

5. Клячко М.А. Состояние и проблемы методологии и техники анализа и контроля сейсмического риска на урбанизированных территориях // Сейсмостойкое строительство. - №2, 1999. - с. 15-18.
6. Шахраманян М.А. Оценка сейсмического риска и прогноз последствий землетрясений в задачах спасения населения. - М. :ВНИИ ГОЧС, 2000. - 190с.
7. Свод правил СП 14.13330.2011 "Строительство в сейсмических районах." Актуализированная редакция СНиП II - 7 - 81\* . - М. :Минрегион России, 2010. - 83с.
8. Абакаров А.Д., Курбанов И.Б. Методика экспресс оценки технического состояния зданий в сейсмических районах // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. - №2, 2007. – с. 34-36.
9. Лычев А.С. Надежность строительных конструкций. Учебное пособие. – М. : АСВ, 2008. – 184с.
10. Кофф Г.Л. Сейсмический риск ущерба от землетрясений и проблемы его оценки и снижения // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. - №5, 2000. – с. 25-28.

**УДК 624.74:624.075**

*Агапов В.П., Васильев А.В., Айдемиров К.Р.*

#### **УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОЛОНН ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

*Agapov V.P., Vasiljev A.V., Aidemirov K. R.*

#### **THE ACCOUNT OF MATERIALS NONLINEARITY IN FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE COLUMNS OF RECTANGULAR CROSS SECTIONS**

*Описывается способ учета нелинейности деформирования бетона и арматуры и трещинообразования в бетоне при расчете железобетонных колонн прямоугольного сечения методом конечных элементов. Колонна составляется из объемных шестигранных элементов, моделирующих бетон, и стержневых элементов, моделирующих арматуру, при этом колонна рассматривается как суперэлемент, характеристики которого приводятся к узлам, лежащим на торцах колонны. Диаграммы деформирования бетона и арматуры принимаются в соответствии с действующими строительными нормами.*

**Ключевые слова:** железобетон, строительные конструкции, колонны прямоугольного сечения, метод конечных элементов, суперэлемент, физическая нелинейность.

*The way of the account of nonlinearity of deformation of concrete and reinforcement bar and cracking in concrete in finite element analysis of reinforced concrete columns of rectangular section is described. The column is made from solid eight nodes elements modelling concrete, and the rod elements modelling reinforcement bar, thus the column is considered as a superelement which characteristics are resulted in the nodes laying at end faces of a column. Diagrams of deformation of concrete and armature are accepted according to working building norms. The superelement developed was implemented into finite element program PRINS, and consisting of this program can be used for physically nonlinear analysis of building structures, containing the reinforced concrete columns of rectangular cross section.*

**Key words:** building structures, reinforced concrete columns of the rectangular cross section, finite element method, superelement, physical nonlinearity, step-by-step method.

Одной из наиболее сложных проблем расчета железобетонных колонн, входящих в состав сложных пространственных конструкций, методом конечных элементов является учет нелинейности деформирования бетона и арматуры и трещинообразования в бетоне. Исследованию нелинейного поведения бетона и железобетона посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных ученых. Наиболее значительные результаты в области теории железобетона в нашей стране были получены во второй половине XX века [1-3]. Они носили в основном теоретический характер и, к сожалению, были мало связаны с интенсивно развивавшимся в те годы прикладным методом конечных элементов. Исследования же иностранных специалистов, напротив, носили в основном прикладной характер и были направлены на создание численных методик, в частности, в рамках метода конечных элементов [4-6]. Это привело к тому, что в нашей стране в настоящее время нет ни одной отечественной программы метода конечных элементов, в которой были бы реализованы нелинейные расчеты железобетонных конструкций в двух- и трехмерной постановке.

