}}{\partial x}. \quad (1)$$

Соответствующие им напряжения запишутся в виде:

$$\sigma_x^{B(H)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^{B(H)} + \nu \varepsilon_y^{B(H)}); \quad \sigma_y^{B(H)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^{B(H)} + \nu \varepsilon_x^{B(H)});$$

$$\tau_{xy}^{B(H)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^{B(H)}.$$

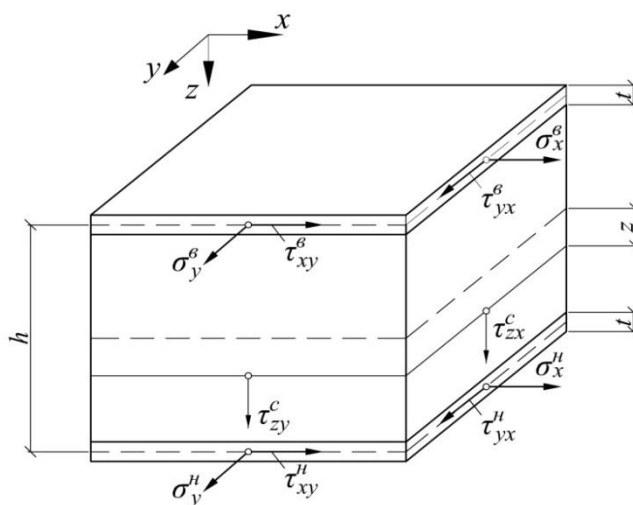


Рисунок 1 - Трёхслойная пластинка

Пусть σ_x , σ_y , τ_{xy} — полные напряжения в срединной поверхности пластинки. Так как срединный слой не воспринимает нормальных усилий в своей плоскости, то

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x^B + \sigma_x^H}{2}; \quad \sigma_y = \frac{\sigma_y^B + \sigma_y^H}{2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}^B + \tau_{xy}^H}{2}.$$

Кроме того, вводя обозначения $u = \frac{u^B + u^H}{2}$ и $v = \frac{v^B + v^H}{2}$, получим:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right].$$

Изгибающие и крутящий моменты будут равны:

$$M_x = (\sigma_x^H - \sigma_x^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2};$$

$$M_y = (\sigma_y^H - \sigma_y^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2};$$

$$H = (\tau_{xy}^H - \tau_{xy}^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2}.$$

С учетом (1) и вводя обозначения $\alpha = \frac{u^H - u^B}{h}$, $\beta = \frac{v^H - v^B}{h}$, получим:

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta}{\partial y} \right); \quad M_y = D \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right); \quad H \\ &= D(1 - \nu) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $D = \frac{E t h^2}{2(1 - \nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость трехслойной пластинки.

Для перемещений точки заполнителя, находящейся на расстоянии z от срединной поверхности, будут иметь место зависимости [3]:

$$u^c = \frac{u_B + u_H}{2} + \frac{u_H - u_B}{h} z = u + \alpha z; \quad v^c = \frac{v_B + v_H}{2} + \frac{v_H - v_B}{h} z = v + \beta z.$$

Деформации сдвига среднего слоя будут равны:

$$\gamma_{zx}^c = \frac{\partial u^c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{zy}^c = \frac{\partial v^c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Касательные напряжения с учетом деформаций ползучести примут вид:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}^c &= G_3 (\gamma_{zx}^c - \gamma_{zx}^{c*}) = G_3 \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx}^{c*} \right); \quad \tau_{zy}^c = G_3 (\gamma_{zy}^c - \gamma_{zy}^{c*}) \\ &= G_3 \left(\beta + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{zy}^{c*} \right), \end{aligned}$$

где G_3 — модуль сдвига заполнителя, γ_{zx}^{c*} , γ_{zy}^{c*} — деформации ползучести.

Поперечные силы выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_x &= \tau_{zx}^c h = G_3 h \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx}^{c*} \right); & Q_y &= \tau_{zy}^c h \\ &= G_3 h \left(\beta + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{zy}^{c*} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Вводя функцию перемещений $F = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}$ из уравнения (3) получим:

$$F = -\nabla^2 w + \frac{1}{h G_3} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial \gamma_{zx}^{c*}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}^{c*}}{\partial y}. \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (8)$$

С учетом (2) для поперечных сил можно записать:

$$Q_x = D \nabla^2 \alpha; \quad Q_y = D \nabla^2 \beta. \quad (5)$$

Уравнение равновесия в проекциях на нормаль к деформированной поверхности [3]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + 2t \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q = 0. \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражения для поперечных сил (5), получим:

$$\frac{D}{2t} \nabla^2 F = -\frac{q}{2t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

где Φ — функция напряжений, $\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$.

