



Учет сдвиговой жесткости ребер при исследовании напряженно-деформированного состояния подкрепленных плит методами Л.В. Канторовича и Ритца

Е.О. Афанасьева, В.В. Карпов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
190005, 2-я Красноармейская ул., д.4, Санкт-Петербург, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является разработка метода, основанного на совмещении методов Л. В. Канторовича и Ритца, для расчета напряженно-деформированного состояния ребристых пластин с учетом деформаций сдвига. **Метод.** Математическая модель построена на основании функционала полной потенциальной энергии деформации. Решение основано на понижении мерности двумерной задачи до одномерной с использованием метода Л.В. Канторовича и применении метода Ритца при дискретной аппроксимации перемещений. **Результат.** В методе Л.В. Канторовича предложено аппроксимирующие функции получать из расчета системы дифференциальных уравнений для балки Тимошенко. В методе Ритца при дискретной аппроксимации перемещений одномерная область разбивается на участки интегрирования, и учет ребер жесткости осуществляется при помощи дельта-функций Дирака или единичных столбчатых функций. Приведены выражения для получения жесткости на изгиб и сдвиг для ребер со сплошной стенкой и ребер в виде ферм. Проведены численные эксперименты на нескольких типах ребер с различной их высотой и выполнено сравнение с методом конечных элементов. **Вывод.** Определено совпадение разрабатываемого метода и метода конечных элементов для перемещений, изгибающих моментов и продольных усилий в ребрах. Разработанный метод дает более консервативные значения поперечных сил на опорах.

Ключевые слова: плита, ребра жесткости, метод Л.В. Канторовича, метод Ритца, напряженно-деформированное состояние, деформации сдвига.

Для цитирования: Е.О. Афанасьева, В.В. Карпов. Учет сдвиговой жесткости ребер при исследовании напряженно-деформированного состояния подкрепленных плит методами Л.В. Канторовича и Ритца. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2026;53(2):171-182. DOI:10.21822/2073-6185-2026-53-2-171-182

Taking into account the shear stiffness of ribs in the study of the stress-strain state of reinforced slabs using the methods of L.V. Kantorovich and Ritz

E.O. Afanasyeva, V.V. Karpov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,
4, 2nd Krasnoarmeiskaya St., St Petersburg, 190005, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to develop a method based on a combination of L.V. Kantorovich and Ritz methods for calculating the stress-strain state of ribbed plates taking into account shear strains. **Method.** The mathematical model is constructed based on the functional of the total potential energy of deformation. The solution is based on reducing the dimensionality of the two-dimensional problem to a one-dimensional one using L.V. Kantorovich's method and then applying the Ritz method for discrete approximation of displacements. **Result.** In L.V. Kantorovich's method, it is proposed to obtain approximating functions from the calculation of a system of differential equations for the Timoshenko beam. In the Ritz method, for discrete approximation of displacements, the one-dimensional domain is divided into integration sections, and the

stiffeners are taken into account using Dirac delta functions or unit columnar functions. Expressions for obtaining bending and shear stiffness for solid-wall and truss-type ribs are presented. Numerical experiments are conducted on several rib types with different heights and compared with the finite element method. **Conclusion.** It is concluded that the developed method and the finite element method agree well for displacements, bending moments, and longitudinal forces in the ribs. It is found that the developed method yields more conservative values for shear forces at supports.

Keywords: plate, stiffeners, L.V. Kantorovich method, Ritz method, stress-strain state, shear strains

For citation: E.O. Afanasyeva, V.V. Karpov. Taking into account the shear stiffness of ribs in the study of the stress-strain state of reinforced slabs using the methods of L.V. Kantorovich and Ritz. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2026;53(2):171-182. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2026-53-2-171-182

Введение. Плиты, подкрепленные ребрами жесткости, широко распространены среди строительных конструкций зданий и сооружений. Они активно применяются в ребристых перекрытиях и покрытиях как промышленных, так и гражданских зданий. В то же время для пролетных строений мостов плита с ребрами является ключевым конструктивным элементом. К распространенным конструктивным схемам мостовых сооружений можно отнести «ортотропные плиты», сталежелезобетонные, коробчатые, опирающиеся на фермы пролетные строения. Ребра плит мостовых сооружений часто имеют достаточно высокую и тонкую стенку, поэтому в них необходимо учитывать деформации сдвига для точного вычисления прогибов, внутренних сил и напряжений [1].

Чаще всего напряженно-деформированное состояние (НДС) пластин определяют с использованием метода конечных элементов (МКЭ) [2,3]. Однако используются и другие численные методы: метод конечных разностей [4], дифференциальных квадратур [5], граничных элементов [6], разложения искомых функций в ряды Фурье [7] и другие [8–11]. Метод Л.В. Канторовича является удобным и простым инструментом для расчета НДС пластин, так как основан на аппроксимации неизвестной функции произведением функций, зависящих от разных координат, и при удачной аппроксимации в одном из направлений, позволяет понизить мерность функционала и значительно упростить задачу [12–16]. Метод Ритца также позволяет выбирать базисные функции достаточно свободно благодаря разбиению области на участки интегрирования, поэтому решение может быть найдено даже для сложных граничных условий [17].

