

**Упрощённая математическая модель динамики беспилотного
транспортного средства с двумя поворотными осями**

И.В. Лобачев, А.Л. Масленников

МГТУ им. Н.Э. Баумана,

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, с. 1, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является создание эффективной модели динамики беспилотного транспортного средства с двумя поворотными осями, пригодной для разработки алгоритмов автономного управления. **Метод.** Исследование основано на методах математического моделирования. **Результат.** В работе представлена математическая модель динамики беспилотного транспортного средства (БТС) с двумя поворотными осями, которая учитывает движение центра масс, динамику подвески, вращение корпуса вокруг центра масс по углам тангажа и крена, влияние отрыва колёс от опорной поверхности вследствие деформации подвески и изменения вертикальных нагрузок, силу тяжести в продольном движении при наклоне кузова. Предложен аналитический метод расчёта главных моментов инерции, основанный на геометрических параметрах и положении кузова, колёс и центра масс груза. В целях упрощения моделирования приняты допущения: не учитывается динамика вращения колёс, взаимодействие шин с дорогой описано упрощённо, а динамика силовой установки и рулевых приводов представлены дифференциальными уравнениями первой степени. **Вывод.** Входы и выходы математической модели соответствуют реальным сигналам в бортовом комплексе управления, что обеспечивает её применимость для разработки и отладки алгоритмов управления. Результаты моделирования показали корректность описанных соотношений для моделирования динамики БТС и их применимость для задач отладки систем управления движением БТС.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика беспилотного транспортного средства, две поворотных оси, динамика подвески, вычисление моментов инерции, автоматическое управление, алгоритмы управления

Для цитирования: И.В. Лобачев, А.Л. Масленников. Упрощённая математическая модель динамики беспилотного транспортного средства с двумя поворотными осями. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2026;53(1):123-138. DOI:10.21822/2073-6185-2026-53-1-123-138.

**Simplified mathematical model of the dynamics of an unmanned vehicle
with two steering axes**

I.V. Lobachev, A.L. Maslennikov

Bauman Moscow State Technical University,
2nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia

Abstract. Objective. The aim of this study is to create an effective model of the dynamics of a dual-axis unmanned vehicle, suitable for developing autonomous control algorithms. **Method.** The study is based on mathematical modeling methods. **Result.** This paper presents a mathematical model describing the dynamics of an unmanned vehicle with two steering axes. It considers the dynamics of the center of mass, suspension dynamics, body rotation around the center of mass at pitch and roll angles, the effect of wheel lift-off due to suspension deformation and changes in vertical loads, and the force of gravity during longitudinal movement when the body is tilted. An analytical method for calculating the moments of inertia about the main axes is proposed, based on the geometric parameters and position of the body, wheels, and the center of mass of the load.

To simplify the modeling, the following assumptions were made: wheel rotational dynamics are not considered, tire-road interaction is described in a simplified manner, and the dynamics of the power and steering gears approximated by first order differential equations. **Conclusion.** The input and output of the proposed mathematical model correspond to real signals from the onboard control system, ensuring its applicability for debugging control algorithms under conditions close to operational ones. The simulation results demonstrated the correctness of the described relationships for modeling unmanned vehicle dynamics and their applicability for debugging motion control systems.

Keywords: mathematical modeling, vehicle dynamics, two steering axes, suspension dynamics, calculation of moments of inertia, autonomous control, control algorithms

For citation: I.V. Lobachev, A.L. Maslennikov. Simplified mathematical model of the dynamics of an unmanned vehicle with two steering axes. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2026;53(1):123-138. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2026-53-1-123-138.

Введение. Внедрение беспилотных решений в закрытых промышленных территориях, например беспилотных карьерных самосвалов в карьерах, как вида беспилотных транспортных средств (БТС), имеет свои особенности ввиду более контролируемых условий эксплуатации и большей юридической определённости [1]. На практике подобные решения реализуют, в частности, Volvo, Komatsu и КАМАЗ [2], демонстрируя особенности конструкций (безкабинная компоновка, две поворотные оси, гибридные силовые установки, высокий кузов), которые определяют специфические требования к необходимости разработки математической модели [3].

Постановка задачи. Для разработки системы управления, обеспечивающей автономное движение БТС в карьере, необходимо разработать математическую модель одновременно достаточной степени адекватности и рациональной сложности для эффективного моделирования пространственного движения [4].

Математическое моделирование широко применяется в автомобильной отрасли для исследования функционирования дорожно-транспортных систем и их безопасности [5, 6], так и в сфере исследования динамики транспортных средств (ТС). Существует большое количество математических моделей колёсных ТС, как основы БТС, которые описывают продольную [7, 8], боковую динамику [9] и контакт шин с дорогой [10, 11], а также рулевое управление [12]. Модели силовой установки и её взаимодействие с ходовой частью подробно рассматриваются в работах, посвящённых моделированию приводных систем и оптимизации их параметров [13, 14]. В ряде работ рассматривается детальное моделирование подвески, включая активные схемы [15, 16]. Имеются примеры моделирования карьерных самосвалов и тяжёлой техники в целом, но предлагаемые подходы требуют значительных вычислительных ресурсов для полноценного трёхмерного моделирования [17, 18].

Таким образом, существует достаточно большое количество математических моделей различных систем и подсистем ТС, которые в целом могут рассматриваться как математические модели БТС. Однако остаётся нерешённой задача создания комплексной и в то же время вычислительно эффективной модели карьерного БТС с двумя поворотными осями, пригодной для разработки алгоритмов автономного управления.

Методы исследования. В работе предлагается упрощённая, но комплексная математическая модель БТС, учитывающая динамику центра масс (ЦМ), подвески, вращение вокруг ЦМ, влияние отрыва колёс и изменение нагрузок при движении на уклонах, которая включает алгоритма расчёт моментов инерции в зависимости от геометрии и загрузки БТС, а также блок расчёта кинематики поворота с двумя поворотными осями. Описаны системы координат, динамика рулевого управления, силовой установки, расчёт моментов инерции, динамика подвески, а также динамика плоского, и вращательного движения БТС, а также его движения в вертикальной плоскости. Проведено математическое моделирование описанной системы при движении по заданному маршруту с заданной скоростью.

Для формируемой математической модели введены стартовая, нормальная и связанная системы координат (СК), как показано на рис. 1 [19]. Стартовая СК неподвижна, горизонтальная плоскость $O_0X_0Z_0$ образована осями O_0X_0 , направленной вверх и O_0Z_0 , направленной вправо, ось O_0Y_0 направлена вверх. Нормальная СК $OX_gY_gZ_g$ подвижна, ось OY_g направлена вверх по местной вертикали, ось OX_g направлена из ЦМ БТС вперёд, ось OZ_g направлена из ЦМ вправо. Связанная СК $OXYZ$ подвижна, ось OX расположена в плоскости симметрии БТС и направлена от задней к передней его части, ось OY расположена в одной плоскости с осью OX и направлена к верхней части БТС, ось OZ направлена к правой части БТС, если смотреть вперёд по оси OX .

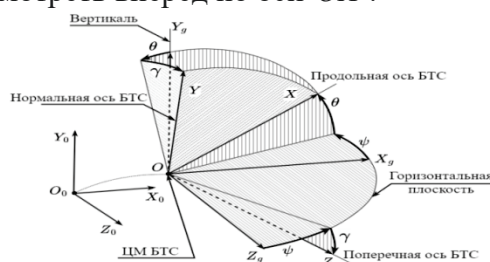


Рис. 1 – СК и углы Эйлера, используемые в работе
Fig. 1 – Coordinate systems and Euler angles used in the paper

Для кинематических соотношений определено, что угол рыскания ψ определяется как угол между осью OX_g и проекцией продольной скорости вдоль оси OX на горизонтальную плоскость OX_gZ_g , угол тангажа θ как угол между OX и плоскостью OX_gZ_g , а угол крена γ как угол между OZ и осью OZ_g при нулевом рыскании. Предлагаемая математическая модель может быть представлена в виде блочной структуры, которая представлена на рис. 2, где пунктирными линиями отмечены связи, являющиеся опциональными, которые могут присутствовать в случае необходимости, однако в рамках данной работы не рассматриваются.