Настоящее исследование преследует цель способствовать сокращению указанного отставания. Для достижения указанной цели авторы отказались от гипотезы плоских сечений и взяли на вооружение успешно апробированную [7-8] и реализованную в вычислительном комплексе ПРИНС [9] модель колонны прямоугольного сечения, предназначенную для линейных и физически нелинейных расчетов таких колонн в составе пространственных конструкций с использованием

объемных конечных элементов и суперэлементной технологии. Суперэлемент, описанный в работе [8], предназначался для физически нелинейного расчета колонн, выполненных из однородного материала. В данной работе этот элемент модернизирован с целью использования его в расчетах железобетонных колонн с учетом нелинейности деформирования бетона и арматуры и трещинообразования в бетоне.

Расчет физически нелинейных конструкций с помощью ВК ПРИНС ведется шагово - итерационным способом [1] по уравнению:

$$K_{NL}\Delta u = \Delta P, \quad (1)$$

где  $K_{NL}$  – полная нелинейная матрица жесткости, связывающая приращения узловых сил и перемещений,  $\Delta u$  и  $\Delta P$  – приращения узловых перемещений и узловых сил конечно-элементной модели, соответственно.

Ввиду того, что матрица  $K_{NL}$  зависит от полных значений напряжений в элементах конструкции, а, следовательно, и от полных значений перемещений, уравнение (1) может быть решено лишь приближенно. Запишем это уравнение в виде:

$$K_{NL}\Delta u = (K_0 + \Delta K)\Delta u = \Delta P, \quad (2)$$

где  $K_0$  – матрица жесткости, вычисляемая в начале шага нагружения с использованием тех или иных физических уравнений. Если обозначить через  $K_1$  матрицу жесткости, вычисляемую при тех же предпосылках в конце шага нагружения, то приближенно матрицу  $K_{NL}$  можно вычислить, как полусумму матриц  $K_0$  и  $K_1$ .

Уравнение (2) решается итерационным способом:

$$K_0\Delta u_i = \Delta P - \Delta K_{i-1}\Delta u_{i-1} \quad (3)$$

где  $i$  – номер итерации.

Использование линеаризованных уравнений на шаге нагружения приводит к нарушению условий равновесия. Поэтому в конце каждого шага нагружения вычисляется вектор  $P_\sigma$  узловых сил, статически эквивалентный полным значениям внутренних напряжений, находится вектор невязки как разность между полным вектором внешней нагрузки  $P$  и вектором  $P_\sigma$  и решение корректируется с учетом этой невязки.

Матрица жесткости  $K$  для отдельного объемного конечного элемента, входящего в состав суперэлемента, находится по приведенной ниже формуле из [9]:

$$K = \int_V B^T C B dV, \quad (4)$$

где  $B$  – матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений,  $C$  – матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций.

Вектор узловых нагрузок конечного элемента находится из соотношения:

$$f = - \int_{V} N^T p dV, \quad (5)$$

где  $N$  – матрица функций формы, выражающая перемещения внутренних точек конечных элементов с узловыми перемещениями,  $p$  – вектор, составленный из компонентов распределенной нагрузки.

Методика вычисления геометрической матрицы  $B$  хорошо известна и описана, например, в [9].

При построении физической матрицы для бетона авторы исходили из следующих предпосылок.

Физическая матрица  $C$  для бетона строится следующим образом. На первом шаге нагружения и на первой итерации материал считается изотропным и линейным. Матрица  $C$  при этом содержит коэффициенты обобщенного закона Гука и имеет следующий вид:

$$[C_e] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ сим & мет & рич & но & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

На последующих шагах нагружения бетон в сжатой зоне предполагается нелинейно-упругим вплоть до достижения предела прочности. Зависимость между приращениями напряжений и деформаций устанавливается при этом с помощью касательного модуля, определяемого по трехлинейной диаграмме состояния бетона в сжатой зоне, рекомендуемой действующими строительными правилами [10].