Постановка задачи. В данной статье предлагается использование метода, основанного на совмещении этих двух методов. Использование преимуществ методов Л.В. Канторовича и Ритца делает расчет простым с точки зрения алгоритмизации и реализации, при этом точным в задачах определения напряженно-деформированного состояния ребристых плит. Для ребер жесткости рассматриваются два способа их моделирования. Первый способ основан на применении дельта-функций Дирака в функционале полной потенциальной энергии, что является наиболее распространенным способом в отечественной и мировой практике [18, 19]. Более точным и современным способом является способ с использованием единичных столбчатых функций, который позволяет учитывать ребро на всей его ширине [20, 21]. В обоих случаях математической моделью для ребер жесткости является модель пластин средней толщины. Важным параметром при этом является сдвиговая жесткость ребер. При использовании модели стержня Тимошенко обычно речь идет о так называемой площади сдвига [22, 23] и о среднем по сечению угле сдвига, а при рассмотрении модели пластин средней толщины используются понятие коэффициента сдвига, на который умножается толщина плиты. Функция распределения касательных напряжений может приниматься различной, чаще квадратичной [21]. В данной статье эти две модели объединены, и в соотношениях для пластин средней толщины используются сдвиговые площади модели

стержня Тимошенко. Однако при рассмотрении плит, подкрепленных ребрами в виде ферменных конструкций, сопротивление сдвигу поясов друг относительно друга осуществляется через раскосы, и указанные выше характеристики сечений не могут быть использованы, поэтому сдвиговая жесткость таких ребер получена по формулам для составных стержней. В статье рассмотрены несколько типов сечений ребер жесткости, в том числе в виде ферм.

Целью исследования является разработка метода, основанного на совмещении методов Л.В. Канторовича и Ритца, для расчета НДС ребристых пластин с учетом деформаций сдвига. В статье рассматриваются ребристые плиты, жестко закрепленные по двум противоположным граням, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1). Ребра расположены в одном направлении, параллельно свободным граням плиты. Считается, что плиты работают только на изгиб. Расчет геометрически и физически линейный.

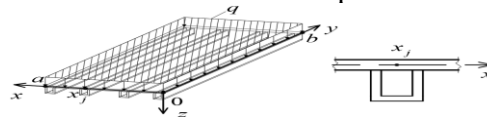


Рис. 1 – Расчетная схема
 Fig. 1 – Calculation scheme

Методы исследования. Математическую модель плиты с ребрами будем строить на основе функционала полной потенциальной энергии деформаций. Функционал представим в следующем виде:

$$E_s = E_s^0 + E_p^R,$$

где E_s^0 – полная потенциальная энергия деформации пластины с учетом работы внешних сил, E_p^R – потенциальная энергия деформации ребер.

Для плиты применим модель тонкой пластины, работающей только на изгиб [12]:

$$E_s^0 = \frac{E^0}{2(1-(\mu^0)^2)} \int_0^a \int_0^b \left(J^0 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + J_{zc}^0 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu^0 (J^0 + J_{zc}^0) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (1-\mu^0)(J^0 + J_{zc}^0) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2qW \right) dx dy,$$

где E^0 , μ^0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты; W – перемещение плиты в направлении z ; a – ширина плиты в направлении Ox , b – длина плиты в направлении y ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$); J^0 , J_{zc}^0 – изгибная жесткость плиты; q – интенсивность распределенной нагрузки на плиту.

Для ребер применим модель пластины средней толщины, учитывая, что в поперечном относительно расположения ребер направлении сдвиговые деформации равны нулю, то есть $\Psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} = 0$. Тогда функционал потенциальной энергии ребер примет вид:

$$E_p^R = \frac{E^R}{2(1-(\mu^R)^2)} \int_0^a \int_0^b \left(J_x^R \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + J_y^R \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2\mu^R J_{xy}^R \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{(1-\mu^R)}{2} J_{xy}^R \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy + \\ + \frac{1}{2} G^R F_z^R \int_0^a \int_0^b \left(\Psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 dx dy, \quad (1)$$

где Ψ_y – угол поворота нормали ребра; перемещения W для плиты и ребра равны; E^R , μ^R – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала ребер; $G^R = \frac{E^R}{2(1+\mu^R)}$ – модуль

сдвига материала ребра; J_x^R , J_y^R – моменты инерции сечения ребер в направлениях осей Ox и Oy соответственно, полученные интегрированием только по вертикальной оси Oz относительно центра

тяжести всего сечения плиты с ребрами; $J_{xy}^R = \frac{1}{2}(J_x^R + J_y^R)$; F_z^R – геометрическая часть сдвиговой жесткости ребер.

Условия совместности деформаций подразумевают, что вертикальные перемещения ребер и плиты равны, но углы поворотов отличаются. Будем считать, что угол сдвига ребра γ и, как следствие, угол поворота нормали, постоянный по сечению. На рис. 2 показаны угловые деформации плиты и ребра.

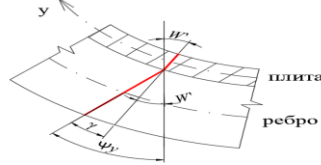


Рис. 2 – Угловые деформации плиты и ребра (сечение вдоль ребра)

Fig. 2 – Angular deformations of the plate and rib (section along the rib)

На примере ребра двутаврового сечения покажем, как определяются моменты инерции [12]. В используемом алгоритме для упрощения изгибная жесткость ребер и плиты сначала вычисляется относительно срединной плоскости плиты по формулам:

$$\begin{aligned} J^0 &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}, \\ J_1 &= \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2}(h + h_1) \right], \\ J_2 &= \int_{h/2+h_1}^{h/2+h_1+h_2} z^2 dz = \frac{h_2}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 \right)(h + 2h_1 + h_2) \right], \\ J_3 &= \int_{h/2+h_1+h_2}^{h/2+h_1+h_2+h_3} z^2 dz = \frac{h_3}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)(h + 2h_1 + 2h_2 + h_3) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

где h_1, h_2, h_3 обозначены на рис. 3; h – толщина плиты.