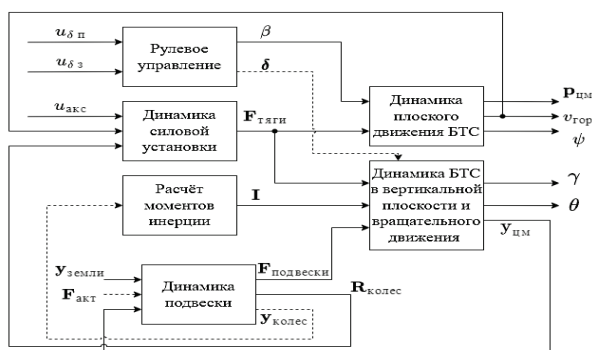


Рис. 2 – Структура математической модели БТС
Fig. 2 – USV mathematical model scheme

В модели выделяются следующие блоки-подмодели: расчёт моментов инерции, динамика силовой установки, рулевое управление, горизонтальная динамика, динамика движения в вертикальной плоскости, динамика движения вокруг ЦМ, динамика подвески. Далее рассмотрены математические описания каждого блока – каждой подсистемы

Рулевое управление. Блок описывает кинематику и динамику рулевого управления и принимает на вход управляющие воздействия $u_{\delta п}$, $u_{\delta з}$ – желаемые углы поворота передней и задней осей соответственно в радианах, не превышающие по модулю $u_{\delta п max}$, $u_{\delta з max}$, что математически можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{\pi} = \frac{1}{\tau_{\delta_{\pi}}} (u_{\delta_{\pi}} - \delta_{\pi}), |u_{\delta_{\pi}}| < u_{\delta_{\pi} \max} \\ \dot{\delta}_{\delta_3} = \frac{1}{\tau_{\delta_{\delta_3}}} (u_{\delta_{\delta_3}} - \delta_{\delta_3}), |u_{\delta_{\delta_3}}| < u_{\delta_{\delta_3} \max} \end{cases} \quad (1)$$

где $\tau_{\delta_{\pi}}$, $\tau_{\delta_{\delta_3}}$ – постоянные времени поворота, с; δ_{π} – угол поворота передней оси, рад; δ_{δ_3} – угол поворота задней оси, рад.

Результатом интегрирования системы (1) являются углы поворота передней и задней осей, согласно которым далее определяется вектор углов поворота отдельных колёс $\delta = [\delta_{\pi л}, \delta_{\pi п}, \delta_{\delta_3 л}, \delta_{\delta_3 п}]^T$ (пл – переднее левое, пп – переднее правое, зл – заднее левое, зп – заднее правое) и угол увода β согласно соотношению [20]:

$$\beta = \arctg \left(\frac{L_{\pi} \operatorname{tg}(\delta_{\delta_3}) + L_{\delta_3} \operatorname{tg}(\delta_{\pi})}{L_{\pi}} \right) \quad (2)$$

где L_{π} – расстояние от центра масс БТС до его передней оси, м; L_{δ_3} – расстояние от центра масс БТС до задней оси, м. Для L_{π} и L_{δ_3} , выполняется соотношение для общей длины шасси БТС $L_{\pi} + L_{\delta_3} = L_{\text{ш}}$.

Для определения вектора углов поворота колёс $\delta = [\delta_{\pi л}, \delta_{\pi п}, \delta_{\delta_3 л}, \delta_{\delta_3 п}]^T$ используется следующая последовательность вычислений. Сначала определяются координаты $O_{\text{МЦВ}} = [x_{\text{МЦВ}} \ 0 \ z_{\text{МЦВ}}]^T$ мгновенного центра вращения (МЦВ) в связанной с БТС СК

$$\begin{aligned} x_{\text{МЦВ}} &= L_{\pi} - t \sin(\delta_{\pi}) \\ z_{\text{МЦВ}} &= -t \cos(\delta_{\pi}) \end{aligned} \quad (3)$$

по следующим соотношениям:

$$t = \frac{(L_{\pi} + L_{\delta_3})}{\sin(\delta_{\pi} - \delta_{\delta_3})} \cos(\delta_{\delta_3}). \quad (4)$$

Если знаменатель ур. (4) стремится к нулю, то БТС движется прямолинейно. Иначе вычисляется кривизна траектории κ , обратно пропорциональная радиусу поворота $R_{\text{поворота}}$:

$$\kappa = \frac{1}{R_{\text{поворота}}} = \frac{\operatorname{tg}(\delta_{\pi}) - \operatorname{tg}(\delta_{\delta_3})}{L_{\pi} + L_{\delta_3}} \quad (5)$$

Углы поворота колёс без учёта геометрии Аккермана принимаются равными углам поворота соответствующих осей как $\delta = [\delta_{\pi л}, \delta_{\pi п}, \delta_{\delta_3 л}, \delta_{\delta_3 п}]^T$. Для соблюдения геометрии Аккермана, используются ранее вычисленные координаты МЦВ, а также вычисляются положения колёс в связанной СК:

$$\begin{cases} O'_{\pi л} = [L_{\pi} \ 0 \ -W_{\pi л}]^T \\ O'_{\pi п} = [L_{\pi} \ 0 \ W_{\pi п}]^T \\ O'_{\delta_3 л} = [-L_{\delta_3} \ 0 \ -W_{\delta_3 л}]^T \\ O'_{\delta_3 п} = [-L_{\delta_3} \ 0 \ W_{\delta_3 п}]^T \end{cases} \quad (6)$$

где W_{π} – расстояние от ЦМ до правого края БТС, W_{δ_3} – расстояние от ЦМ до левого края БТС.

Тогда, векторы направлений от центра поворота к каждому из колёс определяются согласно соотношению:

$$\mathbf{p}_{\text{МЦВ}, i} = \mathbf{O}_{\text{МЦВ}} - \mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} p_{x,i} \\ p_{y,i} \\ p_{z,i} \end{bmatrix}, i = (\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп}) \quad (7)$$

На основании продольной $p_{x,i}$ и боковой $p_{z,i}$ компонент вектора направления каждого колеса до МЦВ, определяется его угол поворота колеса в зависимости от направления поворота:

$$\delta_i = \begin{cases} \arctg\left(\frac{p_{x,i}}{p_{z,i}}\right), z_{\text{МЦВ}} > 0 \\ -\arctg\left(\frac{p_{x,i}}{-p_{z,i}}\right), z_{\text{МЦВ}} < 0 \end{cases}, i = (\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп}) \quad (8)$$

Динамика силовой установки. Блок описывает динамику изменения тяговых сил на каждом из колёс в отдельности, возникающих вследствие работы силовой установки и распределения её тягового момента между колёсами в зависимости от входной величины $u_{\text{акс}}$ – объединённого значения педалей акселератора и тормоза. Учитывается также соприкосновение колеса с землёй через наличие реакции в точке касания и величины силы сопротивления движению в ней. Результатом расчётов в блоке является вектор сил тяги $\mathbf{F}_{\text{тяги}} = [F_{\text{тяги пл}}, F_{\text{тяги пп}}, F_{\text{тяги зл}}, F_{\text{тяги зп}}]^T$, каждый элемент которого формируется следующим образом с учётом отрыва колеса от земли:

$$F_{\text{тяги}, i} = \begin{cases} \frac{F_{\text{тяговая}}}{4} - F_{\text{сопр}}, R_i > 0 \\ 0, R_i \leq 0 \end{cases}, i = (\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп}) \quad (9)$$

где $F_{\text{тяговая}}$ – суммарная тяговая сила, подводимая к колёсам, Н; $F_{\text{сопр}}$ – сила сопротивления на колёсах, Н; R_i – вертикальная реакция в соответствующем колесе, меньшая или равная нулю при отрыве колеса от поверхности, Н.

Максимальное суммарное значение тяговой силы $F_{\text{тяговая max}}$, приводимое к колёсам, определяется по соотношению:

$$F_{\text{тяговая max}} = \frac{T_{\text{тяговый max}}}{R_{\text{колеса}}} \quad (10)$$

где $T_{\text{тяговый max}}$ – максимальный тяговый момент силовой установки, Нм; $R_{\text{колеса}}$ – радиус колеса, м.

Мгновенное значение тяговой крутящей силы $F_{\text{тяговая}}$, формируемое силовой установкой с учётом нажатия педали акселератора $u_{\text{акс}}$, определяется через решение дифференциального уравнения:

$$\dot{F}_{\text{тяговая}} = \frac{1}{\tau_{\text{СУ}}} (u_{\text{акс}} F_{\text{тяговая max}} - F_{\text{тяговая}}), u_{\text{акс}} \in [-1; 1] \quad (11)$$

где $\tau_{\text{СУ}}$ – постоянная времени аperiodического процесса, с.

