Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. Том 53, №1, 2026.
Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. Vol.53, No.1, 2026.
http://vestnik.dgtu.ru/ ISSN (Print) 2073-6185 ISSN (On-line) 2542-095X

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
INFORMATION TECHNOLOGY AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.852

DOI: 10.21822/2073-6185-2026-53-1-151-156 Оригинальная статья/ Original article

Оценивание параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа со вторым порядком вложенности

С.И. Носков, А.П. Медведев
Иркутский государственный университет путей сообщения,
664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15, Россия

Резюме. Цель. Целью исследование является разработка алгоритмического способа идентификации параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа со вторым порядком вложенности с помощью метода наименьших модулей. **Метод.** Оценивание неизвестных параметров осуществляется путем сведения к задаче линейно-булева программирования. Ее решение не должно вызывать вычислительных трудностей вследствие наличия значительного количества соответствующих эффективных программных средств. **Результат.** Решение сформированной задачи линейно-булева программирования позволяет вычислять оценки параметров модели, а анализ оптимальных значений булевых компонент - определять характер срабатывания внешнего и внутренних максимумов обоих уровней в ней. **Вывод.** Результаты решения численного примера указывают на эффективность предложенного способа вычисления оценок параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа со вторым порядком вложенности с помощью метода наименьших модулей.

Ключевые слова: однородная вложенная кусочно-линейная регрессия второго типа со вторым порядком вложенности, идентификация параметров, метод наименьших модулей, задача линейно-булева программирования, размерность

Для цитирования: С.И. Носков, А.П. Медведев. Оценивание параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа со вторым порядком вложенности. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2026;53(1):151-156. DOI:10.21822/2073-6185-2026-53-1-151-156.

Estimation of parameters of homogeneous nested bilinear regression of the second type with the second order of nesting

S.I. Noskov, A.P. Medvedev
Irkutsk State Transport University,
15 Chernyshevskogo St., Irkutsk 664074, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to develop an algorithmic method for identifying the parameters of a homogeneous nested piecewise linear regression of the second type with the second order of nesting using the least absolute values method. **Method.** Estimating unknown parameters is accomplished using a linear-Boolean programming problem. Its solution presents no computational difficulties due to the availability of a significant number of effective software tools. **Result.** The solution of the formed linear-Boolean programming problem allows us to calculate estimates of the model parameters, and the analysis of the optimal values of the Boolean components - to determine the nature of the response of the external and internal maxima of both levels in it. **Conclusion.** The results indicate the effectiveness of the proposed method for calculating the parameter estimates of a homogeneous nested piecewise linear regression of the second type with the second order of nesting using the least absolute values method.

Keywords: homogeneous nested piecewise linear regression of the second type with the second order of nesting, parameter identification, least absolute values method, linear-Boolean programming problem, dimension

For citation: S.I. Noskov, A.P. Medvedev. Estimation of parameters of homogeneous nested bilinear regression of the second type with the second order of nesting. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2026;53(1):151-156. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2026-53-1-151-156.

Введение. Особый интерес исследователей при изучении технических и социально-экономических объектов вызывают случаи, когда их функционирование бывает подвержено различного рода флуктуациям и возмущениям, что может приводить к риску нарушения устойчивости в характере взаимовлияния задействованных факторов. Если же при таких исследованиях применяются методы математического моделирования, подобные ситуации требуют привлечения, наряду с линейными, существенно нелинейных аппроксимирующих форм, в том числе обладающих высокими порядками относительно используемых операций.

Так, в работе [1] предложен способ аппроксимации амплитудного коэффициента в модели высокого порядка для среды со сложной реологией. В [2] осуществляется групповой анализ уравнений высокого порядка для описания модели Ферми–Паста–Улама.

В статье [3] рассматриваются расчеты течения разреженного газа на основе нелинейных модельных уравнений Больцмана с использованием детерминированных унифицированных алгоритмов высокого порядка для газовой кинетики в фазовом пространстве. Разработано несколько таких алгоритмов, которые сочетают метод дискретных ординат скорости в пространстве скоростей и компактные конечно-разностные схемы высокого порядка в физическом пространстве.

Исследование [4] посвящено изучению различных динамических особенностей, лежащих в основе взаимодействия солитонов в обобщенном нелинейном уравнении Шредингера высокого порядка, которое моделирует распространение многомодовых волн в различных физических ситуациях нелинейной оптики. При этом новые точные решения обобщенного нелинейного уравнения Шредингера высокого порядка построены с помощью символьных вычислений с использованием модифицированного расширенного прямого алгебраического метода.