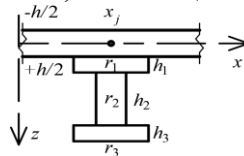


Рис. 3 – Обозначения параметров ребра двутаврового сечения для вычисления изгибной жесткости

Fig. 3 – Designations of the parameters of the I-section rib for calculating the bending rigidity

Затем по правилам сопротивления материалов вычисляется центр тяжести полного поперечного сечения плиты с ребрами, и моменты инерции приводятся к нему. Таким образом получаются изгибные характеристики сечения $J_{zc}^0, J_{1zc}, J_{2zc}, J_{3zc}$. В моментах инерции для ребер в виде фермы участвуют только верхний и нижний пояса, и используются следующие выражения:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2}(h + h_1) \right], \\ J_2 &= \int_{h/2+h_1+h_2}^{h/2+h_1+h_2+h_3} z^2 dz = \frac{h_3}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)(h + 2h_1 + 2h_2 + h_3) \right], \end{aligned}$$

где h_1, h_2, h_3 обозначены на рис. 4; h – толщина плиты.

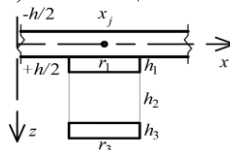


Рис. 4 – Обозначения параметров ребра ферменного сечения для вычисления изгибной жесткости

Fig. 4 – Designations of the parameters of the truss section rib for calculating the bending rigidity

Для сдвиговой жесткости ребер со сплошной стенкой, например, двутаврового, таврового, коробчатого, прямоугольного сечения, используются соотношения, полученные из энергетической эквивалентности поперечных сил и интеграла касательных напряжений по высоте сечения [22]:

$$F_z^R = \frac{1}{\xi} A^R, \quad \xi = \frac{A^R}{(J^R)^2} \int_{A^R} \frac{S_0^R}{(b^R)^2} dA^R,$$

где A^R – площадь поперечного сечения ребра, S_0^R – статический момент отсеченной части сечения, расположенной выше или ниже рассматриваемых волокон с фиксированной координатой z , b^R – ширина поперечного сечения в точке с заданной координатой [22]; J^R – момент инерции ребра относительно его центра тяжести, вычисленный по правилам сопротивления материалов с учетом ширины сечения.

Для ребер в виде фермы сдвиговая жесткость вычислена в соответствии с [24] при приложении единичных сдвигающих сил к поясам и вычислении углов поворотов. Для равномерной решетки с одинаковым сечением раскосов она равна:

$$F_z^R = \frac{E^R}{G^R} \frac{A^R h_1^2 \cos^3(\alpha)}{l_1^2},$$

где A^R – площадь поперечного сечения раскоса, h_1 – размер по вертикали между осями поясов фермы, l_1 – размер по горизонтали между осями стоек фермы, α – угол наклона раскоса. Обозначения геометрических параметров (рис. 5).

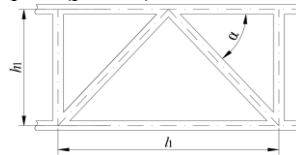


Рис. 5 – Геометрические параметры фермы для определения сдвиговой жесткости ребер в виде фермы

Fig. 5 – Geometric parameters of the truss for determining the shear stiffness of the ribs in the form of a truss

Так как в процессе решения происходит интегрирование по ширине (вдоль оси $0x$), то в алгоритме сдвиговая жесткость делится на ширину ребра. Применим к функционалу полной потенциальной энергии деформации метод Канторовича, заменим функции угла поворота нормали и перемещения произведением функций, зависящих от координат x и y :

$$W(x, y) = g(y)f(x), \quad \Psi_y(x, y) = p(y)f(x),$$

где функции $g(y)$ и $p(y)$ – разные аппроксимирующие функции вдоль оси $0y$, $f(x)$ – аппроксимирующая функция вдоль оси $0x$ (см. далее), общие для перемещений и углов поворотов нормалей.

Для получения аппроксимирующих функций в направлении оси $0y$ рассмотрим более простую модель, а именно решим систему дифференциальных уравнений изгиба однопролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с учетом деформаций сдвига, которая имеет вид:

$$G^R F_z^R \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + G^R F_z^R \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} = q,$$

$$G^R F_z^R \frac{\partial W}{\partial y} + G^R F_z^R \Psi_y - E^R I^R \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \right) = 0.$$

В этих уравнениях используются физические характеристики материала ребер и их изгибные характеристики, вычисленные суммированием значений, полученных по формулам типа (2) и умноженных на ширину соответствующих элементов. Для ребра двутаврового сечения момент инерции будет равен:

$$J_x = J_1 r_1 + J_2 r_2 + J_3 r_3.$$

В результате решения получаются следующие функции:

$$W(y) = \frac{1}{24} \frac{q}{\varepsilon} y^4 + \frac{1}{6} \frac{\lambda}{\varepsilon} C_1 y^3 + \frac{1}{2} C_2 y^2 + C_3 y - \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda} y^2 - C_1 y + C_4,$$

$$\Psi_y(y) = -\left(\frac{1}{6} \frac{q}{\varepsilon} y^3 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\varepsilon} C_1 y^2 + C_2 y + C_3 \right),$$

где q – распределенная погонная нагрузка, которая может быть принята любой, так как может быть вынесена за скобки; $\varepsilon = E^R I^R$, $\lambda = G^R F_z^R$; C_i – константы, которые находятся после подстановки граничных условий.

Для балки с жестко зашеченными концами граничные условия при $y = 0, y = b$ будут иметь вид: $W(0) = W(b) = 0$, $\Psi_y(0) = \Psi_y(b) = 0$. Решением такой краевой задачи будут полиномы:

$$W(y) = \frac{1}{24} \frac{q}{\varepsilon} y^4 - \frac{1}{12} \frac{q}{\varepsilon} b y^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{\varepsilon} b^2 y^2 - \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda} y^2 + \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda} b y,$$

$$\Psi_y(y) = -\left(\frac{1}{6} \frac{q}{\varepsilon} y^3 - \frac{1}{4} \frac{q}{\varepsilon} b y^2 + \frac{1}{12} \frac{q}{\varepsilon} b^2 y \right).$$

