

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 681.21

Кадиев И.П., Кадиев П. А.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Kadiev I.P., Kadiev P.A.

ABOUT ONE CLASS OF COMBINATORY CONFIGURATIONS

В статье предложен класс комбинаторных конфигураций, построенных на основе $n \times n$ – матриц, определенные авторами как «циркулянты матрицы», предложены методы формирования, определено возможное число конфигураций и приведены некоторые их свойства.

Ключевые слова: комбинаторика, конфигурация, множества, матрица, циркулянт матрицы.

The articles descry a new class combinatory configurations - circulate of matrixes and methods them formed.

Key words: class configurations, circulate, matrixes.

Для последних десятилетий характерен рост интереса к разделу математики, известному как комбинаторика. Это объясняется расширением областей ее применения при моделировании и исследований различных явлений и процессов.

Одной из базовых задач комбинаторной математики является создание и исследование свойств комбинаторных комбинаций, под которыми понимается любая система подмножеств конечного множества произвольной природы или, в общем случае, система подмножеств совокупности конечных множеств.

Задачи комбинаторики главным образом сводятся к изучению правил построения конфигураций, взаимного расположения подмножеств элементов в них и определению количества возможных конфигураций этого класса.

К числу наиболее распространенных комбинаторных конфигураций можно отнести – подмножества, образованные из элементов конечных множеств типа перестановки, подстановки, сочетания и размещения элементов этих множеств.

В данной работе в качестве исходного объекта, на основе которого строятся комбинаторные конфигурации, рассматривается, в отличие от выше указанных, не одно конечное множества и конфигурации, составленные на ее основе, а $n \times n$ - матрицы, строки (или столбцы) которых являются множествами, образованными из n элементов (n - множества).

Ставится задача создания комбинаторных конфигураций в виде матриц путем преобразования исходных, которые обладают теми или иными свойствами, определение правил их построения и их количества.

В комбинаторике принято различать три основных класса задач существования комбинаторных конфигураций.

К первому классу относятся задачи **существования и построения**. В них существование конфигураций, удовлетворяющих заданным требованиям, находятся под вопросом. Требуется их построить, предложить способы их формирования. К ним относятся задачи подстановки, и часто они связаны с формированием конфигураций в виде матриц, образованных из элементов конечного множества или конечных множеств, строки и столбцы которых являются перестановками элементов исходных конечных множеств.

Задачи второго класса известны как **перечислительные**. В них существование интересующей исследователя конфигурации не вызывает сомнения, неясен вопрос об их количестве. Примерами таких задач являются классические задачи о сочетаниях и размещениях элементов множеств.

Задачи **выбора**, в которых интересующие исследователя конфигурации заведомо существуют и ищутся связанные с ними конфигурации, удовлетворяющие дополнительным требованиям.

Поставленная в данной работе задача может быть отнесена к третьему классу. Конфигурации в виде $n \times n$ – матриц, строки которых представляют n – множества, известны, ищутся матричные конфигурации, которые могут быть построены на их базе.

В работе предлагаются три матричные конфигурации, правила их формирования и определено возможное количество конфигураций каждого типа.

В конфигурациях первого типа в каждом столбце матрицы располагаются один и только один элемент из каждого столбца и каждой строки исходной $n \times n$ – матрицы. Индексы этих элементов принимают, не повторяясь, значения от 1 до n .

Для формирования конфигурации, обладающей указанными выше свойствами, необходимо в исходной матрице каждую i – ую) строку ($i=1,n$) сдвинуть циклически в одну и ту же сторону на $(i-1)$ позицию. Это свойство полученной конфигурации сохраняется при любых перестановках столбцов. Общее число конфигураций, обладающих этим свойством, равно $n!$.

В качестве примера ниже приведена конфигурация A^* , обладающая указанными выше свойствами, сформированная на базе матрицы

$A_{5 \times 5}$ путем сдвига ее строк по указанному выше алгоритму.

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} \quad A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{21} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{31} & A_{32} \\ A_{44} & A_{45} & A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{55} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix}$$

Если в исходной матрице выполнить сдвиги по столбцам, каждый

j –ый столбец сдвинуть в одну и ту же сторону на $(j-1)$ –у позицию, то формируется конфигурация второго типа, в которой указанными свойствами обладают строки конфигурации: в каждой строке один и только один элемент из строк и столбцов исходной матрицы и значения индексов элементов строк принимают, не повторяясь, значения от 1 до n . Это свойство сохраняется при любых перестановках строк полученной конфигурации. Общее число перестановок, определяющих общее число конфигурации указанного типа, равно числу перестановок строк - $n!$.