Из уравнений (4) и (5) получим:

$$F = -\nabla^2 w + \frac{D}{G_3 h} \nabla^2 F + \frac{\partial \gamma_{zx}^{c*}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}^{c*}}{\partial y}. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) можно свести к одному уравнению, исключив функцию F :

$$\frac{D}{2t} \nabla^4 w = \left(1 - \frac{D}{G_3 h} \nabla^2 \right) \left(\frac{q}{2t} + L(w, \Phi) \right) + \frac{D}{2t} \nabla^2 \left(\frac{\partial \gamma_{zx}^{c*}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}^{c*}}{\partial y} \right), \quad (9)$$

где $L(w, \Phi)$ — дифференциальный оператор, равный:

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Уравнение совместности деформаций имеет вид [3]:

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w). \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) образуют систему дифференциальных уравнений изгиба трехслойной гибкой пластинки при ползучести. При малых проги-

бах можно положить $\Phi = 0$. Тогда при $q = const$ уравнение (9) примет вид:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} + \nabla^2 \left(\frac{\partial \gamma_{zx}^{c*}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}^{c*}}{\partial y} \right). \quad (11)$$

При отсутствии деформаций ползучести уравнение (11) совпадает с уравнением Софи Жермен, из чего напрашивается вывод о том, что деформации заполнителя не влияют на прогиб трехслойной пластинки. Однако граничные условия для уравнения (11) отличаются от граничных условий для однослойной пластинки. Если пластинка шарнирно оперта по контуру, то граничные условия запишутся в виде: $w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\frac{q}{G_3 h'}$, где n — нормаль к грани.

Как показывает расчет, деформации заполнителя могут влиять на прогиб больше, чем деформации несущих слоев. Более того, при условии $\frac{G_3 l^2}{E h t} \leq 0.5$ можно без существенного ущерба для точности результатов, определять прогибы и напряжения в заполнителе в предположении, что $u^e = u^h = v^e = v^h = 0$ [5]. Пренебрегая влиянием несущих слоев на прогиб, можно получить разрешающие уравнения метода конечных элементов.

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент с размерами $a \times b$ (рис. 2).

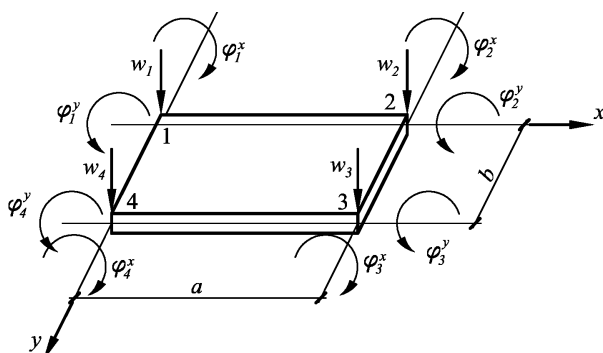


Рисунок 2 - Прямоугольный изгибаемый элемент

В каждом узле такого элемента имеется 3 степени свободы: прогиб w_i и 2 угла поворота φ_i^x и φ_i^y . В качестве функции, аппроксимирующей прогиб, выберем полином с 12 неопределенными коэффициентами по общему числу возможных перемещений в элементе:

$$w(x) = f_1 + f_2 x + f_3 y + f_4 x^2 + f_5 y^2 + f_6 xy + f_7 x^2 y + f_8 x y^2 + f_9 x^3 + f_{10} y^3 + f_{11} x^3 y + f_{12} x y^3 = \{ 1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy \ x^2 y \ xy^2 \ x^3 \ y^3 \ x^3 y \ xy^3 \} \{ f \}. \quad (12)$$

Дифференцируя (12), получим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \{ 0 \ 1 \ 0 \ 2x \ 0 \ y \ 2xy \ y^2 \ 3x^2 \ 0 \ 3x^2y \ y^3 \} \{f\};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \{ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2y \ x \ x^2 \ 2xy \ 0 \ 3y^2 \ x^3 \ 3y^2x \} \{f\}.$$