Для балки с шарнирно опертыми концами граничные условия при $y = 0, y = b$ будут иметь вид: $W(0) = W(b) = 0$, $\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0$. Решением такой краевой задачи будут полиномы:

$$W(y) = \frac{1}{24} \frac{q}{\varepsilon} y^4 - \frac{1}{12} \frac{q}{\varepsilon} b y^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{\varepsilon} b^3 y - \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda} y^2 + \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda} b y,$$

$$\Psi_y(y) = -\left(\frac{1}{6} \frac{q}{\varepsilon} y^3 - \frac{1}{4} \frac{q}{\varepsilon} b y^2 + \frac{1}{24} \frac{q}{\varepsilon} b^3 \right).$$

Подставив функции (3) или (4) в функционал полной потенциальной энергии деформации плиты с ребрами и проинтегрировав по y , получим одномерный функционал. В направлении $0x$ применим метод Ритца при дискретной аппроксимации перемещений, разбивая на n участков интегрирования и аппроксимируя на каждом участке полиномом третьей степени:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x), \varphi_i(x) = b_{0,i} + b_{1,i}x + b_{2,i}x^2 + b_{3,i}x^3.$$

Краевые условия в направлении $0x$ получаются из равенства нулю первой вариации функционала [25]. Для ребер жесткости в функционале полной потенциальной энергии деформации плиты с ребрами используются дельта-функции Дирака и единичные столбчатые функции [12, 26]. При использовании единичных столбчатых функций выражения для моментов инерции ребра в виде двутавра будут иметь вид:

$$J_x^R = \sum_{j=1}^m \left[J_1 \frac{r_1}{a} \bar{\delta}_1(x - x_j) + J_2 \frac{r_2}{a} \bar{\delta}_2(x - x_j) + J_3 \frac{r_3}{a} \bar{\delta}_3(x - x_j) \right],$$

$$J_y^R = \sum_{j=1}^m \left[J_{1zc} \bar{\delta}_1(x - x_j) + J_{2zc} \bar{\delta}_2(x - x_j) + J_{3zc} \bar{\delta}_3(x - x_j) \right].$$

Важно отметить, что в направлении $0x$, перпендикулярном расположению ребер, моменты инерции остаются вычисленными относительно срединной плоскости плиты. Для ребра в виде фермы при использовании единичных столбчатых функций моменты инерции будут иметь вид:

$$J_x^R = \sum_{j=1}^m \left[J_1 \frac{r_1}{a} \bar{\delta}_1(x - x_j) + J_2 \frac{r_2}{a} \bar{\delta}_2(x - x_j) \right],$$

$$J_y^R = \sum_{j=1}^m \left[J_{1zc} \bar{\delta}_1(x - x_j) + J_{2zc} \bar{\delta}_2(x - x_j) \right],$$

где $\bar{\delta}_1(x-x_j)$, $\bar{\delta}_2(x-x_j)$, $\bar{\delta}_3(x-x_j)$ – единичные столбчатые функции; x_j – координата центра ребра вдоль оси Ox .

При моделировании ребер с использованием дельта-функции Дирака J_1 , J_2 и J_3 умножаются на ширину соответствующей части ребра [26]. Например, для ребра двутаврового сечения:

$$J_x^R = \sum_{j=1}^m \left[J_1 \frac{r_1^2}{a} + J_2 \frac{r_2^2}{a} + J_3 \frac{r_3^2}{a} \right] \delta(x-x_j),$$

$$J_y^R = \sum_{j=1}^m [J_{1zc} r_1 + J_{2zc} r_2 + J_{3zc} r_3] \delta(x-x_j),$$

где $\delta(x-x_j)$ – дельта-функция Дирака.

Для верификации разработанного метода было произведено сравнение его с МКЭ. Рассматривались несколько вариантов конструкций: плиты с ребрами в виде двутавра, П-образные и ферменные. Для моделирования с использованием МКЭ применялся программный комплекс Sofistik. Плита моделировалась пластинчатыми конечными элементами (далее – КЭ). Ребра в виде двутавра и П-образные моделировались тремя способами: стержневыми КЭ с учетом сдвиговых деформаций, без учета сдвиговых деформаций и КЭ пластин (рис. 6, 7). Все элементы при помощи МКЭ моделировались с учетом положений их центров тяжести. Соединение ребер со сплошной стенкой с плитами при моделировании их стержнями осуществлялось простым соединением их в узлах сетки.



Рис. 6 – Моделирование ребер в виде двутавров МКЭ
 Fig. 6 – Modeling of ribs in the form of I-beams using FEM

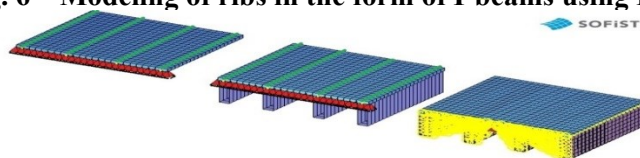


Рис. 7 – Моделирование ребер П-образного сечения МКЭ
 Fig. 7 – Modeling of U-shaped cross-section ribs using FEM

Обсуждение результатов. При моделировании ребер пластинами соединение осуществлялось при помощи объединения всех перемещений между узлами плиты и ребер. Для П-образных ребер крайние узлы плиты и ребер объединялись и закреплялись в соответствии с выбранными граничными условиями. Элементы ферменных ребер полностью моделировались стержневыми КЭ (рис. 8). Связь узлов верхнего пояса и плиты осуществлялась через объединение их перемещений по всем направлениям. Крайние узлы плиты и поясов объединялись и закреплялись в соответствии с выбранными граничными условиями.



Рис. 8 – Моделирование ребер в виде фермы МКЭ
 Fig. 8 – Modeling of ribs in the form of a truss using FEM

Вариант А. Плита жестко защемлена по двум противоположным концам. Геометрические параметры плиты: $a = 6$ м; $b = 40$ м; $h = 0,08$ м. Нагрузка равномерно распределенная, интенсивностью $q = 10^{-2}$ МПа. Модуль упругости и коэффициент Пуассона для плиты

и ребер одинаковые: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$. Плита в направлении оси Oy равномерно подкреплена двумя ребрами с сечением в виде двутавра с размерами: ширина полок 0,5 м; толщина стенки 0,01 м; толщина полок 0,02 м. Рассматривалась разная высота стенок ребер h_2 (рис. 3) от 0,5 до 2,5 м.

