4. Тотурбиев Б. Д. и др. Способ получения керамического заполнителя//Патент России № 2129105. 1995. Бюл. № 20.
5. Тотурбиев Б.Д. Черкашин В.И., Мантуров З.А., Тотурбиев А.Б. Композиция для получения теплоизоляционного материала//Патенты России: №2531079. 2014. Бюл. № 29; патент №2531078. 2014. Бюл. № 29; патент №2530935. 2014. Бюл. № 29.
6. Чантурия В.А. Прогрессивные технологии комплексной переработки минерального сырья//М.: Изд. дом «Руда и металлы», 2008, с. 5-52;
7. Черкашин В.И., Тотурбиев Б.Д. Глинистые сланцы - эффективное местное минеральное сырье для производства вяжущих//Труды Института геологии ДагНЦ РАН «Региональная геология и нефтегазоносность Кавказа», Научно-практическая конференция. Махачкала. 2012. С. 47-51.

УДК 624.011.1

Муселемов Х.М., Омаров А.О., Устарханов Т.О.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ

Muselemov Kh.M., Omarov A.O., Ustarkhanov T.O.

THE CALCULATION OF STRESS-STRAIN STATE OF THREE-LAYER BEAM TAKING INTO ACCOUNT EDGE EFFECTS

Работа посвящена расчету напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойной балки (ТБ) с учетом краевых эффектов.

В данной статье получена система дифференциальных уравнений равновесия трехслойной балки. Для решения этих уравнений необходимо знать 12 граничных условий, которые зависят от условий опирания и нагружения исследуемых трехслойных балок. Данная система уравнений решается с помощью пакета прикладных программ математического моделирования «Maple 5.4». В результате решения данной системы получаем выражения для определения деформаций и напряжений всех компонент (несущих слоев и заполнителя) трехслойной балки в любой точке при заданных условиях крепления концов балки и нагружения.

Ключевые слова: граничные условия, трехслойная цилиндрическая оболочка, трехслойная балка, несущий слой.

The work is dedicated to the calculation of the stress-strain state (SSS) of the three-layer beam (TLB) subject to boundary effects.

In this paper, a system of differential equations of equilibrium of the three-layer beam. To solve these equations, it is necessary to know the 12 boundary conditions, co-which depend on support conditions and loading of sandwich beams under study. This system of equations is solved by the application package of mathematical modeling "Maple 5.4." The solution of this system we obtain expressions for determining de-formations and stress all components (bearing layers and filler), a three-layer beam anywhere under specified conditions of fastening the ends of the beam and its loading.

Key words: boundary conditions, three-layered cylindrical shell, three-layer beam, the carrier layer.

Введение. В данной статье приводятся примеры расчета на ЭВМ напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с помощью дифференциальных уравнений равновесия трехслойной цилиндрической оболочки, полученных в работе [1]. В качестве примера рассматривается НДС трехслойной балки.

Постановка задачи. Для расчета НДС ТБ общие уравнения равновесия трехслойной цилиндрической оболочки преобразуем в общие уравнения равновесия для трехслойных балок, приравняв $R=\infty$. При этом полученные дифференциальные уравнения равновесия трехслойной балки показаны в таблице 1. В полученных уравнениях постоянные коэффициенты k_1 - k_{36} приведены в работе [1].

$u_1, u_2; w_1, w_2; v_1, v_2$ - перемещения несущих слоев в направлении осей X, Y и Z .

Таблица 1 - Уравнения равновесия трехслойной балки

	u_1	u_2	w_1	w_2	
1	$k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_2 u_1$	$k_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + k_4 u_2$	$k_5 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + k_6 \frac{\partial w_1}{\partial x}$	$k_7 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + k_8 \frac{\partial w_2}{\partial x}$	x_1
2	$k_9 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_{10} u_1$	$k_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + k_{12} u_2$	$k_{13} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + k_{14} \frac{\partial w_1}{\partial x}$	$k_{15} \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + k_{16} \frac{\partial w_2}{\partial x}$	x_2
3	$k_{17} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + k_{18} \frac{\partial u_1}{\partial x}$	$k_{19} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + k_{20} \frac{\partial u_2}{\partial x}$	$k_{21} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + k_{22} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_{33} w_1$	$k_{23} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + k_{24} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + k_{34} w_2$	z_1
4	$k_{25} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + k_{26} \frac{\partial u_1}{\partial x}$	$k_{27} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + k_{28} \frac{\partial u_2}{\partial x}$	$k_{29} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + k_{30} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_{35} w_1$	$k_{31} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + k_{32} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + k_{36} w_2$	z_2

В результате получим систему дифференциальных уравнений в частных производных 12-го порядка. Решить их в этом виде довольно сложно.