Зависимость между напряжениями и деформациями в растянутой зоне принимается линейной до возникновения трещины. Момент возникновения трещины фиксируется по главным напряжениям. При возникновении трещины модуль упругости в направлении, перпендикулярном трещине, принимается равным нулю, а модули сдвига в направлении, параллельном трещине, корректируются в соответствии с

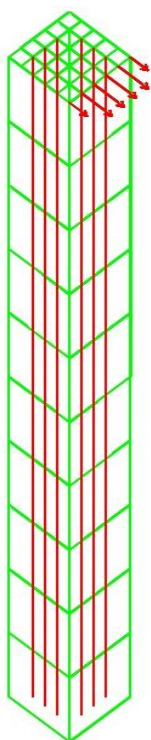
рекомендациями, приведенными в работе [5]. Использованные рекомендации учитывают агрегатное взаимодействие в зоне трещины, нагельный эффект и другие факторы, влияющие на работу треснувшего бетона на сдвиг.

Нормальные напряжения в направлении трещины обнуляются. Перераспределение напряжений, обусловленное трещинами, учитывается по способу дополнительной нагрузки, которая находится как разность между вектором внешней нагрузки и узловым эквивалентом внутренних напряжений.

Физические уравнения при возникновении трещины формируются сначала в главных осях, а затем пересчитываются к глобальным осям. Физические уравнения для арматуры принимаются на основе диаграммы Прандтля по методике, описанной в работе [9].

Описанный выше конечный элемент реализован в ВК ПРИНС.

Для проверки работоспособности разработанного элемента рассчитана отдельно стоящая заземленная понизу железобетонная колонна, нагруженная на свободном конце сосредоточенными поперечными силами, равнодействующая которых  $P = k \times 50$  кН, где  $k$  – параметр нагрузки. Разбивка на элементы и нагружение колонны показаны на рис.1.



Нагрузка прикладывалась по шагам, вплоть до разрушения. Момент разрушения фиксировался по началу расхождения итерационного процесса и появлению больших перемещений.

Высота колонны принималась равной 4 м, размер стороны поперечного сечения равнялся 40 см. Колонна имела 12 арматурных стержней, площадью сечения  $2 \text{ см}^2$  каждый. Расположение арматурных стержней по сечению колонны показано на рис.2.

Материалы, из которых выполнена колонна, имели следующие характеристики: модуль упругости бетона  $E_b = 3,25 \times 10^7$  КПа, предел прочности бетона на сжатие  $R_b = 17$  МПа, предел прочности бетона на растяжение  $R_{bt} = 1,15$  МПа, модуль упругости арматуры  $E_a = 2 \times 10^8$  КПа, предел прочности арматуры  $R_s = 355$  МПа, коэффициент Пуассона бетона  $\nu = 0,2$ . Диаграммы деформирования бетона и арматуры приведены на рис.3 и 4, соответственно.