Для приведенной выше матрицы $A_{5 \times 5}$ сформированная по приведенному алгоритму конфигурация A^{**} имеет вид:

$$A^{**} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{44} & A_{55} \\ A_{21} & A_{32} & A_{43} & A_{54} & A_{15} \\ A_{31} & A_{42} & A_{53} & A_{14} & A_{25} \\ A_{41} & A_{52} & A_{13} & A_{24} & A_{35} \\ A_{51} & A_{12} & A_{23} & A_{34} & A_{45} \end{vmatrix}$$

Конфигурации третьего типа обладают свойствами, присущими конфигурациям обеих рассмотренных выше типов. Для формирования конфигурации третьего типа необходимо последовательно выполнить указанные выше операции сдвиги по строкам и столбцам. В полученной конфигурации в каждой строке и в каждом столбце будет один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца исходной конфигурации - $n \times n$ – матрицы, оба индекса элементов строк и столбцов будут принимать, не повторяясь, значения от 1 до n .

Для приведенной выше матрицы $A_{5 \times 5}$ сформированная по приведенному алгоритму конфигурация $A_{лк}$ имеет вид:

$$A_{лк} = \begin{vmatrix} A_{11}A_{23}A_{35}A_{42}A_{54} \\ A_{22}A_{34}A_{41}A_{53}A_{15} \\ A_{33}A_{45}A_{52}A_{14}A_{21} \\ A_{44}A_{51}A_{13}A_{25}A_{32} \\ A_{55}A_{12}A_{24}A_{31}A_{43} \end{vmatrix}$$

Эти свойства конфигурации типа $A_{лк}$ остаются неизменными при любых перестановках ее строк и столбцов. Общее число таких конфигураций и число таких перестановок этого типа равно $n! (n-1)!$.

Комбинаторной конфигурацией, образованной из элементов конечного множества, близкой по способу построения к предлагаемой в работе, является циркулянтная матрица или просто циркулянт [1].

Циркулянт конечного множества представляет собой матрицу, строки которой являются перестановками элементов только одного конечного множества. Каждая строка этой конфигурации получается из расположенной сверху строки циклическим сдвигом ее элементов в одном и том же направлении на одну позицию.

Ниже, в качестве примера, приведен циркулянт $A_{ц}$ конечного множества

$$A = (A_1A_2A_3A_4A_5).$$

$$A_{ц} = \begin{vmatrix} A_1A_2A_3A_4A_5 \\ A_2A_3A_4A_5A_1 \\ A_3A_4A_5A_1A_2 \\ A_4A_5A_1A_2A_3 \\ A_5A_1A_2A_3A_4 \end{vmatrix}$$

Предлагаемые выше конфигурации являются обобщением принципов построения циркулянтов на множествах, которые могут быть представлены в виде строк матрицы. Последние могут рассматриваться как конфигурации, каждая строка которых является n -множеством. Поэтому предлагаемые конфигурации могут рассматриваться, в отличие от циркулянтных матриц, как *циркулянты матриц*. При этом можно различать «*строчные циркулянты матрицы*», образованные сдвигами строк матрицы, «*столбцевые циркулянты матрицы*», образованные сдвигами столбцов матрицы и «*полные циркулянты матрицы*», образованные сдвигами в последовательности «строки-столбцы» или «столбцы-строки» по приведенным выше алгоритмам.

При выборе сдвигов в порядке «строки – столбцы» образуются конфигурации транспонированные по отношению к конфигурациям, построенным в последовательности сдвигов «столбцы-строки», и наоборот.

Как отмечалось выше, из приведенных выше комбинаторных конфигураций путем перестановок строк, столбцов или тех и других могут быть сформированы указанное выше количество конфигураций, обладающих теми же свойствами. Так, например, путем перестановок строк и столбцов можно сформировать конфигурации с расположением любого из элементов $n \times n$ – матрицы на любом из $n \times n$ мест в формируемой конфигурации.

Это обстоятельство позволяет отметить, что приведенные выше алгоритмы позволяют формировать **базовые** или **производящие конфигурации**.

Следует отметить, что приведенные выше базовые комбинаторные конфигурации могут быть получены и по другим алгоритмам, отличным от сдвиговых. Так, расположив любой из элементов исходной матрицы на любой из $n \times n$ позиций, при известном значении первого индекса этого элемента, первый индекс следующего за ним элемента в этой же строке на единицу больше, а второй индекс на две единицы больше. Если первый индекс элемента строки равен числу элементов в множествах – n , то первый индекс следующего элемента в строке по циклу равен 1, второй индекс этого элемента при равенстве второго индекса предшествующего элемента $(n-1)$ равен 1, а при индексе равном n , равен 2. Пользуясь этим правилом, могут быть определены все элементы этой строки. Индексы элемента в столбце стоящего ниже рассматриваемого элемента определяются прибавлением к индексам вышестоящего элемента единицы. Если при прибавлении получается число большее, чем n , то индекс принимается равным единице. Индексация элементов строк и столбцов выполняется по циклам в одном и том же направлении: в строках слева направо, в столбцах – сверху вниз. В качестве характеристик предлагаемых классов конфигураций, отражающих указанные выше свойства, может быть предложена таблица инцидентности элементов и множеств, образующих строки или столбцы приведенных конфигураций.

В качестве примера ниже приведена таблица 1 инцидентности конфигураций третьего типа, являющаяся обобщением характеристик всех трех типов.