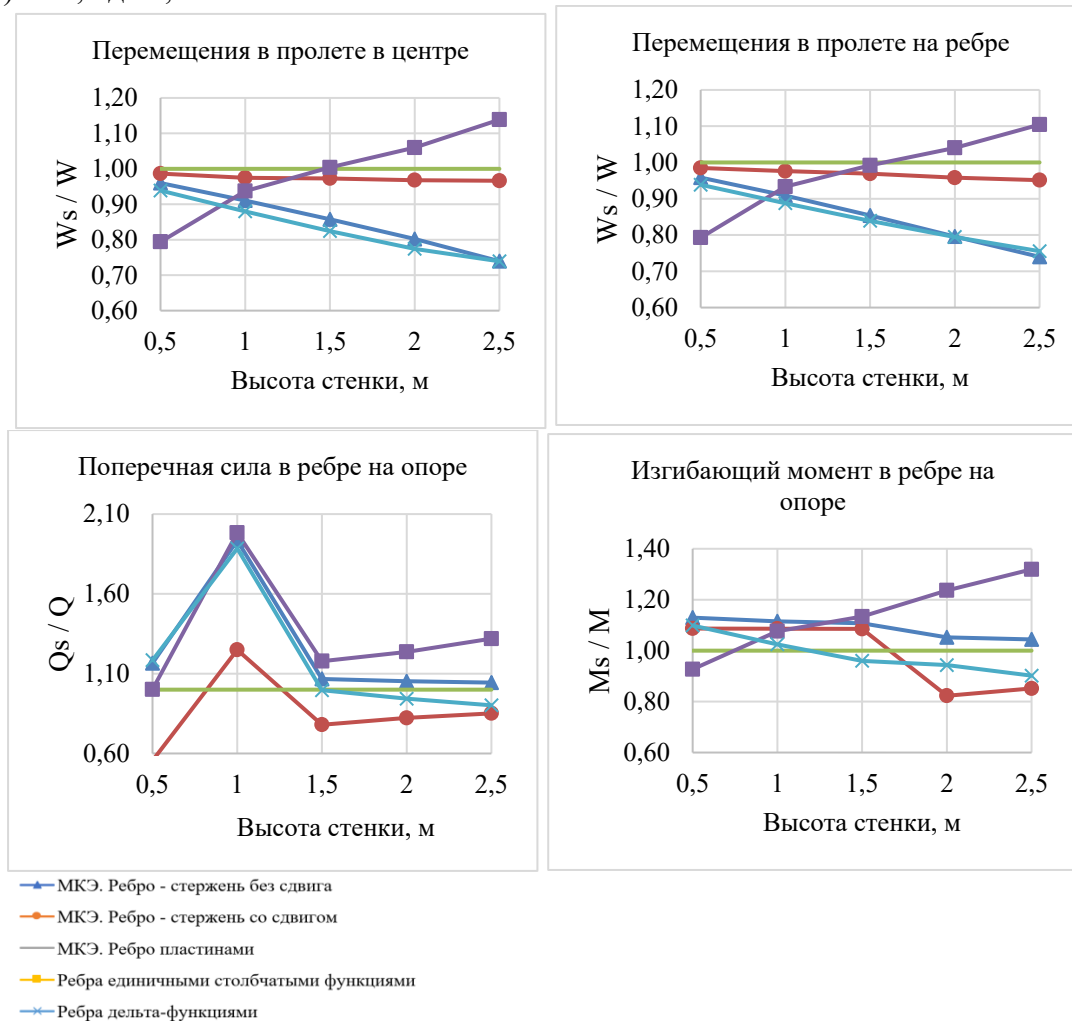


Рис. 9 – Относительные показатели сравнения разрабатываемого метода и МКЭ. Вариант А
Fig. 9 – Relative indicators of comparison of the developed method and FEM. Option A

На рис. 9 показаны относительные параметры: перемещения W_s , поперечные силы в ребре на опоре Q_s , изгибающий момент в ребре в пролете и на опоре M_s при разной высоте стенки. Получившиеся значения делились на соответствующие перемещения W , поперечные силы в ребре на опоре Q , изгибающий момент в ребре в пролете и на опоре M , полученные при расчете МКЭ и моделировании ребер пластинами.

Вариант Б. Плита шарнирно оперта по двум противоположным концам. Геометрические параметры плиты: $a = 6$ м; $b = 30$ м; $h = 0,2$ м. Нагрузка равномерно распределенная, интенсивностью $q = 10^{-2}$ МПа. Модуль упругости и коэффициент Пуассона для плиты: $E = 3 \cdot 10^4$ МПа; $\mu = 0,2$. Модуль упругости и коэффициент Пуассона для ребер: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$. Плита в направлении оси Oy равномерно подкреплена четырьмя ребрами с сечением в виде перевернутого П-образного сечения с размерами: наружная ширина 0,41 м; ширина внутренней полости 0,39 м; толщина полки 0,02 м. Рассматривалась разная общая высота ребер от 0,52 до 2,52 м. На рис. 10 показаны относительные параметры: перемещения W_s , поперечные силы в ребре на опоре Q_s , изгибающий момент в ребре в пролете и на опоре M_s при разной высоте стенки. Получившиеся значения делились на соответствующие перемещения W , поперечные силы в ребре на опоре Q , изгибающий

момент в ребре в пролете и на опоре M , полученные при расчете МКЭ и моделировании ребер пластинами.