Рисунок 1 - Разбивка на элементы

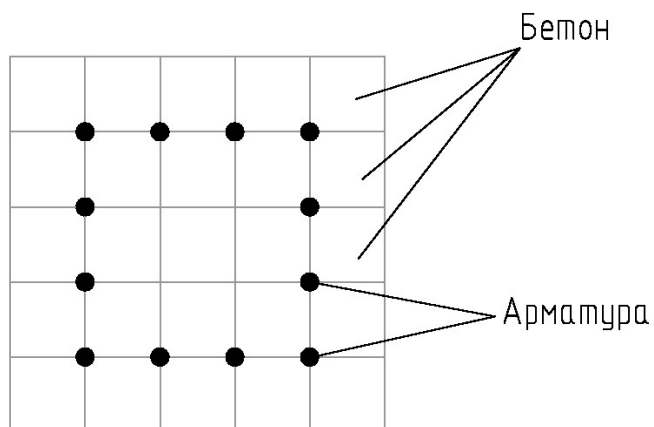


Рисунок 2 -Сечение колонны нагружение колонны

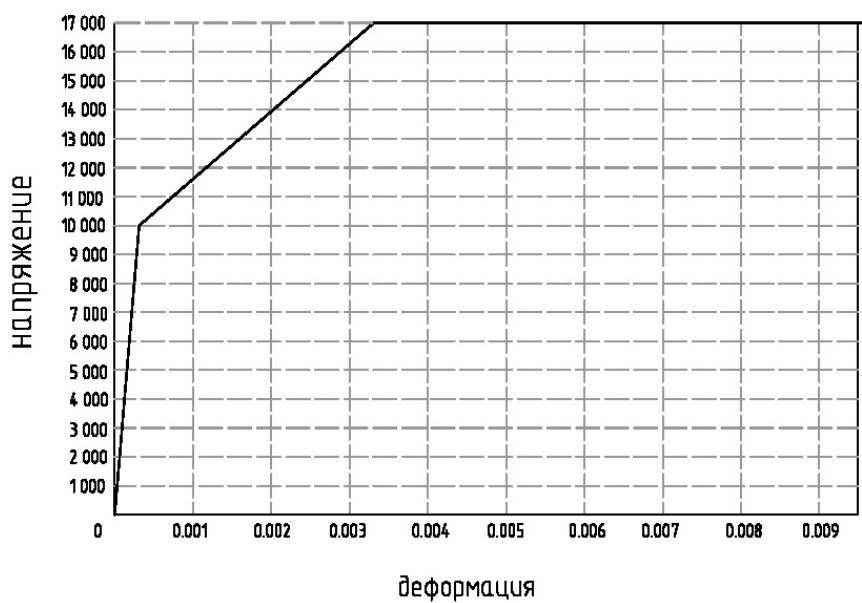


Рисунок 3 - Диаграмма состояния сжатого бетона

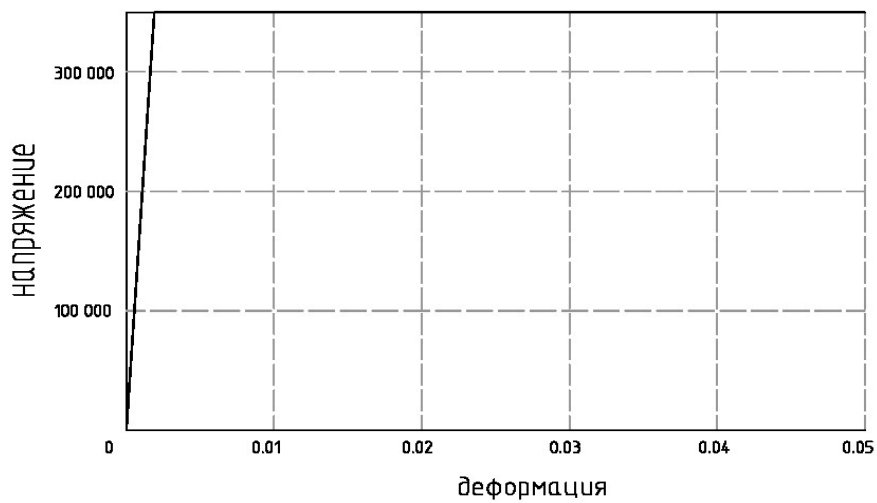
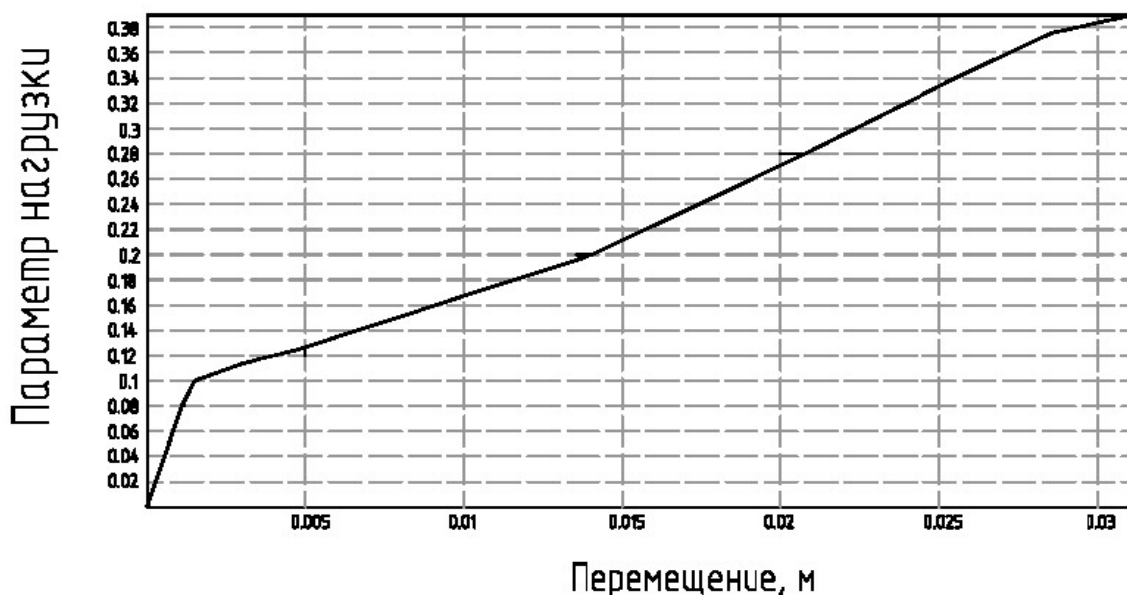