Для решения данной системы уравнений преобразуем ее в однородные уравнения 1-го порядка. Для этого обозначим неизвестные перемещения и их производные через переменные $a1 \dots a12$:

$$\left. \begin{aligned} a1 &= u1; a2 = \frac{du1}{dx}; a3 = u2; a4 = \frac{du2}{dx} = \frac{da3}{dx}; a5 = w1; \\ a6 &= \frac{dw1}{dx} = \frac{da5}{dx}; a7 = \frac{da6}{dx}; a8 = \frac{da7}{dx}; a9 = w2; \\ a10 &= \frac{dw2}{dx} = \frac{da9}{dx}; a11 = \frac{da10}{dx}; a12 = \frac{da11}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

После замены переменных система примет вид:

$$\begin{aligned} 1. & da1/dx=a2; \\ 2. & da2/dx=-g1a1-g2a3-g3a8-g4a6-g5a12-g6a10; \\ 3. & da3/dx=a4; \\ 4. & da4/dx=-g7a1-g8a3-g9a8-g10a6-g11a12-g12a10; \\ 5. & da5/dx=a6; \\ 6. & da6/dx=a7; \\ 7. & da7/dx=a8; \\ 8. & da8/dx=-d1a2-d2a4-d3a7-d4a4-d5a5-d6a9; \\ 9. & da9/dx=a10; \\ 10. & da10/dx=a11; \\ 11. & da11/dx=a12; \\ 12. & da10/dx=d7a2+d8a4+d9a7+d10a4+d11a5+d12a9, \end{aligned} \quad (2)$$

то есть, получим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно переменных $a1 \dots a12$ (табл. 2).

Решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} a1 &= C_1 e^{\lambda_{1x}} K_1^1 + C_2 e^{\lambda_{2x}} K_1^2 + C_3 e^{\lambda_{3x}} K_1^3 + \dots + C_{12} e^{\lambda_{12x}} K_1^{12} \\ a2 &= C_1 e^{\lambda_{1x}} K_2^1 + C_2 e^{\lambda_{2x}} K_2^2 + C_3 e^{\lambda_{3x}} K_2^3 + \dots + C_{12} e^{\lambda_{12x}} K_2^{12} \\ a3 &= C_1 e^{\lambda_{1x}} K_3^1 + C_2 e^{\lambda_{2x}} K_3^2 + C_3 e^{\lambda_{3x}} K_3^3 + \dots + C_{12} e^{\lambda_{12x}} K_3^{12} \\ &\dots \dots \dots \\ a12 &= C_1 e^{\lambda_{1x}} K_{12}^1 + C_2 e^{\lambda_{2x}} K_{12}^2 + C_3 e^{\lambda_{3x}} K_{12}^3 + \dots + C_{12} e^{\lambda_{12x}} K_{12}^{12} \end{aligned} \quad (3)$$

**Таблица 2 - Система дифференциальных уравнений равновесия
трехслойной балки**

	$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$A5$	$a6$	$a7$	$a8$	$a9$	$a10$	$a11$	$a12$
1	d/dx	-1										
2		d/dx	$g2$			$g4$		$g3$		$g6$		$g5$
3			d/dx	-1								
4				d/dx		$g10$		$g9$		$g12$		$g11$
5					d/dx	-1						
6						d/dx	-1					
7							d/dx	-1				
8		$d1$		$d2$	$D5$		$d3$	d/dx	$d6$		$d4$	
9									d/dx	-1		
10										d/dx	-1	
11											d/dx	-1
12		$-d7$		$-d8$	$-d11$		$-d9$		$-d12$		$-d10$	d/dx

Характерные случаи при решении полинома:

1. Число 0;

$$\lambda=0 \Rightarrow Ce^{0x}=1$$

- эти составляющие дают постоянное решение.

2. Число действительное сопряженное;

$$\lambda=\pm a \Rightarrow Ce^{\pm ax}=1$$

- эти составляющие дают чисто затухающее решение.

3. Число мнимое сопряженное;

$$\lambda=\pm bi \Rightarrow C_1 \cos(bx); C_2 \sin(bx)$$

- эти составляющие дают чисто гармоническое решение, незатухающее.

4. Число комплексное;

$$\lambda=a \pm bi \Rightarrow C_1 e^{ax} \cos(bx); C_2 e^{ax} \sin(bx)$$

- эти составляющие дают гармоническое решение, затухающее.

Данная система уравнений решается с помощью пакета прикладных программ математического моделирования «Maple 5.4».