Таблица 1 - Матрица инцидентности конфигураций третьего типа

Множества - строки матрицы A	Элементы множеств A_i	Столбцы циркулянты $A_{лк}$				
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	A_{11}	1	0	0	0	0
	A_{12}	0	1	0	0	0
	A_{13}	0	0	1	0	0
	A_{14}	0	0	0	1	0
	A_{15}	0	0	0	0	1
A_2	A_{21}	0	0	0	0	1
	A_{22}	1	0	0	0	0
	A_{23}	0	1	0	0	0
	A_{24}	0	0	1	0	0
	A_{25}	0	0	0	1	0
A_3	A_{31}	0	0	0	1	0
	A_{32}	0	0	0	0	1
	A_{33}	1	0	0	0	0
	A_{34}	0	1	0	0	0
	A_{35}	0	0	1	0	0
A_4	A_{41}	0	0	1	0	0
	A_{42}	0	0	0	1	0
	A_{43}	0	0	0	0	1
	A_{44}	1	0	0	0	0
	A_{45}	0	1	0	0	0
A_5	A_{51}	0	1	0	0	0
	A_{52}	0	0	1	0	0
	A_{53}	0	0	0	1	0
	A_{54}	0	0	0	0	1
	A_{55}	1	0	0	0	0

Пусть на множестве $A = \{A_i\}_1^n$, где $A_i = (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, \dots, A_{in})$, задана конфигурация A^{**} , состоящая из подмножеств $S = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$, образующих ее строки (или столбцы). Элемент A_{ij} принадлежит подмножеству S_k , если он входит в качестве элемента в это подмножество (в соответствующую строку или столбец матрицы A_{lk}). Составим таблицу 1, в которой в качестве строк рассматриваются элементы множеств A_i , образующих строки исходной матрицы A_{ij} , общее число которых равно $n \times n$, в качестве столбцов - строки полученной конфигурации $A_{lk} - S = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$. На пересечении строки A_{ij} и столбца

S_k заносится цифра 1, если элемент A_{ij} принадлежит в конфигурации строке S_k , в противном случае - цифра 0.

В этой таблице устанавливается инцидентность элементов исходных множеств A_i и подмножеств S_k , образующих столбцы комбинаторной конфигурации – полной циркулянты матрицы A_{lk} . Для рассмотренного выше примера конфигурации A_{lk} , составленной по исходной матрице A размерности 5×5 , таблица инцидентности имеет вид, приведенный ниже.

Как видно из таблицы 1 инцидентности элементов множеств A_1-A_5 , образующих строки исходной матрицы A , и строк построенной конфигурации A_{lk} , каждый из элементов A_{ij} множеств A_1-A_5 входит в одно и только в одно из полученных подмножеств S_k , образующих строки матрицы A_{lk} , о чем свидетельствует наличие только одного символа 1 в каждой из строк.

Из столбцов матрицы инцидентности видно, что подмножества S_k включают в себя только элементы, имеющие неповторяющиеся индексы на обеих позициях.

В качестве примера практического применения предлагаемых конфигураций можно указать использование их при решении таких важных вопросов, связанных с повышением эффективности информационных процессов, как перемежение символов путем перестановки элементов двумерных информационных массивов для:

- организации скремблирования, имеющего назначением защиту информации от несанкционированного доступа;
- защиты от пачек ошибок, вызывающих стирание большой группы последовательно следующих символов в потоках данных;
- устранения статистических связей между символами источников дискретной информации с целью устранения естественной избыточности их сообщений, повышения энтропии и эффективности процессов сжатия данных, передачи и хранения информации.

При этом в качестве матриц могут рассматриваться двумерные информационные массивы. Элементами матриц могут выступать символы, группа символов (слова), цифры, числа и другие объекты, несущие информацию. Для повышения эффективности информационных процессов, связанных с решением перечисленных выше практических задач, могут быть использованы различные алгоритмы последовательности считывания элементов массивов: по строкам, по столбцам, по строкам и столбцам.

В заключение следует отметить, что разработана и получила государственную регистрацию программа формирования одного из классов предлагаемых комбинаторных конфигураций [2]. Наряду с приведенными в данной работе алгоритмами формирования конфигураций, путем сдвигов элементов строк и столбцов матрицы, в [3] авторами приведены алгоритмы, позволяющие строить эти конфигурации с расположением любого элемента исходной матрицы на любом из $n \times n$ позиций в конфигурации.

Библиографический список

1. В.Е. Тараканов Комбинаторные задачи и $(0,1)$ - матрицы. М.; Наука, 1985, с.193
2. П. А. Кадиев, М. З. Зейналов Программа преобразования матриц методом латинских квадратов. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2009616143 от 9.11.2009г.
3. П.А.Кадиев, И.П. Кадиев, М.З. Зейналов Алгоритмы преобразования «классических» матриц в 2-х индексные латинские квадраты. Вестник ДГТУ, Технические науки, № 17, 2010, стр.93-99