В работе [5] предлагается новый метод адаптивного управления скользящим режимом без использования моделей для решения некоторых задач управления в классе дискретных во времени нелинейных систем высокого порядка, динамика которых неизвестна. Для упрощения нелинейной системы вводится новое понятие, называемое матрицей псевдочастных производных, которое облегчает моделирование нелинейной системы с помощью подхода к динамической линеаризации в компактной форме.

В статье [6] показано, что внешние потенциалы в полностью интегрируемых неавтономных нелинейных динамических системах высшего порядка могут быть представлены в виде бесконечного степенного ряда с изменяющимися во времени коэффициентами. В качестве репрезентативного примера вводится обобщенное уравнение Хироты в рамках неизоспектрального обобщения метода обратного преобразования рассеяния с соответствующим спектральным параметром, изменяющимся в соответствии с уравнением Риккати.

В [7] разработана новая суррогатная модель на основе полиномов высокого порядка (HOPSM), позволяющая избежать рутинных задач дорогостоящего компьютерного моделирования в инженерии. HOPSM сохраняет преимущества традиционных моделей на основе полиномов низкого порядка в плане эффективности, прозрачности и простоты, избегая при этом их недостатков в точности. В численном процессе для генерации начального набора выборок используется схема заполнения пространства, а затем для отбора большего количества выборок из всех кандидатов применяется инкрементальный метод, основанный на принципе максимина.

В работе [8] рассматривается задача слежения за классом нелинейных систем высокого порядка с задержкой на входе. Неизвестные непрерывные функции системы оцениваются с помощью систем нечеткой логики. Вводится метод преобразования состояний для устранения запаздывающего входного элемента. С помощью алгоритма обратного перехода достигается свойство полуглобальной равномерной конечной ограниченности замкнутой системы.

В исследовании [9] предлагается новая гибридная дискретизация высокого порядка для класса линейных и нелинейных моделей упругости в режиме малых деформаций, которые широко используются в механике твёрдого тела. Предложенный метод применим в двух- и трёхмерном пространстве, поддерживает общие сетки, включая полиэдральные элементы и несовпадающие интерфейсы, допускает произвольный порядок аппроксимации, а стоимость разрешения может быть снижена путём статического уплотнения большого подмножества неизвестных для линеаризованных версий задачи.

В статье [10] предложена модель рекуррентной нейронной сетью высшего порядка, которая основана на модели пи-сигма и реализована для косвенного адаптивного управления нелинейной динамической системой.

Параметры предлагаемого контроллера настраиваются с помощью метода асинхронного обратного распространения, основанного на градиентном спуске. Повышена производительность алгоритма обучения, что достигается за счёт внедрения схемы адаптивной скорости обучения, обеспечивающей правильную установку значения скорости обучения на каждой итерации.

Постановка задачи. В работах [11, 12] с помощью обобщения известных кусочно-линейных регрессионных конструкций введены два типа вложенных кусочно-линейных регрессий первого порядка – простая и однородная.

При этом однородная вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа имеет вид:

$$y_k = min\{ min_{i\in I^1}\{ a_i^1 x_{ki}\},\ldots, min_{i\in I^G}\{ a_i^G x_{ki}\}\} + \varepsilon_k,\ \ k=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где k – номер наблюдения, y – зависимая переменная, $x_i, i=\overline{1,m}-$ независимые переменные, $a_i^j, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,G}-$ подлежащие оцениванию параметры, $\varepsilon_k,\ k=\overline{1,n}$, - ошибки аппроксимации, n – количество наблюдений (длина выборки).

Индексные множества $I^i, i=\overline{1,G}$, являются наперед заданными подмножествами множества номеров независимых переменных $\{1,2,\ldots,m\}$ и могут, в общем случае, иметь непустые пересечения. Все переменные в регрессионной модели (1) детерминированы.

В работе [13] описан основанный на методе наименьших модулей алгоритмический способ оценивания неизвестных параметров регрессии (1), сводящийся для оптимизационной задачи

$$\mathrm{I}_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} |\,\varepsilon_k| \ \to min \tag{2}$$

к задаче линейно-булева программирования (ЛБП).