Крутящая сила, подводимая к колесу, учитывается лишь в случае положительного значения силы реакции R_i , $i \in \{\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп}\}$ в данном колесе. Помимо этого, силовая установка теряет силу, подводимую к колёсам, на преодоление сопротивления, увеличивающегося с ростом скорости. Если допустить, что БТС представляет собой карьерный самосвал с электрическим тяговым приводом, то силу сопротивления $F_{\text{сопр}}$ можно аппроксимировать соотношением [13, 17]:

$$F_{\text{сопр}} = C_{\text{сопр}} v_{\text{гор}}^4 \text{sign}(v_{\text{гор}}) \quad (12)$$

где $C_{\text{сопр}}$ – коэффициент сопротивления, который можно вычислить, например, согласно соотношению для того, чтобы при максимальной заданной скорости БТС вся тяговая сила $F_{\text{тяговая}}$ уходила на преодоление сопротивления, $\frac{F_{\text{тяговая}}}{4} - F_{\text{сопр}} = 0$:

$$C_{\text{сопр}} = \frac{F_{\text{тяговая max}}}{4v_{\text{гор max}}^4}, \quad (13)$$

где $v_{\text{гор max}}$ – максимальная желаемая горизонтальная скорость БТС, м/с. Четвёртая степень в знаменателе означает, что суммарная сила сопротивления поровну делится между четырьмя колёсами.

Расчёт моментов инерции. Блок позволяет рассчитать инерционные свойства системы, состоящей из шасси БТС, груза и колёс, с учётом их геометрических параметров в виде тензора инерции системы

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad (14)$$

который состоит из моментов инерции системы вокруг осей OX , OY и OZ , и вычисляемый как:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\text{ш ЦМ}} + \mathbf{I}_{\text{г ЦМ}} + \sum_{i=\{\text{пл, пп, зл, зп}\}} \mathbf{I}_{\text{к ЦМ}, i} \quad (15)$$

где $\mathbf{I}_{\text{ш ЦМ}}$ – тензор инерции шасси при вращении вокруг ЦМ, вычисляемый по (27); $\mathbf{I}_{\text{г ЦМ}}$ – тензор инерции груза при вращении вокруг ЦМ, вычисляемый по (28); $\mathbf{I}_{\text{к ЦМ}, i}$ – тензор инерции каждого из колёс при вращении вокруг ЦМ, вычисляемый по (29). Тензор инерции каждого из тел системы полагается неизменным. Считается, что элементы, не принадлежащие главной диагонали, малы, и ими возможно пренебречь.

Динамика подвески. Блок позволяет определить силы, возникающие в подвеске [21] исходя из высоты поверхности $\mathbf{y}_{\text{земли}} = [y_{\text{земли пл}}, y_{\text{земли пп}}, y_{\text{земли зл}}, y_{\text{земли зп}}]^T$ под колёсами и величины опциональной активной силы $\mathbf{F}_{\text{акт}} = [F_{\text{акт пл}}, F_{\text{акт пп}}, F_{\text{акт зл}}, F_{\text{акт зп}}]^T$ в подвеске каждого из колёс. Выходом подсистемы динамики подвески являются силы $\mathbf{F}_{\text{подв}} = [F_{\text{подв пл}}, F_{\text{подв пп}}, F_{\text{подв зл}}, F_{\text{подв зп}}]^T$, создаваемые подвеской каждого из колёс, вычисляемые как:

$$F_{\text{подв}, i} = F_{\text{акт}, i} - F_{\text{упр}, i}, \quad i = (\text{пл, пп, зл, зп}) \quad (16)$$

где $F_{\text{упр}, i}$ – упругая сила, создаваемая элементами подвески, Н, которая, если модель подвески – «пружина-демпфер», определяется соотношением:

$$F_{\text{упр}, i} = K_s (y_{\text{шасси}, i} - y_{\text{к}, i} - L_0) + B_s (\dot{y}_{\text{шасси}, i} - \dot{y}_{\text{к}, i}), \quad i = (\text{пл, пп, зл, зп}) \quad (17)$$

где $y_{\text{шасси}, i}$ – высота шасси над уровнем поверхности, м; $y_{\text{к}, i}$ – высота колеса над уровнем поверхности, м; $\dot{y}_{\text{шасси}, i}$ – вертикальная скорость шасси над колесом, м/с; $\dot{y}_{\text{к}, i}$ – вертикальная скорость колеса, м/с; K_s – коэффициент упругости пружины, Н/м; B_s – коэффициент демпфирования подвески, Нс/м.

Координаты и скорости шасси в предположении малости углов крена и тангажа вычисляются по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
 y_{\text{шасси пл}} &= y_{\text{ЦМ}} + L_{\text{п}} \sin(\theta) + W_{\text{л}} \sin(\gamma) \\
 y_{\text{шасси пп}} &= y_{\text{ЦМ}} + L_{\text{п}} \sin(\theta) - W_{\text{п}} \sin(\gamma) \\
 y_{\text{шасси зл}} &= y_{\text{ЦМ}} - L_{\text{з}} \sin(\theta) + W_{\text{л}} \sin(\gamma) \\
 y_{\text{шасси зп}} &= y_{\text{ЦМ}} - L_{\text{з}} \sin(\theta) - W_{\text{п}} \sin(\gamma) \\
 \dot{y}_{\text{шасси пл}} &= \dot{y}_{\text{ЦМ}} + L_{\text{п}} \dot{\theta} + W_{\text{л}} \dot{\gamma} \\
 \dot{y}_{\text{шасси пп}} &= \dot{y}_{\text{ЦМ}} + L_{\text{п}} \dot{\theta} - W_{\text{п}} \dot{\gamma} \\
 \dot{y}_{\text{шасси зл}} &= \dot{y}_{\text{ЦМ}} + L_{\text{з}} \dot{\theta} + W_{\text{л}} \dot{\gamma} \\
 \dot{y}_{\text{шасси зп}} &= \dot{y}_{\text{ЦМ}} + L_{\text{з}} \dot{\theta} - W_{\text{п}} \dot{\gamma}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Реакции в точке касания каждого из колёс с поверхностью, вычисляются как:

$$R_i = -K_t (y_{\text{колёса}, i} - y_{\text{земли}, i} - R_k), i = (\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп}) \tag{19}$$

где K_t – коэффициент упругой силы в шине, Н/м; R_k – радиус колеса, м.

Высоты колёс $y_{\text{колёс}} = [y_{\text{к пл}}, y_{\text{к пп}}, y_{\text{к зл}}, y_{\text{к зп}}]^T$ определяются их динамикой, формируемые для каждого колеса дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\begin{aligned}
 m_k \ddot{y}_{\text{к}, i} &= -F_{\text{подв}, i} - K_t (y_{\text{к}, i} - y_{\text{земли}, i} - R_k) - m_k g \cos(\gamma) \cos(\theta), \\
 i &= (\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп})
 \end{aligned} \tag{20}$$

где m_k – масса колеса, кг; g – ускорение свободного падения, м/с².

Динамика плоского движения. В блоке на основании суммарной тяговой силы $F_{\text{тяги}}$ на колёсах, а также текущего угла увода β , определяются положение ЦМ в горизонтальной плоскости стартовой СК $\mathbf{p}_{\text{ЦМ}} = [x_{0 \text{ ЦМ}}, 0, z_{0 \text{ ЦМ}}]^T$, горизонтальная скорость $v_{\text{гор}}$, а также угол рыскания ψ , решением системы дифференциальных уравнений [22] в соответствии с кинематической схемой велосипедной модели, представленной на рис. 3:

$$\begin{cases} \dot{x}_{0 \text{ ЦМ}} = v_{\text{гор}} \cos(\psi + \beta) \\ \dot{z}_{0 \text{ ЦМ}} = -v_{\text{гор}} \sin(\psi + \beta) \\ \dot{\psi} = \frac{v_{\text{гор}}}{L_{\text{ш}}} (\sin(\delta_{\text{п}} - \beta) + \sin(\delta_{\text{з}} + \beta)) \\ \dot{v}_{\text{гор}} = \frac{1}{M_{\text{полная}}} F_{\text{тяги}} \end{cases} \tag{21}$$

где $M_{\text{полная}}$ – полная масса БТС, кг, определяемая из соотношения:

$$M_{\text{полная}} = M_{\text{ш}} + M_{\text{г}} + 4m_k, \tag{22}$$

где $M_{\text{ш}}$ – масса шасси БТС, кг; $M_{\text{г}}$ – масса груза, кг; m_k – масса колеса, кг.