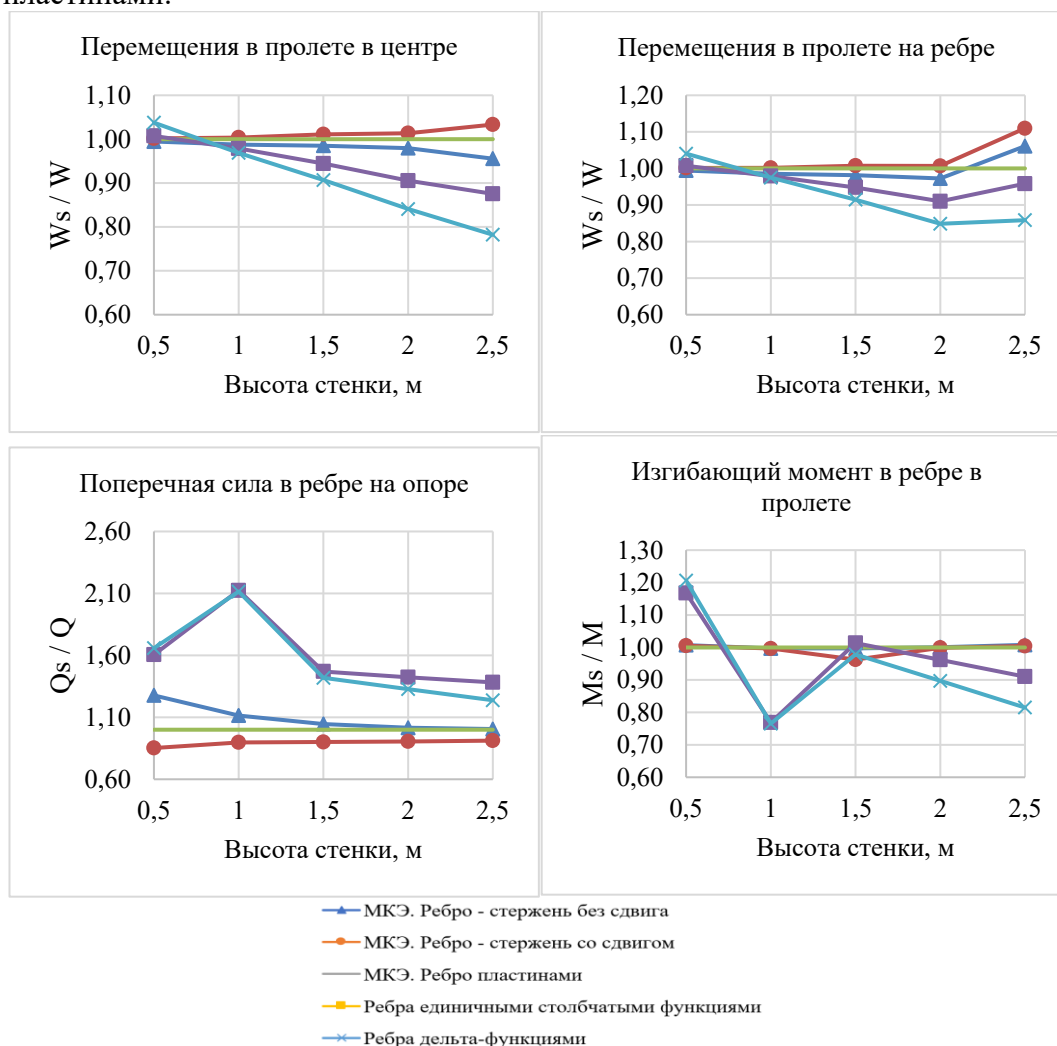


Рис. 10 – Относительные показатели сравнения разрабатываемого метода и МКЭ. Вариант Б
Fig. 10 – Relative indicators of comparison of the developed method and FEM. Option B

Вариант В. Конструкция жестко заделана по двум противоположным концам. Геометрические параметры плиты: $a = 4$ м; $b = 40$ м; $h = 0,1$ м. Нагрузка равномерно распределенная, интенсивностью $q = 3 \cdot 10^{-2}$ МПа. Модуль упругости и коэффициент Пуассона для плиты и ребер одинаковые: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$. Плита в направлении оси Oy по краям подкреплена двумя ребрами в виде ферм с размерами: сечение поясов, стоек и раскосов квадратное $0,1 \times 0,1$ м, шаг стоек в осях 2 м. Рассматривалось разное расстояние между поясами в свету (высота стойки h_3 на рис. 4) от 3 до 6 м.

На рис. 11 показаны относительные параметры: перемещения W_s , продольные силы N_s в нижнем поясе на опоре и в пролете при разной высоте фермы. Получившиеся значения делились на соответствующие перемещения W и продольные силы N , полученные при расчете МКЭ. На диаграммах можно заметить, что различие в перемещениях, изгибающих моментах и продольных усилиях в поясах ребра-фермы для разрабатываемого метода и МКЭ не превышают 20%. Только при жестком защемлении концов при достаточно высокой стенке ребер двутаврового сечения возникает более существенное отличие в сторону увеличения абсолютного значения. Однако, в поперечных силах при жестком защемлении краев расхождение значительное.