В работах [11, 12] указано, что наряду с первым порядком вложенности для таких регрессий могут быть использованы и более высокие порядки. Так, в частности, однородная кусочно-линейная регрессия второго типа со вторым порядком вложенности примет в этом случае вид:

$$y_k = max\{ max\{max_{i\in I^{11}}\{a_i^{11}x_{ki}\},\ldots max_{i\in I^{1w_1}}\{ a_i^{1w_1}x_{ki}\}\},\ldots,$$
$$max\{\{max_{i\in I^{G1}}\{a_i^{G1}x_{ki}\},\ldots, max_{i\in I^{Gw_G}}\{ a_i^{Gw_G}x_{ki}\}\}\} + \varepsilon_k,\ \ k=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где w_i и I^{ij} – также заданные числа и индексные множества, $I^{ij}\subset\{1,2,\ldots,m\}$, $i=\overline{1,G}$, $j=\overline{1,w_i}$.

Поставим задачу идентификации неизвестных параметров $a_i^{je}, j=\overline{1,G},\ \ e=\overline{1,w_j}$, $i\in I^{je}$.

Методы исследования. Для решения задачи (2) по отношению к модели (3) воспользуемся вычислительными приемами, примененными в работе [13].

Введем в рассмотрение неизвестные вещественные переменные:

$$v_{kje} = max_{i\in I^{je}}\{ a_i^{je} x_{ki}\}, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j},$$
$$h_{kj} = \max_{e=\overline{1,w_j},} v_{kje}, \quad k = \overline{1,n}\,, j = \overline{1,G},$$
$$f_k = \max_{j=\overline{1,G}} h_{kj}, \quad j = \overline{1,G}.$$

Также введем булевы переменные:

$$s_{kije}=\begin{cases}1, & v_{kje} = max_{t\in I^{je}}\{ a_t^{je} x_{kt}\} = a_i^{je} x_{ki}\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$
$$r_{kje}=\begin{cases}1, & h_{kj} = \max_{t=\overline{1,w_j},} v_{kjt} = v_{kje}\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$
$$o_{kj}=\begin{cases}1, & f_k = \max_{t=\overline{1,G}} h_{kt} = h_{kj}\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$
$$k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, i \in I^{je}.$$

Тогда задача определения оценок параметров регрессии (3) путем решения задачи (2) также может быть сведена к следующей задачи ЛБП:

$$v_{kje} \ge a_i^{je} x_{ki},\ k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, i \in I^{je}, \tag{4}$$
$$a_i^{je} x_{ki} - v_{kje} \ge (s_{kije} - 1)M_i, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G},\ e = \overline{1,w_j}, i \in I^{je}, \tag{5}$$
$$\textstyle\sum_{i\in I^{je}} s_{kije} = 1, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, \tag{6}$$
$$h_{kj} \ge v_{kje},\ k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G},\ e = \overline{1,w_j}, \tag{7}$$
$$v_{kje} - h_{kj} \ge (r_{kje} - 1)M, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, \tag{8}$$
$$\textstyle\sum_{e=1}^{w_j} r_{kje}=1, k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,G}, \tag{9}$$
$$f_k \ge h_{kj},\ k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, \tag{10}$$
$$h_{kj} - f_k \ge (o_{kj} - 1)M, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, \tag{11}$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^{G} o_{kj}=1, k = \overline{1,n}, \tag{12}$$
$$f_k + u_k - d_k = y_k, k = \overline{1,n}, \tag{13}$$
$$u_k \ge 0, d_k \ge 0, k = \overline{1,n}, \tag{14}$$
$$v_{kje} \ge 0, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, \tag{15}$$
$$h_{kj} \ge 0, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,G}, \tag{16}$$
$$f_k \ge 0, k = \overline{1,n}, \tag{17}$$
$$s_{kije} \in \{0,1\}, k = \overline{1,n}, i \in I^{je},\ j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, \tag{18}$$
$$r_{kje} \in \{0,1\}, k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, \tag{19}$$
$$o_{kj} \in \{0,1\}, k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,G}, \tag{20}$$
$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k + d_k) - \sum_{j=1}^{G}\sum_{e=1}^{w_j}\sum_{i\in I^{je}} \tau_{ije} a_i^{je} \to min. \tag{21}$$

Здесь N, M_i, $i=\overline{1,m}$ – наперед заданные большие, а $\tau_{ije}, j = \overline{1,G}, e = \overline{1,w_j}, i \in I^{je}$ – малые положительные константы.

Присутствие в целевой функции (21) второго слагаемого обеспечивает единственность решения задачи ЛБП (4) - (21).