Суммарная сила, действующая на БТС с учётом силы тяжести, вычисляется как:

$$F_{\text{тяги}} = \sum_{i=\{\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп}\}} F_{\text{тяги}, i} - M_{\text{полная}} g \sin(\theta) \tag{23}$$

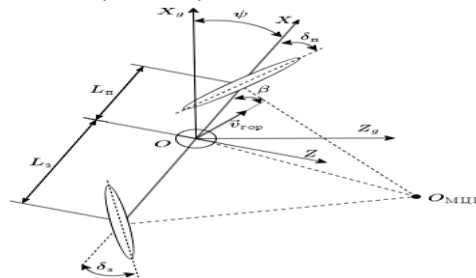


Рис. 3 – Кинематическая схема поворота велосипедной модели
Fig. 3 – Kinematic diagram of the bicycle model turn

Динамика в вертикальной плоскости и вращательное движение. Блок позволяет учесть влияние работы подвески на вертикальное перемещение ЦМ и вращение БТС вокруг него. Выходами этой подсистемы являются углы крена γ , тангажа θ и вертикальное положение ЦМ. Математическое описание данного блока представляет собой систему дифференциальных уравнений [23]:

$$\begin{cases} I_z \ddot{\theta} = (F_{\text{подв пл}} + F_{\text{подв пп}})L_{\text{п}} - (F_{\text{подв зл}} + F_{\text{подв зп}})L_{\text{з}} - \\ \quad - \sum_{i=\{\text{пл, пп, зл, зп}\}} (y_{\text{колеса, } i} - y_{\text{ЦМ}})F_{\text{тяги, } i} \\ I_x \ddot{\gamma} = (F_{\text{подв пл}} + F_{\text{подв зл}})W_{\text{л}} - (F_{\text{подв пп}} + F_{\text{подв зп}})W_{\text{п}} \\ M_{\text{ресс}} \ddot{y}_{\text{ЦМ}} = \sum_{i=\{\text{пл, пп, зл, зп}\}} F_{\text{подв, } i} - M_{\text{ресс}} g \cos(\theta) \cos(\gamma) \end{cases} \quad (24)$$

где $M_{\text{ресс}}$ – масса подрессоренной части БТС, поддерживаемой подвеской и располагающейся над ней, кг, которая определяется из соотношения:

$$M_{\text{ресс}} = M_{\text{ш}} + M_{\text{г}}. \quad (25)$$

С учётом влияния поворота колёс на изменение углов тангажа и крена, система уравнений (25) примет вид:

$$\begin{cases} I_z \ddot{\theta} = (F_{\text{подв пл}} + F_{\text{подв пп}})L_{\text{п}} - (F_{\text{подв зл}} + F_{\text{подв зп}})L_{\text{з}} - \\ \quad - \sum_{i=\{\text{пл, пп, зл, зп}\}} (y_{\text{колеса, } i} - y_{\text{ЦМ}})F_{\text{тяги, } i} \cos(\delta_i) \\ I_x \ddot{\gamma} = (F_{\text{подв пл}} + F_{\text{подв зл}})W_{\text{л}} - (F_{\text{подв пп}} + F_{\text{подв зп}})W_{\text{п}} - \\ \quad - \sum_{i=\{\text{пл, пп, зл, зп}\}} (y_{\text{колеса, } i} - y_{\text{ЦМ}})F_{\text{тяги, } i} \sin(\delta_i) \\ M_{\text{ресс}} \ddot{y}_{\text{ЦМ}} = \sum_{i=\{\text{пл, пп, зл, зп}\}} F_{\text{подв, } i} - M_{\text{ресс}} g \cos(\theta) \cos(\gamma) \end{cases} \quad (26)$$

Алгоритм расчёта положения ЦМ и тензора инерции БТС. Для определения моментов инерции системы используется алгоритм, основанный на представлении БТС в виде набора тел и расчёте моментов инерции данной системы: шасси представляется в виде параллелепипеда массой $M_{\text{ш}}$, длиной $L_{\text{ш}}$, шириной $W_{\text{ш}}$ и высотой $H_{\text{ш}}$; груз представляется в виде параллелепипеда массой $M_{\text{г}}$, длиной $L_{\text{г}}$, шириной $W_{\text{г}}$ и высотой $H_{\text{г}}$, смещённый от центра шасси на $x_{\text{г}}$ и $z_{\text{г}}$; колёса представляются в виде четырёх цилиндров массой $m_{\text{к}}$, радиусом $R_{\text{к}}$ и толщиной $d_{\text{к}}$. Кинематическая схема рассматриваемой системы приведена на рис.3.

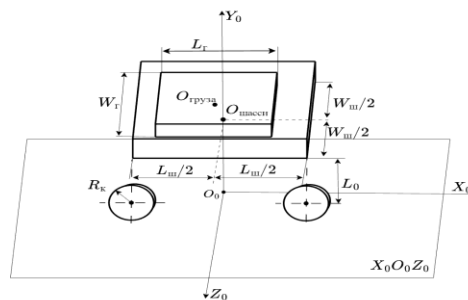


Рис. 4 – Кинематическая схема рассматриваемой системы
 Fig. 4 – Kinematic diagram of the system under consideration

По заданным массогабаритным параметрам объектов, определяются их тензоры инерции при вращении вокруг собственных ЦМ, в соответствии с соотношениями:

$$\begin{aligned} I_{x \text{ шасси}} &= \frac{M_{\text{ш}}}{12}(W_{\text{ш}}^2 + H_{\text{ш}}^2), \quad I_{y \text{ шасси}} = \frac{M_{\text{ш}}}{12}(W_{\text{ш}}^2 + L_{\text{ш}}^2), \quad I_{z \text{ шасси}} = \frac{M_{\text{ш}}}{12}(L_{\text{ш}}^2 + H_{\text{ш}}^2) \\ I_{x \text{ груза}} &= \frac{M_{\text{г}}}{12}(W_{\text{г}}^2 + H_{\text{г}}^2), \quad I_{y \text{ груза}} = \frac{M_{\text{г}}}{12}(W_{\text{г}}^2 + L_{\text{г}}^2), \quad I_{z \text{ груза}} = \frac{M_{\text{г}}}{12}(L_{\text{г}}^2 + H_{\text{г}}^2) \\ I_{x \text{ колеса}} &= \frac{m_{\text{к}}}{12}(3R_{\text{к}}^2 + d_{\text{к}}^2), \quad I_{y \text{ колеса}} = \frac{m_{\text{к}}}{12}(3R_{\text{к}}^2 + d_{\text{к}}^2), \quad I_{z \text{ колеса}} = \frac{m_{\text{к}}}{2}R_{\text{к}}^2 \end{aligned} \quad (27)$$

где $I_{x \text{ шасси}}$, $I_{y \text{ шасси}}$, $I_{z \text{ шасси}}$ – осевые моменты инерции параллелепипеда шасси $\mathbf{I}_{\text{шасси}}$; $I_{x \text{ груза}}$, $I_{y \text{ груза}}$, $I_{z \text{ груза}}$ – осевые моменты инерции параллелепипеда груза $\mathbf{I}_{\text{груза}}$; $I_{x \text{ колеса}}$, $I_{y \text{ колеса}}$, $I_{z \text{ колеса}}$ – осевые моменты инерции однородного цилиндра колеса $\mathbf{I}_{\text{колеса}}$.