Локальный вектор узловых перемещений связан с вектором коэффициентов следующим образом:

$$\{U\}^{(e)} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_1^x \\ \varphi_1^y \\ w_2 \\ \varphi_2^x \\ \varphi_2^y \\ w_3 \\ \varphi_3^x \\ \varphi_3^y \\ w_4 \\ \varphi_4^x \\ \varphi_4^y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a & a^2 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 1 & a & b & a^2 & b^2 & ab & a^2b & ab^2 & a^3 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & b & 2ab & b^2 & 3a^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2b & a & a^2 & 2ab & 0 & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 1 & 0 & b & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{pmatrix} = [C] \cdot \{f\}.$$

Тогда $\{f\} = [C]^{-1} \cdot \{U\}^{(e)}$.

Потенциальная энергия деформации запишется в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\tau\}^T \{\gamma^{el}\} dV,$$

где $\{\tau\} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$ — вектор касательных напряжений в заполнителе; $\{\gamma^{el}\} =$

$\begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{pmatrix}$ — вектор упругих деформаций в заполнителе; $\begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Касательные напряжения в заполнителе определяются следующим образом:

$$\{\tau\}^T = \{\gamma^{el}\}^T [D] = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{pmatrix}^T \right) \cdot [D] \tag{13}$$

$$= (\{U\}^T [C]^{-1T} [B]^T - \{\gamma^*\}^T) \cdot [D],$$

где $[D] = G_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 2xy & y^2 & 3x^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & x^2 & 2xy & 0 & 3y^2 & x^3 & 3y^2x \end{bmatrix}.$$

С учетом (13) потенциальная энергия деформации примет вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} h \int_0^a \int_0^b (\{U\}^T [C]^{-1T} [B]^T [D] - \{\gamma^*\}^T [D]) \cdot ([B][C]^{-1}\{U\} - \{\gamma^*\}) dydx \\ &= \frac{1}{2} h \{U\}^T [C]^{-1T} \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dydx \cdot [C]^{-1} \{U\} \\ &\quad - \{U\}^T [C]^{-1T} h \int_0^a \int_0^b [B]^T dydx \cdot [D] \cdot \{\gamma^*\} \\ &\quad + \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b \{\gamma^*\}^T [D] \{\gamma^*\} dydx. \end{aligned}$$

Минимизируя потенциальную энергию по узловым перемещениям, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} &= h [C]^{-1T} \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dydx \cdot [C]^{-1} \{U\} \\ &\quad - [C]^{-1T} h \int_0^a \int_0^b [B]^T dydx \cdot [D] \cdot \{\gamma^*\} = [K] \cdot \{U\} - \{F^*\}, \end{aligned}$$

где $[K] = h [C]^{-1T} \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dydx \cdot [C]^{-1}$ — матрица жесткости; $\{F^*\}$ — вклад деформаций ползучести в вектор нагрузки.

Матрица жесткости при расчете с учетом ползучести не отличается от упругой. После интегрирования получим:

$$= G_3 h \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} & 0 & -\frac{b^2}{12} & \frac{b}{2} & 0 & \frac{b^2}{12} & \frac{b}{2} & 0 & -\frac{b^2}{12} & -\frac{b}{2} & 0 & \frac{b^2}{12} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{a^2}{12} & 0 & -\frac{a}{2} & \frac{a^2}{12} & 0 & \frac{a}{2} & -\frac{a^2}{12} & 0 & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{12} & 0 \end{bmatrix}^T \{\gamma^*\}.$$

Была решена задача для шарнирно опертой по контуру пластинки размерами 3×3 м, загруженной равномерно распределенной по площади нагрузкой $q = 2$ кПа при следующих исходных данных: $h = 80$ мм, $t = 1.5$ мм, $G_3 = 2.5$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Для такой пластинки $\frac{G_3 l^2}{Eht} = 0.94$.

В качестве уравнения связи деформаций и напряжений был выбран следующий закон деформирования:

$$G_3 \gamma_i = \tau_i + \int_{-\infty}^t \tau_i K(t - \tau) d\tau, \quad i = (xz, yz). \quad (14)$$

Ядро ползучести было принято в виде:

$$K(t - \tau) = C_3 e^{-\alpha_3(t-\tau)}; \quad C_3 = \alpha_3 = 0.077 \frac{1}{\text{час}}$$

При таком ядре уравнение (14) может быть представлено в дифференциальной форме:

$$G_3 \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} + G_3 \alpha_3 \gamma_i = \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + (\alpha_3 + c_3) \tau_i.$$

Представив полные деформации сдвига в виде суммы упругих деформаций и деформаций ползучести: $\gamma_i = \frac{\tau_i}{G_3} + \gamma_i^*$, можно получить выражения для скоростей изменения деформаций ползучести:

$$\frac{\partial \gamma_i^*}{\partial t} = \frac{c_3}{G_3} \tau_i - \alpha_3 \gamma_i^*. \quad (15)$$

Для определения деформаций ползучести в каждый момент времени применяется линейная аппроксимация [7].