Обсуждение результатов. С помощью датчика случайных чисел сформируем выборку данных (табл.1):

Таблица 1. Выборка данных
Table 1. Data sampling

y	x_1	x_2	x_3	x_4
5.42	2.78	2.97	4.46	7.9
3.04	1.66	6.97	5.73	3.58
1.06	2.85	4.31	4.51	8.72
4.89	8.73	5.67	2.81	8.29
1.07	6.59	1.1	4.22	4.15
4.85	1.79	1.84	8.46	4.77
2.89	4.98	2.47	6.45	3.62
2.68	3.67	3.18	7.45	1.41

На ее основе построим однородную кусочно-линейную регрессию второго типа со вторым порядком вложенности вида:

$$y_k = max\{\, max\{max\{\, a_1^{11}x_{k1}, a_4^{11}x_{k4}\}, max\{\, a_2^{12}x_{k2}, a_3^{12}x_{k3}\}\},$$
$$max\{max\{\, a_1^{21}x_{k1}, a_3^{21}x_{k3}\}, max\{\, a_1^{22}x_{k1}, a_2^{22}x_{k2}\}\}\} + \varepsilon_k,\ \ k = \overline{1,8}.$$

Таким образом, здесь n=8, m=4, G=2, w_1=w_2=2, I^{11}=$\{1,4\}$, I^{12}=$\{2,3\}$, I^{21}=$\{1,3\}$, I^{22}=$\{1,2\}$. Зададим требуемые константы:

$$N = M_i\text{=}1000,\ i\text{=}\overline{1,4},\ \tau_{ije}\text{=}0.0001,\ j = \overline{1,2},\ e = \overline{1,2},\ i \in I^{je}.$$

В результате решения задачи ЛБП (4) – (21) получим следующую модель:

$$y_k = max\{\, max\{max\{\, 0.56x_{k1}, 0.18x_{k4}\}, max\{\, 0.43x_{k2}, 0.09x_{k3}\}\},$$
$$max\{max\{\, 0.56x_{k1}, 0.45x_{k3}\}, max\{\, 0.56x_{k1}, 0.13x_{k2}\}\}\} + \varepsilon_k,\ \ k = \overline{1,8}. \quad (22)$$
$$I_1\text{=}8.72.$$

Анализ оптимальных значений булевых компонент решения задачи позволяет определить характер срабатывания внешнего и внутренних максимумов обоих уровней в регрессии (22).

Вывод. В работе поставлена задача идентификации параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа со вторым порядком вложенности с помощью метода наименьших модулей. Получены следующие результаты.

1. Поставленная задача сведена к задаче линейно-булева программирования.
2. Сформированная задача ЛБП имеет довольно высокую размерность для решения практических проблем, связанных с моделированием, что, однако, не должно вызывать вычислительных трудностей вследствие наличия соответствующих эффективных программных средств.
3. Анализ оптимальных значений булевых компонент решения задачи позволяет определить характер срабатывания внешнего и внутренних максимумов обоих уровней в построенной вложенной модели.
4. Решен численный пример.

Библиографический список:

1. Бойченко Н.В., Клейдман О.В., Тюленева О.Н. Аппроксимация амплитудного коэффициента в модели высокого порядка для среды со сложной реологией//Труды Академэнерго. 2006. № 4. С.79–86.
2. Волков А.К., Кудряшов Н.А. Групповой анализ уравнений высокого порядка для описания модели Ферми–Паста–Улама//Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". - 2016. - Т. 5. - № 6. - С. 528–533.
3. Li Z.-H., Peng A.-P., Zhang H.-X., Yang J.-Y. Rarefied gas flow simulations using high-order gas-kinetic unified algorithms for Boltzmann model equations //Progress in Aerospace Sciences. 2015;74:81–113.
4. Arshad M., Seadawy A.R., Lu D. Bright–dark solitary wave solutions of generalized higher-order nonlinear Schrödinger equation and its applications in optics // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. - 2017. - V. 31. - № 16. - P. 1711–1721.
5. Xu D., Song X., Yan W., Jiang B. Model-free adaptive command-filtered-backstepping sliding mode control for discrete-time high-order nonlinear systems // Information Sciences. - 2019. - V. 485. - P. 141–153.
6. Belyaeva T.L., Serkin V.N. Nonlinear dynamics of nonautonomous solitons in external potentials expressed by time-varying power series: exactly solvable higher-order nonlinear and dispersive models // Nonlinear Dynamics. - 2022. - V. 107. - P. 1153–1162.