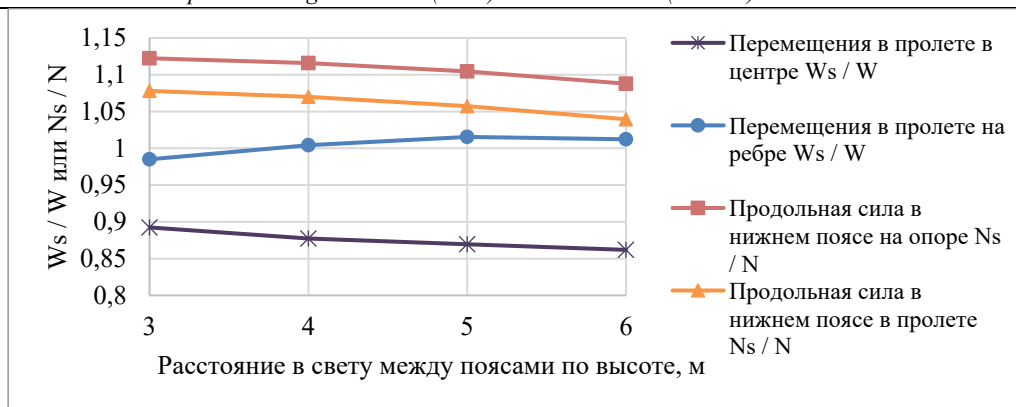


Рис. 11 – Относительные показатели сравнения разрабатываемого метода и МКЭ. Вариант В
Fig. 11 – Relative indicators for comparison of the developed method and FEM. Option B

Причем, различия наблюдаются в том числе в пределах самого МКЭ при разных способах моделирования. Это говорит о том, что данный вопрос требует более внимательного рассмотрения при проектировании и в данном случае расчет разрабатываемым методом, основанным на методах Канторовича и Ритца, можно считать более надежным, дающим наиболее консервативные результаты.

Вывод. В статье предложен способ учета сдвиговой жесткости ребер при исследовании напряженно-деформированного состояния подкрепленных плит методом, совмещающим метод Канторовича и метод Ритца. В качестве аппроксимирующих функций предложено использование решений, полученных из решения дифференциального уравнения балки с учетом сдвигов. Эти решения являются достаточно универсальными, так как позволяют учесть различные граничные условия на торцах плиты.

Представлены выражения для сдвиговой жесткости в функционале полной потенциальной энергии деформации для ребер различных сечений, в том числе в виде фермы. Результаты сравнения с МКЭ показали максимальное расхождение в перемещениях, изгибающих моментах и продольных усилиях в поясах ребра-фермы не более 20%. Расхождение в поперечных силах при жестком защемлении краев значительное, даже внутри метода конечных элементов при различных способах моделирования.

Библиографический список:

1. Corte W.D., Bogaert P.V. The effect of shear deformations in floorbeams on the moment distribution in orthotropic plated bridge decks. *Journal of Constructional Steel Research*. 2006; 62(10):1007–1015. DOI: 10.1016/j.jcsr.2006.01.011.
2. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M. On the free vibrations of joined grid-stiffened composite conical-cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*. 2021;161:107465. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107465.
3. Шапиро Д.М., Тютин А.П. Теория численного расчета плитно-балочных железобетонных пролетных строений мостовых сооружений // Научный журнал строительства и архитектуры. 2019. № 2(54). С. 134–144.
4. Замалиев Ф.С., Биккинин Э.Г. К расчету сталежелезобетонных плит подкрепленных ребрами // Известия КГАСУ. 2014. № 3(29). С. 27–31.
5. Barulina M.A. Application of generalized differential quadrature method to two-dimensional problems of mechanics // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2018. Vol. 18, No 2. P. 206–216. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216.
6. Лалин В.В., Семенов Д.А. Решение плоской задачи теории упругости напряжений методом граничных элементов // Вестник Евразийской науки. 2025. Т. 17, № 4.
7. Постнов В.А., Тумашик Г.А., Москвина И.В. Об устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2007. № 69. С. 18–23.
8. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results // *Composite Structures*. 2015. Vol. 129. P. 177–201. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.04.007.
9. Singhatanadgid P., Singhanart T. The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019. Vol. 26, No 2. P. 170–188. DOI: 10.1080/15376494.2017.1365984.

10. Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Моделирование и оптимальное проектирование круглых пластин, взаимодействующих с агрессивными средами. Тюмень: ТИУ, 2023. 198 с.
11. Гришин И.В., Каюмов Р.А. Упрощенное уравнение многослойной плиты для описания работы асфальтобетонных покрытий металлических мостов // Известия КГАСУ. 2022. № 4(62). С. 119–128. DOI: 10.52409/20731523_2022_4_119.
12. Афанасьева Е.О. Метод Ритца при дискретной аппроксимации перемещений для расчета плит мостовых сооружений, подкрепленных ребрами различной формы // Вестник ПНИПУ. Механика. 2025. № 1. С. 82–91.
13. Chang D.C., Wang G., Wereley N.M. A Generalized kantorovich method and its application to free in-plane plate vibration problem // Applicable Analysis. 2001. Vol. 80, No 3–4. P. 477–491. DOI: 10.1080/00036810108841006.
14. Fallah A., Kargarnovin M.H., Aghdam M.M. Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method // Key Engineering Materials. 2011. Vol. 471–472. P. 739–744. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.471-472.739.
15. Fariborz S.J., Pourbohloul A. Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates // Computers & Structures. 1989. Vol. 31, No 6. P. 957–965.
16. Tebyakin A.D., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method) // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022;22(4):494–505. DOI:10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505.
17. Gong Q., Li H., Chen H., Teng Y., Wang N. Application of Ritz method for vibration analysis of stepped functionally graded spherical torus shell with general boundary conditions // Composite Structures. 2020. Vol. 243. P. 112215. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112215.
18. Бакулин В.Н., Недбай А.Я. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами кусочно-постоянной толщины, при действии осевой нагрузки // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 495, № 1. С. 39–45.
19. Jafari A.A., Bagheri M. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods // Thin-Walled Structures. 2006. Vol. 44, No 1. P. 82–90. DOI: 10.1016/j.tws.2005.08.008.
20. Semenov A.A. Refined discrete method for calculating stiffened orthotropic shells // PNRPU Mechanics Bulletin. 2022. No 4. P. 90–102. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.4.09.
21. Карпов В.В., Кобелев Е.А., Панин А.Н., Семенов А.А. Модели деформирования строительных конструкций и методы их расчета. М.: Издательский дом АСВ, 2022. 466 с.
22. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Издательство АСВ, 2005. 736 с.
23. Балусшкин А.Л. Расчет железобетонного изгибаемого элемента как составного стержня // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2007. № 3(51).
24. Ржаницын А.Р. Составные стержни. М.: Стройиздат, 1986. 315 с.
25. Карпов В.В., Афанасьева Е.О. Напряженно-деформированное состояние плиты, подкрепленной ребрами различной конфигурации // Вестник гражданских инженеров. 2024. № 4. С. 35–43. DOI: 10.23968/1999-5571-2024-21-4-35-43
26. Афанасьева Е.О. Дельта-функция Дирака для моделирования ребер плит // Промышленное и гражданское строительство. 2025. № 3. С. 52–57.