Рисунок 4 - Диаграмма состояния арматуры



**Рисунок 5** - Диаграмма равновесных состояний колонны

На рис.5 приведена диаграмма равновесных состояний, построенная по результатам расчета по программе ПРИНС. При параметре нагрузки равном 0,3875 матрица жесткости конструкции вырождалась, что фиксировалось в процессе вычислений. Это соответствовало нагрузке  $P = 0,3875 \times 50 \text{ кН} = 19,375 \text{ кН}$  или моменту в заделке, равному 77,5 кН×м. Для оценки полученного результата было найдено предельное значение момента в заделке по методике, изложенной в работе [10] для оценки прочности нормальных сечений (см. пункт 6.2.14, стр.14). При принятых характеристиках бетона и арматуры и симметричном армировании найдено значение  $M_{пред} = 79,5 \text{ кН} \times \text{м}$ .

Расхождение между двумя результатами составляет 2,59%, что свидетельствует о достоверности предложенной и реализованной в программном комплексе ПРИНС методики.

Таким образом, предложенный способ учета нелинейности деформирования железобетонных колонн обеспечивает приемлемую точность результатов и может быть рекомендован для практического использования.

#### **Библиографический список:**

1. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. - М., Стройиздат, 1974. - 316 с.
2. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. - М., Стройиздат, 1996. - 396 с.

3. Гениев Г.А., Колчунов В.И., Ключева Н.В., Никулин А.И., Пятикрестовский К.П. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях. - АСВ, Москва, 2004. - 216 с.
4. Chen W.F. *Plastisity in Reinforced Concrete*. - J.Ross Publishing, 2007. - 463 p.
5. Gedolin L., Deipoli S. Finite element studies of shear-critical R/C beams// *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*. Vol. 103, N EM3, pp. 395-410, June, 1977.
6. K.J. Bathe and P.M. Wiener. "On Elastic-Plastic Analysis of I-Beams in Bending and Torsion"// *Computers and Structures*, Vol. 17, pp. 711-718, 1983.
7. Агапов В.П., Васильев А.В. Моделирование колонн прямоугольного сечения объемными элементами с использованием суперэлементной технологии // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. - М., Изд-во РУДН, № 4, 2012.
8. Агапов В.П., Васильев А.В. Суперэлемент колонны прямоугольного сечения с физической нелинейностью// *Вестник МГСУ*, №5, 2013.
9. Агапов В.П. Исследование прочности пространственных конструкций в линейной и нелинейной постановках с использованием вычислительного комплекса «ПРИНС». - *Пространственные конструкции зданий и сооружений (исследование, расчет, проектирование, применение)*. – Сб. статей, вып. 11 // МОО «Пространственные конструкции», под ред. В. В. Шугаева и др. – М., 2008, с. 57-67.
10. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. СП 52-101-2003. - Москва, 2005.