В качестве примера рассматривалась ТБ, заземленная по кромкам, симметричной и несимметричной структуры, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой.

Симметричная ТБ (рис. 1). $t_1=t_2=0,100\text{см}$; $c=3,800\text{см}$; $l=40\text{см}$.
 Материал несущих слоев – стеклопластик, заполнитель – АМГ2-Н.
 Несимметричная ТБ (рис. 2). $t_1=0,085\text{см}$; $t_2=0,050\text{см}$; $c=3,865\text{см}$; $l=40\text{см}$;
 Материал несущих слоев – углепластик, заполнитель – АМГ2-Н

Рисунок 1 - Балка симметричного сечения с защемленными кромками при действии равномерно распределенной нагрузки

Рисунок 2 - Балка несимметричного сечения с защемленными кромками при действии равномерно распределенной нагрузки

Результаты эксперимента и их обсуждение. Результаты примера расчета трехслойных балок сравнивались с результатами экспериментальных исследований приведенных в статье [2] и показаны в таблицах 3 и 4.

Таблица 3 - Теоретические и экспериментальные значения напряжений и перемещений в несущих слоях для трехслойной балки, заземленной с обеих сторон, при нагружении равномерно распределенной нагрузкой ($t_1=t_2=0,100$ см)

Нагруз-ка q кгс/см	№ датчика	1	2	3	4	5	6
	№ слоя	2	1	2	1	2	1
q=0,5	Напряжения (кгс/см ² , $\sigma_{1,2}^{теор} = \sigma_{1,2}^{изг} + \sigma_{1,2}^{раст}$)						
	$\sigma_{1,2}^{раст}$	2,74	2,74	1,19	1,19	2,51	2,51
	$\sigma_{1,2}^{изг}$	6,11	-6,11	25,56	-25,56	32,93	-32,93
	$\sigma_{1,2}^{теор}$	8,857	-3,37	26,75	-24,37	35,44	-30,42
	$\sigma_{1,2}^{эксп}$	8,259	-3,33	24,61	-22,49	32,625	-28,63
	Расхождение (%)						
	δ	7,5	7,1	8	7,71	7,9	5,88
	Перемещения (мм)						
	$w_{1,2}^{теор}$	0,035	0,03	0,10	0,09	0,16	0,15
	$w_{1,2}^{эксп}$	0,031	0,27	0,09	0,08	0,15	0,14
q=1,5	Напряжения (кгс/см ²)						
	$\sigma_{1,2}^{раст}$	8,23	8,23	3,57	3,57	7,53	7,53
	$\sigma_{1,2}^{изг}$	18,34	-18,34	74,68	-76,68	98,78	-98,78
	$\sigma_{1,2}^{теор}$	26,57	-10,11	79,95	-67,19	104,91	-91,25
	$\sigma_{1,2}^{эксп}$	24,64	-9,371	75,686	-71,35	96,60	-84,46
	Расхождение в %						
	δ	7,2	7,4	6,6	7,1	7,7	6,9
	Перемещения (мм)						
	$w_{1,2}^{теор}$	0,15	0,13	0,51	0,46	0,56	0,49
	$w_{1,2}^{эксп}$	0,14	0,12	0,47	0,43	0,53	0,45
q=2,5	Напряжения (кгс/см ²)						
	$\sigma_{1,2}^{раст}$	13,74	13,74	5,96	5,96	12,57	12,57
	$\sigma_{1,2}^{изг}$	30,63	-30,63	128,05	-128,05	164,96	-164,96
	$\sigma_{1,2}^{теор}$	43,37	-16,88	134,05	-122,09	177,54	-152,39
	$\sigma_{1,2}^{эксп}$	40,07	-15,71	124,36	-113,26	164,22	-140,50
	Расхождение в %						
	δ	7,6	6,9	6,8	7,2	7,5	7,8
	Перемещения (мм)						
	$w_{1,2}^{теор}$	0,22	0,21	0,82	0,74	0,89	0,82
	$w_{1,2}^{эксп}$	0,20	0,19	0,76	0,69	0,82	0,75

Таблица 4 - Теоретические и экспериментальные значения напряжений и перемещений в несущих слоях для трехслойной балки, защемленной с обеих сторон, при нагружении равномерно распределенной нагрузкой ($t_1=0,085\text{см}$, $t_2=0,050\text{см}$)