References:

1. Corte W.D., Bogaert P.V. The effect of shear deformations in floorbeams on the moment distribution in orthotropic plated bridge decks. *Journal of Constructional Steel Research*. 2006; 62(10):1007–1015. DOI: 10.1016/j.jcsr.2006.01.011.
2. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M. On the free vibrations of joined grid-stiffened composite conical-cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*. 2021;161:107465. doi: 10.1016/j.tws.2021.107465.
3. Shapiro D. M., Tyutin A. P. Numerical calculation theory of slab-beam reinforced concrete bridge high structures. *Nauchnyi zhurnal stroitel'stva i arkhitektury*, 2019;2(54):134-144. (In Russ)
4. Zamaliev F.S., Bikinin E.G. On the calculation of steel-concrete plates reinforced by ribs. *News KSUAE*. 2014;3(29):27–31. (In Russ)
5. Barulina M.A. Application of generalized differential quadrature method to two-dimensional problems of mechanics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2018;18(2):206–216. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216.
6. Lalin V.V., Semenov D.A. Solution of a plane problem of elasticity theory in stresses by the boundary element method. *The Eurasian Scientific Journal*. 2025;17(4).
7. Postnov V.A., Tumashik G.A., Moskvina I.A. About stability of a reinforced cylindrical shell. *Problemi prichnosti i plastichnosti*. 2007;69:18–23. (In Russ)

8. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results. *Composite Structures*. 2015;129:177–201. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.04.007.
9. Singhatanadgid P., Singhanart T. The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019; 26(2):170–188. doi: 10.1080/15376494.2017.1365984.
10. Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G. Modeling and optimal design of round plates interacting with aggressive surroundings. Tyumen: TIU, 2023:198 p. (In Russ)
11. Grishin I.V., Kayumov R.A. Simplified multilayered slab equation describing asphalt concrete pavements of metal bridges. *News KSUAE*. 2022;4 (62):119–128. DOI: 10.52409/20731523_2022_4_119 (In Russ)
12. Afanaseva E.O. The Ritz method with discrete approximation of displacements for analyzing plates of bridge structures supported by stiffeners of various configurations. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2025;1:82–91. (In Russ)
13. Chang D.C., Wang G., Wereley N.M. A Generalized kantorovich method and its application to free in-plane plate vibration problem. *Applicable Analysis*. 2001; 80(3–4):477–491. DOI: 10.1080/00036810108841006.
14. Fallah A., Kargarnovin M.H., Aghdam M.M. Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method. *Key Engineering Materials*. 2011;471–472: 739–744. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.471-472.739.
15. Fariborz S.J., Pourbohloul A. Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates. *Computers & Structures*. 1989;31(6):957–965.
16. Tebyakin A.D., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method). *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics.Informatics*. 2022;22(4):494–505. DOI:10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505.(In Russ)
17. Gong Q., Li H., Chen H., Teng Y., Wang N. Application of Ritz method for vibration analysis of stepped functionally graded spherical torus shell with general boundary conditions. *Composite Structures*. 2020; . 243:112215. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112215.
18. Bakulin V. N. and. Nedbay A. Ya. Dynamic stability of a cylindrical shell reinforced by longitudinal ribs of a piecewise-constant thickness under axial loading. *Doklady Physics*. 2020;495(1):39–45.
19. Jafari A.A., Bagheri M. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods. *Thin-Walled Structures*. 2006; 44(1): 82–90. DOI: 10.1016/j.tws.2005.08.008.
20. Semenov A.A. Refined discrete method for calculating stiffened orthotropic shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022; 4: 90–102. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.4.09. (In Russ)
21. Karpov V.V., Kobelev E.A., Panin A.N., Semenov A.A. Models of deformation of building structures and methods of their calculation. Moscow: Publishing House of ASV, 2022. 466 p. (In Russ)
22. Slivker V.I. Construction mechanics. Traditional foundations. Moscow: Publishing House of the ASV, 2005. 736 c.
23. Balushkin A.L. Analysis of a bended concrete element as a composite beam. *St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics*. 2007;3(51). (In Russ)
24. Rzhantsyn A.R. Composite beams. Moscow: Stroyizdat, 1986. 315 p.
25. Karpov V.V., Afanaseva E.O. Stress-strain state of a plate supported by ribs of different configuration. *Bulletin of Civil Engineers*. 2024;4: 35–43. DOI: 10.23968/1999-5571-2024-21-4-35-43 (In Russ)
26. Afanaseva E.O. Dirac delta function for modeling plates stiffeners. *Industrial and civil engineering*. 2025;3:52–57. (In Russ)

Сведения об авторах:

Афанасьева Елена Олеговна, аспирант, кафедра информационных систем и технологий
 elena.afanaseva2064@gmail.com

Карпов Владимир Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор-консультант
 кафедры технологий информационного и математического моделирования; vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Information about authors:

Elena O. Afanaseva, Graduate student, Department of Information Systems and Technologies
 elena.afanaseva2064@gmail.com)

Vladimir V.Karpov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Consulting Prof., Department of Information and Mathematical
 Modeling Technologies; vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 26.12.2025.

Одобрена после рецензирования/Reviced 10.02.2026.

Принята в печать/Accepted for publication 19.04.2026.