Координаты ЦМ шасси $O_{\text{шасси}}$, груза $O_{\text{груза}}$, переднего левого $O_{\text{колеса пл}}$, переднего правого $O_{\text{колеса пр}}$, заднего левого $O_{\text{колеса зл}}$ и заднего правого $O_{\text{колеса зп}}$ колёс могут быть определены, исходя из свойств тел системы [24], [25] и указаний по их расположению следующим образом:

$$\begin{aligned} O_{\text{шасси}} &= \begin{bmatrix} 0 & R_{\text{к}} + L_0 + \frac{H_{\text{ш}}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \\ O_{\text{груза}} &= \begin{bmatrix} x_{\text{г}} & R_{\text{к}} + L_0 + H_{\text{ш}} + \frac{H_{\text{г}}}{2} & z_{\text{г}} \end{bmatrix}^T \\ O_{\text{колеса пл}} &= \begin{bmatrix} \frac{L_{\text{ш}}}{2} & R_{\text{к}} & -\frac{W_{\text{ш}}}{2} \end{bmatrix}^T \\ O_{\text{колеса пр}} &= \begin{bmatrix} \frac{L_{\text{ш}}}{2} & R_{\text{к}} & \frac{W_{\text{ш}}}{2} \end{bmatrix}^T \\ O_{\text{колеса зл}} &= \begin{bmatrix} -\frac{L_{\text{ш}}}{2} & R_{\text{к}} & -\frac{W_{\text{ш}}}{2} \end{bmatrix}^T \\ O_{\text{колеса зп}} &= \begin{bmatrix} -\frac{L_{\text{ш}}}{2} & R_{\text{к}} & \frac{W_{\text{ш}}}{2} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (28)$$

Координаты ЦМ всей системы $O_{\text{системы}}$ определяются как:

$$O_{\text{системы}} = \frac{1}{M_{\text{ш}} + M_{\text{г}} + 4m_{\text{к}}} \left(M_{\text{ш}} O_{\text{шасси}} + M_{\text{г}} O_{\text{груза}} + m_{\text{к}} (O_{\text{колеса пл}} + O_{\text{колеса пр}} + O_{\text{колеса зл}} + O_{\text{колеса зп}}) \right) \quad (29)$$

Расстояние от ЦМ до краёв шасси определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\text{п}} &= \frac{L_{\text{ш}}}{2} - O_{\text{системы}} \\ L_{\text{з}} &= L_{\text{ш}} - L_{\text{п}} \\ W_{\text{п}} &= \frac{W_{\text{ш}}}{2} - O_{\text{системы}} \\ W_{\text{л}} &= W_{\text{ш}} - W \end{aligned} \quad (30)$$

Для определения тензора инерции системы вокруг ЦМ, необходимо сложить тензоры инерции отдельных тел системы, приведённые при помощи теоремы Штейнера для вращения вокруг центра масс системы [26], [27]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{\text{шасси}} &= \mathbf{O}_{\text{шасси}} - \mathbf{O}_{\text{системы}} \\
 \mathbf{p}_{\text{груза}} &= \mathbf{O}_{\text{груза}} - \mathbf{O}_{\text{системы}} \\
 \mathbf{p}_{\text{колеса}, i} &= \mathbf{O}_{\text{колеса}, i} - \mathbf{O}_{\text{системы}}, i = (\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп}) \\
 \mathbf{I}_{\text{шасси ЦМ}} &= \mathbf{I}_{\text{шасси}} + M_{\text{ш}} ((\mathbf{p}_{\text{шасси}} \cdot \mathbf{p}_{\text{шасси}}) \mathbf{E} - \mathbf{p}_{\text{шасси}} \otimes \mathbf{p}_{\text{шасси}}) \\
 \mathbf{I}_{\text{груза ЦМ}} &= \mathbf{I}_{\text{груза}} + M_{\text{г}} ((\mathbf{p}_{\text{груза}} \cdot \mathbf{p}_{\text{груза}}) \mathbf{E} - \mathbf{p}_{\text{груза}} \otimes \mathbf{p}_{\text{груза}}) \\
 \mathbf{I}_{\text{колеса ЦМ } i} &= \mathbf{I}_{\text{колеса}} + m_{\text{к}} ((\mathbf{p}_{\text{колеса}, i} \cdot \mathbf{p}_{\text{колеса}, i}) \mathbf{E} - \mathbf{p}_{\text{колеса}, i} \otimes \mathbf{p}_{\text{колеса}, i}), \\
 i &= (\text{пл}, \text{пп}, \text{зл}, \text{зп})
 \end{aligned} \tag{31}$$

где $\mathbf{p}_{\text{шасси}}$ – вектор расстояний от ЦМ шасси до ЦМ системы; $\mathbf{p}_{\text{груза}}$ – вектор расстояний от ЦМ груза до ЦМ системы; $\mathbf{p}_{\text{колеса}, i}$ – вектор расстояний от ЦМ каждого из колёс до ЦМ системы; $\mathbf{E}$ – единичная матрица соответствующей размерности.

Таким образом, рассматриваемая комплексная математическая модель динамики БТС, описываемая в работе, формируется уравнениями динамики плоского движения (21), динамикой в вертикальной плоскости и динамикой вращательного движения (26), динамикой колёс (20) с учётом сил в подвеске, описываемых соотношением (16), динамикой рулевого управления из соотношений (1) с учётом (8) и динамикой силовой установки, описываемой соотношением (11) с учётом силы сопротивления движению (12) и взаимодействию с опорной поверхностью (9). Вектор состояния системы $\mathbf{x}$ имеет вид:

$$\mathbf{x} = [x_{\text{ЦМ}} \ y_{\text{ЦМ}} \ \dot{y}_{\text{ЦМ}} \ z_{\text{ЦМ}} \ v_{\text{гор}} \ \psi \ \theta \ \dot{\theta} \ \gamma \ \dot{\gamma} \ y_{\text{колес}} \ \dot{y}_{\text{колес}} \ \delta_{\text{п}} \ \delta_{\text{з}} \ F_{\text{крутящая}}]^T \tag{32}$$

где вектор вертикальных скоростей каждого из колёс $\dot{y}_{\text{колес}}$ имеет вид

$$\dot{y}_{\text{колес}} = [\dot{y}_{\text{колеса пл}} \ \dot{y}_{\text{колеса пп}} \ \dot{y}_{\text{колеса зл}} \ \dot{y}_{\text{колеса зп}}]^T \tag{33}$$

и определяется интегрированием соотношения (20) для каждого из колёс; вектор высот каждого из колёс $y_{\text{колес}}$ имеет вид

$$y_{\text{колес}} = [y_{\text{колеса пл}} \ y_{\text{колеса пп}} \ y_{\text{колеса зл}} \ y_{\text{колеса зп}}]^T \tag{34}$$

и определяется интегрированием элементов вектора (33).

Постановка вычислительного эксперимента. Для проверки адекватности полученной математической модели, описанные соотношения (1) – (34) реализованы в программном коде на языке MATLAB и проведены вычислительные эксперименты, в которых БТС двигалось по маршруту, состоящему из двух точек вдоль заданных траекторий по рельефной карте окружения. Проведено два вычислительных эксперимента, которые отличались геометрическими параметрами груза при неизменной массе, что позволило оценить влияние параметров груза на динамику вращательного движения БТС.

Параметры математической модели, использованные при моделировании, приведены в табл. 1. В качестве окружения, в котором выполняется движение, выступает карта рельефа карьера, сформированная как набор зон с нулевым и фиксированным наклоном таким образом, чтобы БТС при движении между углами карты, имеющими нулевую высоту, проходило участки подъема и спуска [30]. Карта приведена на рис. 5. На карте отмечены точки маршрута. Для обеспечения движения БТС спроектирована система управления с двумя контурами управления: первый контур содержит ПИ-регулятор по величине ошибки по скорости БТС и определяет значение нажатия педали акселератора; второй контур реализует ПИ-регулирование слежения за заданным курсом, который определяется с учётом текущего положения БТС и следующей целевой точкой маршрута.