Нагрузка q кгс/см	№ датчика	1	2	3	4	5	6
	№ слоя	2	1	2	1	2	1
q=0,5	Напряжения (кгс/см ² , $\sigma_{1,2}^{теор} = \sigma_{1,2}^{изг} + \sigma_{1,2}^{раст}$)						
	$\sigma_{1,2}^{раст}$	0,368	0,216	1,464	0,861	1,927	1,133
	$\sigma_{1,2}^{изг}$	11,113	-16,79	28,36	-42,33	34,77	-51,87
	$\sigma_{1,2}^{теор}$	11,48	-16,58	29,82	-41,46	36,69	-50,96
	$\sigma_{1,2}^{эксп}$	10,23	-14,92	26,62	-39,10	32,56	-44,33
	Расхождение (%)						
	δ	11,2	10,0	10,7	11,1	11,2	11,3
	Перемещения (мм)						
	$w_{1,2}^{теор}$	0,022	0,015	0,077	0,072	0,093	0,090
	$w_{1,2}^{эксп}$	0,02	0,015	0,074	0,07	0,09	0,087
q=1,5	Напряжения (кгс/см ²)						
	$\sigma_{1,2}^{раст}$	1,103	0,649	4,392	2,583	5,78	3,40
	$\sigma_{1,2}^{изг}$	33,34	-50,39	85,08	-126,98	104,3	-155,6
	$\sigma_{1,2}^{теор}$	35,44	-48,25	89,47	-123,39	110,08	-152,20
	$\sigma_{1,2}^{эксп}$	31,47	-42,86	79,18	-111,69	97,98	-135,17
	Расхождение (%)						
	δ	11,2	11,1	11,5	9,5	10,9	11,1
	Перемещения (мм)						
	$w_{1,2}^{теор}$	0,10	0,08	0,25	0,24	0,33	0,323
	$w_{1,2}^{эксп}$	0,09	0,07	0,24	0,23	0,31	0,304
q=2,5	Напряжения (кгс/см ²)						
	$\sigma_{1,2}^{раст}$	1,842	1,048	7,33	4,31	9,65	5,68
	$\sigma_{1,2}^{изг}$	55,68	-84,15	142,08	-211,07	171,18	-249,17
	$\sigma_{1,2}^{теор}$	57,522	-83,06	149,41	-206,76	180,83	-244,49
	$\sigma_{1,2}^{эксп}$	50,75	-73,34	133,58	-182,74	159,22	-216,43
	Расхождение (%)						
	δ	11,7	11,7	10,6	11,9	11,9	11,4
	Перемещения (мм)						
	$w_{1,2}^{теор}$	0,20	0,13	0,55	0,51	0,59	0,57
	$w_{1,2}^{эксп}$	0,18	0,12	0,51	0,475	0,56	0,54

Примечание: Нагружение со стороны толстого слоя

Вывод.

1. Следует отметить, что данные расчёты проведены на основе представления расчётной модели здания в виде одномассового консольного стержня с

периодом собственных колебаний до усиления $T=0,6$ с. Продолжительность сейсмического воздействия, представленного в виде стационарного случайного процесса, принята равной 10 сек. Коэффициенты γ и μ приняты, равными 1, а вероятность безотказности системы оценена по теории выбросов.

2. Найдено решение системы дифференциальных уравнений для трехслойной балки, симметричной и несимметричной структуры при различных условиях опирания концов и нагружения.

3. Вид решения дифференциальных уравнений свидетельствует, что выражение для искомых функций ($w_{1,2}$; $u_{1,2}$) содержит несколько быстро затухающих составляющих. Эти составляющие описывают краевые эффекты, связанные с интенсивным сдвигом в трехслойной конструкции, сжатием заполнителя, которые в значительной мере определяют напряженно-деформированное состояние трехслойного пакета в зонах, имеющих большой показатель изменчивости. Подобное решение для трехслойной цилиндрической оболочки и балки получено впервые.

4. Результаты теоретических расчетов показывают наличие сближения несущих слоев в зонах опирания для несимметричной трехслойной балки, защемленной по кромкам при действии равномерно распределенной нагрузки. Для симметричной балки наибольшее сближение слоев наблюдается в середине пролета.

5. Сравнение данных теоретических исследований с экспериментальными показали что, разность напряжений несущих слоев не превышает 12%, а разность в перемещениях не превышает 8%.

Библиографический список:

1. Устарханов О.М., Батдалов М.М., Муселемов Х.М.. Расчет трехслойных конструкций с дискретным заполнителем - Махачкала 2014.-160с.
2. Устарханов О.М., Кобелев В.Н., Булгаков А.И., Кулиева Ш.С. Экспериментальные исследования трехслойных балок для оценки влияния краевых эффектов на напряженно-деформированное состояние//Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. - 2005, приложение №1, с.75-78.