7. Wu J., Luo Z., Zheng J., Jiang C. Incremental modeling of a new high-order polynomial surrogate model // Applied Mathematical Modelling. - 2016. - V. 40. - № 7–8. - P. 4681–4699.
8. Zhu Q., Song A.-G., Zhang T.-P., Yang Y.-Q. Fuzzy adaptive control of delayed high order nonlinear systems // International Journal of Automation and Computing. - 2012. - V. 9. - P. 191–199.
9. Botti M., Di Pietro D.A., Sochala P. A Hybrid High-Order Method for Nonlinear Elasticity // SIAM Journal on Numerical Analysis. - 2017. - V. 55. - № 6.
10. Kumar R. Double internal loop higher-order recurrent neural network-based adaptive control of the nonlinear dynamical system // Soft Computing. - 2023. - V. 27. - P. 17313–17331.
11. Носков С.И. Подход к формализации вложенной кусочно-линейной регрессии // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. - 2023. - № 1–2 (76). - С. 218–220.
12. Носков С.И. Некоторые формы вложенной кусочно-линейной регрессии // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. - 2023. - № 3. - С. 467–469.
13. Носков С.И., Белинская С.И. Вычисление оценок параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. - 2023. - Т. 50. - № 4. - С. 115–120.

References:

1. Boychenko N.V., Kleydman O.V., Tyuleneva O.N. Approximation of the amplitude coefficient in a high-order model for a medium with complex rheology. *Proceedings of Academenergo*. 2006; 4:79–86.
2. Volkov A.K., Kudryashov N.A. Group analysis of high-order equations for describing the Fermi–Pasta–Ulam model. *Bulletin of the National Research Nuclear University "MEPhI*". 2016;5(6):528–533.
3. Li Z.-H., Peng A.-P., Zhang H.-X., Yang J.-Y. Rarefied gas flow simulations using high-order gas-kinetic unified algorithms for Boltzmann model equations. *Progress in Aerospace Sciences*. 2015;74:81–113.
4. Arshad M., Seadawy A.R., Lu D. Bright–dark solitary wave solutions of generalized higher-order nonlinear Schrödinger equation and its applications in optics. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. – 2017;31(16):1711–1721.
5. Xu D., Song X., Yan W., Jiang B. Model-free adaptive command-filtered-backstepping sliding mode control for discrete-time high-order nonlinear systems. *Information Sciences*. 2019;485:141–153.
6. Belyaeva T.L., Serkin V.N. Nonlinear dynamics of nonautonomous solitons in external potentials expressed by time-varying power series: exactly solvable higher-order nonlinear and dispersive models. *Nonlinear Dynamics*. 2022;10:1153–1162.
7. Wu J., Luo Z., Zheng J., Jiang C. Incremental modeling of a new high-order polynomial surrogate model. *Applied Mathematical Modelling*. 2016;40(7–8):4681–4699.
8. Zhu Q., Song A.-G., Zhang T.-P., Yang Y.-Q. Fuzzy adaptive control of delayed high order nonlinear systems. *International Journal of Automation and Computing*. 2012;9:191–199.
9. Botti M., Di Pietro D.A., Sochala P. A Hybrid High-Order Method for Nonlinear Elasticity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2017;55(6)
10. Kumar R. Double internal loop higher-order recurrent neural network-based adaptive control of the nonlinear dynamical system. *Soft Computing*. 2023;27:17313–17331.
11. Noskov S.I. An approach to the formalization of nested piecewise linear regression. *International Journal of the Humanities and Natural Sciences*. 2023; 1–2 (76): 218–220.
12. Noskov S.I. Some forms of nested piecewise linear regression. *Izvestia of the Tula State University. Technical science*. 2023;3:467–469.
13. Noskov S.I., Belinskaya S.I. Calculation of parameter estimates for homogeneous nested piecewise linear regression. *Herald of the Dagestan State Technical University. Technical Science*. 2023;50(4):115–120.

Сведения об авторах:

Носков Сергей Иванович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий и защиты информации; sergey.noskov.57@mail.ru

Медведев Александр Петрович, ассистент кафедры информационных технологий и защиты информации; medvedeff.a.p@yandex.ru

Information about authors:

Sergey I. Noskov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof., Department of Information Technologies and Information Security; sergey.noskov.57@mail.r

Alexander P. Medvedev, Assistant, Department of Information Technology and Information Security; medvedeff.a.p@yandex.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 20.09.2025.

Одобрена после рецензирования/Reviced 29.10.2025.

Принята в печать/Accepted for publication 26.01.2026.