Таблица 1. Параметры математической модели
Table 1. Parameters of the mathematical model

Параметр Parameter	Значение Value
Масса шасси $M_{\text{шасси}}$, кг Chassis weight	17000
Длина шасси $L_{\text{шасси}}$, м Chassis Length	8
Высота шасси $H_{\text{шасси}}$, м Chassis Height	2
Ширина шасси $W_{\text{шасси}}$, м Chassis Width	4
Масса груза $M_{\text{груза}}$, кг Cargo Weight	8000
Длина груза $L_{\text{груза}}$, м Cargo Length	8
Высота груза $H_{\text{груза}}$, м Cargo Height	1 ÷ 6
Ширина груза $W_{\text{груза}}$, м Cargo Width	4
Продольное смещение груза $x_{\text{груза}}$, м Longitudinal Cargo Offset	0
Боковое смещение груза $z_{\text{груза}}$, м Lateral Cargo Offset	0
Масса колеса $m_{\text{колеса}}$, кг Wheel Weight	1000
Радиус колеса $R_{\text{колеса}}$, м Wheel Radius	0,85
Толщина колеса d_k , м Wheel Thickness	0,5
Длина подвески в недеформированном состоянии L_0 , м Undeformed Suspension Length	1
Коэффициент упругости подвески K_s , Н/м Suspension Elasticity	200000
Коэффициент демпфирования подвески B_s , Нс/м Suspension Damping Coefficient	100000
Коэффициент упругости колеса K_t , Н/м Wheel Elasticity	300000
Максимальный момент $T_{\text{крутящий max}}$, Нм Maximum Torque	15000
Максимальный угол поворота осей $u_{\delta \text{ перед max}}, u_{\delta \text{ зад max}}$, град Maximum Axle Steering Angle	60°
Постоянная времени силовой установки τ_{CV} , с Powertrain Time Constant,	1
Постоянная времени рулевых механизмов $\tau_{\delta \text{ перед}}, \tau_{\delta \text{ зад}}$, с Steering Time Constant	3
Максимальная желаемая горизонтальная скорость ТС $v_{\text{гор max}}$, м/с Maximum desired horizontal speed of the vehicle, m/s	11

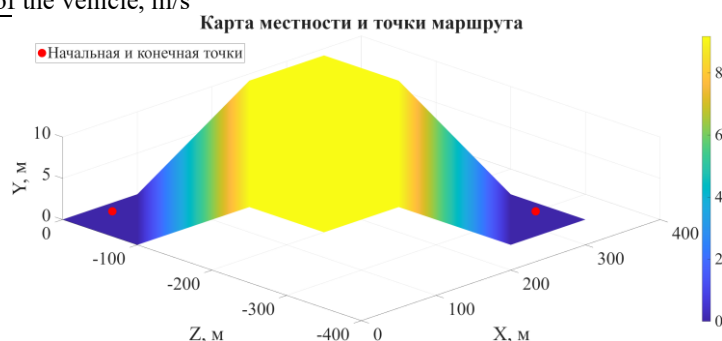


Рис. 5 – Карта рельефа и точки маршрута
Fig. 5 – Landscape map and route points

Обсуждение результатов. Результаты моделирования в виде положения БТС, сигналов управления и сил БТС, его скорости, а также углов крена и тангажа представлены 6–9 рис. 6-9. Скорость менялась от значения маневровой скорости 1 м/с до значения

крейсерской скорости 8 м/с. Полученные результаты показывают, что поведение математической модели соответствует ожиданиям – БТС движется вдоль заданного маршрута со скоростью, близкой к заданной, динамика углов Эйлера и подвески меняется в зависимости от изменения рельефа поверхности под колёсами.

Движение ТС по маршруту в пространстве

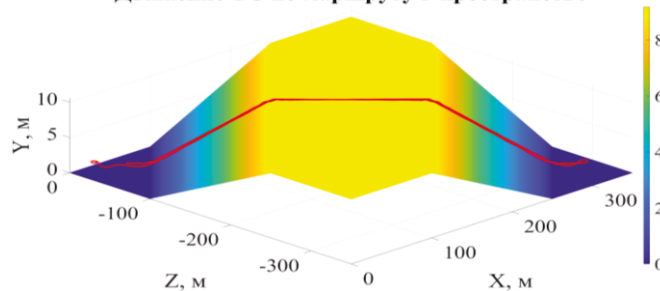


Рис. 6 –Траектория движения ТС по окружению
 Fig. 6 –Vehicle trajectory along the route

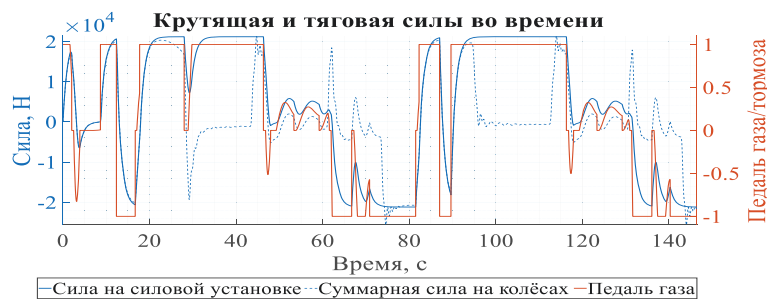


Рис. 7 – Педаля газа, сила на силовой установке и сила, подводимая к колёсам
 Fig. 7 – The gas pedal, the force on the power plant and the force supplied to the wheels

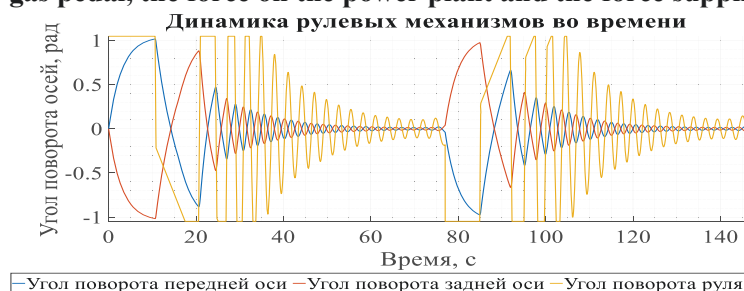


Рис. 8 – Заданный угол поворота колес и углы поворота осей во времени
 Fig. 8 – Specified wheel rotation angle and axle rotation angles over time

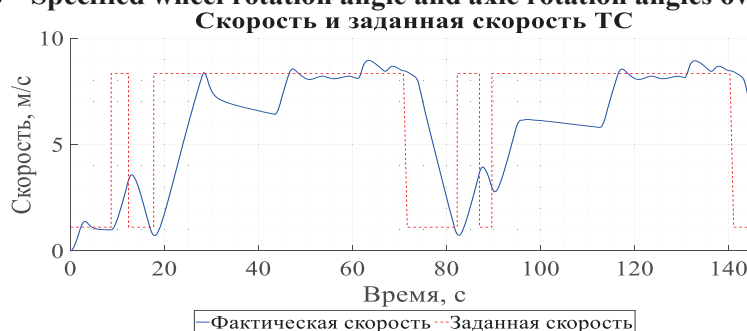


Рис. 9 – Заданная и фактическая скорости движения ТС
 Fig. 9 – Set and actual speed of the vehicle

Проведём сравнение влияния изменения массогабаритных параметров груза, а именно его высоты, на динамику БТС. Для этого проведём ещё один вычислительный эксперимент, в котором в шесть раз увеличим высоту груза при неизменных массовых параметрах. Значения углов крена и тангажа, полученные в результате моделирования, приведены на рис. 10.

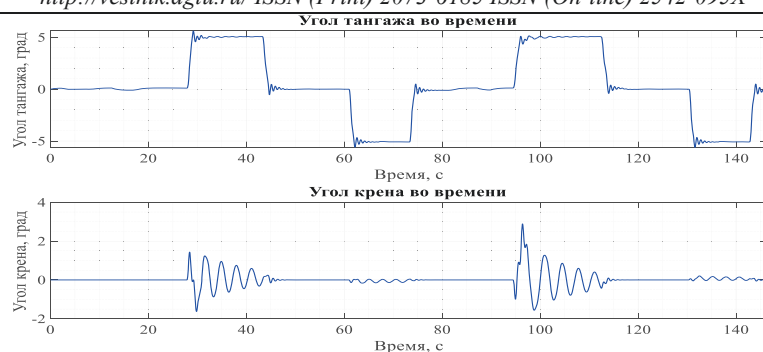


Рис. 10 – Значения углов тангажа и крена при движении по маршруту

Fig. 10 – Pitch and roll angle values when moving along the route

Результаты моделирования, проиллюстрированные на рис. 11, показывают, что при изменении массогабаритных параметров груза увеличивается амплитуда отклонений углов тангажа и крена, что соответствует поведению реального БТС и более сложных математических моделей [17]. Модель показала достаточную степень адекватности.