На рис. 3 показан график роста прогиба в центре пластинки. Штриховой линии соответствует решение с учетом деформации обшивок, сплошной — решение только с учетом работы заполнителя на сдвиг. При $t = 0$ прогибы отличаются на 8.8%, а при $t \rightarrow \infty$ — на 3.12%.

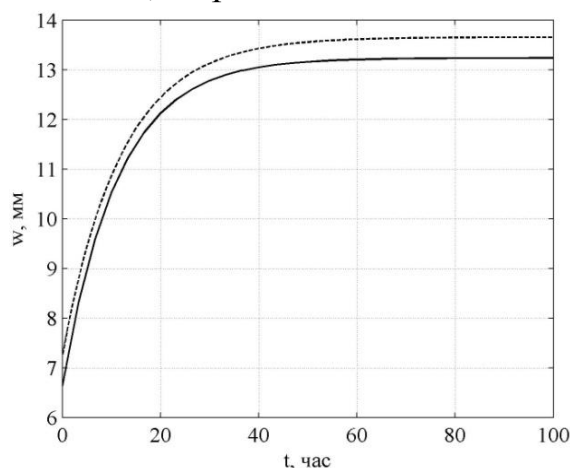


Рисунок 3 - График роста прогиба в центре пластинки

Как показал расчет, если не учитывать работу несущих слоев, то касательные напряжения в заполнителе при таком законе деформирования в процессе ползучести остаются постоянными.

Для проверки правильности решения исследуем уравнение (15) при $t \rightarrow \infty$. Так как ползучесть затухает, то скорости роста деформаций ползучести при $t \rightarrow \infty$ равны нулю: $\frac{c_3}{G_3} \tau_i - \alpha_3 \gamma_i^* = 0$, откуда можно найти предельную величину неупругой деформации:

$$\gamma_{i,пред}^* = \frac{c_3}{\alpha_3} \frac{\tau_i}{G_3} = \frac{c_3}{\alpha_3} \gamma_i^{el}.$$

Если $c_3 = \alpha_3$, то $\gamma_{i,пред}^* = \gamma_i^{el}$, значит общая деформация в конце процесса ползучести в два раза больше упругой, следовательно, прогиб должен вырасти в 2 раза, что подтверждает рис. 3.

Выводы

Преимущество предложенного метода заключается в том, что он позволяет рассчитывать на ползучесть пластинку любой конфигурации, в том числе с проемами и отверстиями. Кроме того, как правило, продольные края реальных трехслойных панелей снабжены упругими ребрами или специальным обрамлением, учесть работу которого можно только при помощи метода конечных элементов.

Библиографический список:

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. – 680с.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Изд-во Технико-теоретической литературы, 1956 - 419с.
4. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. М.: Наука, 1970. – 482 с.
5. Мартемьянов В.И. Осетинский Ю.В. Трехслойные строительные конструкции. Учебное пособие. Ростов-на-Дону, Рост. инж.-строит. ин-т, 1977. – 109 с.
6. Осетинский Ю.В. Ползучесть полой трехслойной оболочки//Облегченные конструкции покрытий зданий. Сборник статей. Ростов-на-Дону, 1976, с.62-77.
7. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Chepurnenko Anton S. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep//Advanced Materials Research Vol. 900, 2014 – p. 707-710. Trans Tech Publications, Switzerland.
8. Гаврилов А.К., Осетинский Ю.В. Расчет трехслойной пластинки с учетом ползучести среднего слоя//Расчет оболочек и пластин: Сб. научн. тр. Ростов-на-Дону, 1975. – с. 85-90.
9. Garrido M., Correia J., Branco F. Creep behavior of sandwich panels with rigid polyurethane foam core and glass-fibre reinforced polymer faces: Experimental tests and analytical modeling//Journal of Composite Materials. – 2013. – с. 21-28.