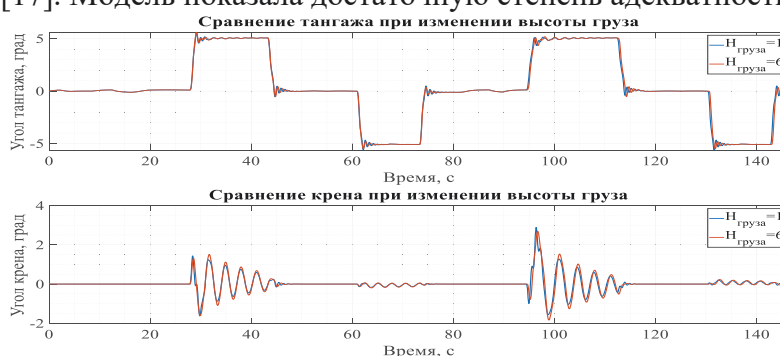


Рис. 11 – Сравнение углов тангажа и крена при увеличении высоты груза

Fig. 11 – Comparison of pitch and roll angles with increasing load height

Возможные отклонения поведения модели от реального БТС могут заключаться в отсутствии учёта пробуксовки колёс и скольжения БТС по наклонным поверхностям в боковом направлении, что не критично для исследования штатных режимов работы. Углы Эйлера меняются в соответствии с изменением рельефа поверхности, а увеличение высоты груза ожидаемо влечет увеличение амплитуды углов тангажа и крена. Модель показывает сравнительно высокое значение скорости работы при движении по заданной пространственной карте, что позволяет использовать вычислительные ресурсы на алгоритмы моделирования показаний системы навигации, например ГНСС и лидаров [29].

Вывод. В работе представлена математическая модель динамики БТС с двумя поворотными осями, предназначенная для разработки и отладки алгоритмов автономного управления. Предложенная модель учитывает особенности движения БТС в условиях карьера, включая трёхмерное перемещение ЦМ, динамику подвески, пространственное вращение корпуса, а также влияние уклонов на угловые параметры - тангаж и крен. Особое внимание уделено эффектам, связанным с отрывом колёс от опорной поверхности.

Одним из важных элементов модели является аналитический метод расчёта моментов инерции, учитывающий массогабаритные параметры БТС, положение кузова и уровень загрузки. Это позволяет адаптировать модель под различные эксплуатационные условия без необходимости привлечения сложных численных методов или экспериментальных данных. Несмотря на введённые упрощения, такие как отсутствие модели вращения колёс, упрощённое описание контакта шин с дорогой и отсутствие детального моделирования силовой установки и рулевых приводов - модель сохраняет достаточную физическую достоверность и согласована по входам и выходам с реальными БТС. Это делает её эффективным инструментом для отладки алгоритмов управления.

Таким образом, разработанная модель представляет сбалансированное решение, сочетающее адекватность, вычислительную эффективность и применимость в задачах проектирования автономных транспортных систем для закрытых промышленных территорий.

Библиографический список:

1. Распоряжение Правительства РФ от 27 ноября 2021 г. № 3363-р «О Транспортной стратегии Российской Федерации до 2030 года с прогнозом на период до 2035 года» [Электронный ресурс]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202112030006> (дата обращения: 07.08.2025). Приложение 10: Уровни автономности транспортных средств.
2. <https://www.vinnova.se/globalassets/mikrosajter/ffi/dokument/slutrapporter-ffi/cyklar-och-andra-fordon-rapporter/2021-04347engelska.pdf> (дата обращения: 05.04.2025). Wendin C., Wilhelmsson M., Melén C.T. и др. ASPECT – A System for Electric and Connected Transport Solution: public report [Электронный ресурс]. 2024.
3. Котиев Г.О., Дьяков А.С. Метод разработки ходовых систем высокоподвижных безэкипажных наземных транспортных средств // Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. № 1. С. 186-197.
4. Вассуф Я. Развитие беспилотных транспортных средств: проблемы экономики, управления, математического моделирования // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2023. №191. С.115-137. DOI:10.21515/1990-4665-191-021.
5. Гусейнов Р.В., Дадаева П.А., Шабазов М.М., Муталибов М.Т., Ахмедова М.Р. Особенности математического моделирования безопасности дорожного движения на автомобильных дорогах. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024;51(1):61-67. <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2024-51-1-61-67>
6. Баламирзоев А.Г., Салахов А.З., Селимханов Д.Н. Математическое моделирование движения автотранспорта и пешеходов на нерегулируемых перекрестках. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024;51(2):44-52. <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2024-51-2-44-52>
7. Ле В.Н. Продольная динамическая модель полноприводного автомобиля / Ван Нгиа Ле, Хоанг Фук Дам, Ван Фыонг Динь // Автотракторостроение и автомобильный транспорт : сборник научных трудов : в 2 томах / Белорусский национальный технический университет, Автотракторный факультет ; редкол.: Д. В. Капский, А. С. Поварехо (отв. ред.) [и др.]. – Минск : БНТУ, 2024. – Т. 1. – С. 30-37.
8. Яицков И.А., Поляков П.А. Продольная динамика транспортного средства при торможении // Известия ТулГУ. Технические науки. 2022. №10. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prodolnaya-dinamika-transportnogo-sredstva-pri-tormozhenii> (дата обращения: 27.08.2025).
9. Dębowski A., Faryński J.J., Żardecki D.P. The bicycle model of a 4WS car lateral dynamics for lane change controller // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2022;1(1247):012021.
10. Wong J.Y. Theory of Ground Vehicles. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2001; 528. ISBN 0-471-35461-9.
11. Pacejka H.B., Bakker E. The magic Formula Tyre Model. Proc. 1st International Tyre Colloquium. 1991:1-18.
12. Gao L., Dong Y., Zhao J. Dynamic Modeling and Characteristic Analysis of Articulated Steering Vehicles // Applied Sciences. 2023. № 8 (13). С. 5099.
13. Guzzella L. Vehicle Propulsion Systems: Introduction to Modeling and Optimization. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2013. XVI, 412 p. (Springer Series in Advanced Manufacturing). ISBN 978-3-642-35912-5. DOI: 10.1007/978-3-642-35913-2.
14. Строганов В.И., Сидоров К.М. Математическое моделирование основных компонентов силовых установок электромобилей и автомобилей с КЭУ : учеб. Пособие. М.: МАДИ. 2015. 100 с.
15. Minaker B. Modelling the dynamics of a vehicle with active geometry suspension // The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks: proceedings of the 26th International Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks (DyVehRoads 2019), August 12-16, 2019, Gothenburg, Sweden / ed. by R. Fröhling. Leiden: CRC Press/Balkema, 2021. P. 716-727.
16. Narendra M. A., Huzefa S. M., Bobere Prof. F. Mathematical Modelling and Simulation of Suspension System in MATLAB/SIMULINK // International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology. 2022. № 6 (10). С. 145–179.
17. Cheng L. Dynamic modeling and simulation of mining truck // 2022 4th International Academic Exchange Conference on Science and Technology Innovation (IAECST). 2022. P. 318-321. DOI: 10.1109/IAECST57965.2022.10062151.
18. Котиев Г.О., Горелов В.А., Бекетов А.А. Математическая модель движения вездеходного транспортного средства // Журнал автомобильных инженеров. 2008. № 1. С. 50 – 54.
19. Лебедев А.А. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: учебное пособие / А.А. Лебедев, Л.С. Чернобровкин; под ред. А.А. Лебедева. Москва: Машиностроение, 1973. 616 с.
20. Spentzas K. Kinematics of four-wheel-steering vehicles // Forschung im Ingenieurwesen. 2001. V. 66. P. 211-216. DOI: 10.1007/s100100100060.

21. Gillespie T.D. Fundamentals of Vehicle Dynamics. Warrendale: SAE International, 1992. 400 p. ISBN 1-56091-199-9.
22. Jazar R.N. Vehicle Dynamics: Theory and Application. 2nd ed. New York: Springer, 2014. XXII, 1066 p. (Springer Series in Advanced Manufacturing). ISBN 978-1-4614-8544-5. DOI: 10.1007/978-1-4614-8544-5.
23. Pacejka H.B. Tire and Vehicle Dynamics. 3rd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. 672 p. ISBN 978-0-08-097016-5.
24. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. 3-е изд., испр. Москва; Ижевск: Изд-во Научно-издательского центра "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 591 с. Библиогр.: с. 582. ISBN 5-93972-088-9.
25. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек: учебное пособие для СПО. 3-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2025. 336 с. ISBN 978-5-507-52520-1. URL: <https://e.lanbook.com/book/454238> (дата обращения: 07.08.2025).
26. Craig J.J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. Moscow; Izhevsk: Insti-tute of Computer Research, 2013. 564 p. (Dynamic Systems and Robotics). ISBN 978-5-4344-0164-7.
27. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2000. 720 с.
28. Вахламов В.К. Конструкция, расчет и эксплуатационные свойства автомобилей: учеб. пособие для вузов. Москва: Академия, 2009. 557 с. ISBN 978-5-7695-6608-0.
29. Лобачев И.В., Масленников А.Л. Моделирование работы двухмерного лидара для применения в задачах управления движением наземных транспортных средств в карьере // XLVIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых - пионеров освоения космического пространства "Королевские чтения": Сборник тезисов. Москва, 23-26 января 2024. Изд. МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2024. Т. 2. С. 514-517.
30. Лобачев И.В., Масленников А.Л., Пчелинцев В.Э. Алгоритм формирования трассы для имитационной модели движения карьерного транспортного средства // Автоматизация. Современные технологии. 2024, т. 78, № 4, с. 152–157. DOI: 10.36652/0869-4931-2024-78-4-152-157.

References:

1. Order of the Government of the Russian Federation dated November 27, 2021 No. 3363-r "On the Transport Strategy of the Russian Federation until 2030 with a forecast for the period until 2035" [Electronic resource]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202112030006> (accessed: 07.08.2025). Appendix 10: "Levels of autonomy of transport vehicles". (In Russ)
2. <https://www.vinnova.se/globalassets/mikrosajter/ffi/dokument/slutrappporter-ffi/cyklar-och-andra-fordon-rappporter/2021-04347engelska.pdf> (accessed: 05.04.2025). Wendin C., Wilhelmsson M., Melén C.T. и др. ASPECT – A System for Electric and Connected Transport Solution: public report [Electronic resource]. 2024.:
3. Kotiev G.O., Dyakov A.S. Method of developing running systems for highly mobile crewless ground vehicles. *Izvestiya SFU. Engineering Sciences*. 2016;1:186-197. (In Russ)
4. Vassuf Ya. Development of unmanned vehicles: economic, management and mathematical modeling problems. *Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University*. 2023;191:115-137. DOI: 10.21515/1990-4665-191-021. (In Russ)
5. Guseinov R.V., Dadaeva P.A., Shabazov M.M., Mutalibov M.T., Akhmedova M.R. Features of mathematical modeling of road safety on highways. *Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2024;51(1):61-67. (In Russ.) <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2024-51-1-61-67> (In Russ)
6. Balamirzoev A.G., Salakhov A.Z., Selimkhanov D.N. Mathematical modeling of the movement of vehicles and pedestrians at unregulated intersections. *Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2024;51(2):44-52. (In Russ.) <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2024-51-2-44-52> (In Russ)
7. Le V.N., Dam H.F., Dinh V.F. Longitudinal dynamic model of all-wheel drive vehicle//Automotive Engineering and Automobile Transport: proceedings of scientific works in 2 volumes / Belarusian National Technical University, Automotive Faculty; ed. by D.V. Kapsky, A.S. Povarekho (ed.) Minsk: BNTU, 2024;1:30-37.
8. Yaitskov I.A., Polyakov P.A. Longitudinal dynamics of a vehicle under braking. *Izvestiya Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Technical Sciences*. 2022;10. <https://cyberleninka.ru/article/n/prodolnaya-dinamika-transportnogo-sredstva-pri-tormozhenii> (accessed: 27.08.2025). (In Russ)
9. Dębowski A., Faryński J.J., Żardecki D.P. The bicycle model of a 4WS car lateral dynamics for lane change controller. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2022;1(1247): 012021.
10. Wong J.Y. Theory of Ground Vehicles. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2001; 528. ISBN 0-471-35461-9.
11. Pacejka H.B., Bakker E. The magic Formula Tyre Model // Proc. 1st International Tyre Colloquium. 1991: PP. 1-18.
12. Gao L., Dong Y., Zhao J. Dynamic Modeling and Characteristic Analysis of Articulated Steering Vehicles *Applied Sciences*. 2023;8 (13):5099.
13. Guzzella L. Vehicle Propulsion Systems: Introduction to Modeling and Optimization. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2013; XVI, 412 p. (Springer Series in Advanced Manufacturing). ISBN 978-3-642-35912-5. DOI: 10.1007/978-3-642-35913-2.
14. Stroganov V.I., Sidorov K.M. Mathematical modeling of main components of power plants for electric vehicles and vehicles with KEU: study guide. Moscow: MADI, 2015; 100 p. (In Russ)

15. Minaker B. Modelling the dynamics of a vehicle with active geometry suspension // The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks: proceedings of the 26th International Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks (DyVehRoads 2019), August 12-16, 2019, Gothenburg, Sweden / ed. by R. Fröhling. Leiden: CRC Press/Balkema, 2021; 716-727.
16. Narendra M.A., Huzefa S.M., Bobere Prof. F. Mathematical Modelling and Simulation of Suspension System in MATLAB/SIMULINK. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*. 2022;6 (10):145–179.
17. Cheng L. Dynamic modeling and simulation of mining truck // 2022 4th International Academic Exchange Conference on Science and Technology Innovation (IAECST). 2022;318-321. DOI: 10.1109/IAECST57965.2022.10062151.
18. Kotiev G.O., Gorelov V.A., Beketov A.A. Mathematical model of off-road vehicle movement. *Journal of Automotive Engineers*. 2008;1:50-54. (In Russ)
19. Lebedev A.A., Chernobrovkin L.S. Flight dynamics of unmanned aerial vehicles: study guide / ed. by A.A. Lebedev. Moscow: Mashinostroenie, 1973; 616 p. (In Russ)
20. Spentzas K. Kinematics of four-wheel-steering vehicles. *Forschung im Ingenieurwesen*. 2001; 66: 211-216. DOI: 10.1007/s100100100060.
21. Gillespie T.D. Fundamentals of Vehicle Dynamics. Warrendale: SAE International, 1992;400 p. ISBN 1-56091-199-9.
22. Jazar R.N. Vehicle Dynamics: Theory and Application. 2nd ed. New York: Springer, 2014; XXII, 1066 p. (Springer Series in Advanced Manufacturing). ISBN 978-1-4614-8544-5. DOI:10.1007/978-1-4614-8544-5.
23. Pacejka H.B. Tire and Vehicle Dynamics. 3rd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012;672 p. ISBN 978-0-08-097016-5.
24. Markeev A.P. Theoretical mechanics: textbook for universities. 3rd ed., revised. Moscow; Izhevsk: Publishing House of Scientific and Publishing Center "Regular and Chaotic Dynamics", 2001;591 p. Bibliogr.: p. 582. ISBN 5-93972-088-9. (In Russ)
25. Bukhgalts N.N. Basic course of theoretical mechanics. Part 2. Dynamics of a system of material points: study guide for vocational education. 3rd ed., revised. St. Petersburg: Lan', 2025. 336 p. ISBN 978-5-507-52520-1. URL: <https://e.lanbook.com/book/454238> (accessed: 07.08.2025). (In Russ)
26. Craig J.J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Research, 2013;564 p. (Dynamic Systems and Robotics). ISBN 978-5-4344-0164-7.
27. Golubev Yu.F. Fundamentals of theoretical mechanics. Moscow: Moscow University Press, 2000.720 p. (In Russ)
28. Vakhlamov V.K. Construction, calculation and operational properties of automobiles: study guide for universities. Moscow: Akademiia, 2009;557 p. ISBN 978-5-7695-6608-0. (In Russ)
29. Lobachev I.V., Maslennikov A.L. Modeling the operation of a two-dimensional lidar for application in the control of ground vehicle movement in open-pit mining // XLVIII Academic Readings on Cosmonautics Dedicated to the Memory of Academician S.P. Korolev and Other Prominent Russian Scientists - Pioneers of Space Exploration "Korolev Readings": Proceedings. Moscow, January 23-26, 2024. Bauman Moscow State Technical University Publishing, 2024; 2:514-517. (In Russ)
30. Lobachev I.V., Maslennikov A.L., Pchelintsev V.E. An algorithm for forming a route for a simulation model of the movement of a quarry vehicle. *Automation. Modern Technologies. Innovative Mashinostroenie Publishing*, 2024;152–157. (In Russ)

Сведения об авторах:

Лобачев Иван Витальевич, аспирант, старший преподаватель кафедры ИУ1 «Системы автоматического управления»; lobivit@bmstu.ru; ORCID 0009-0009-2744-8685

Маслеников Андрей Леонидович, старший преподаватель кафедры ИУ1 «Системы автоматического управления»; amas@bmstu.ru; ORCID 0000-0001-9061-4193

Information about authors:

Ivan V. Lobachev, Postgraduate Student, Senior lecturer, Department of IU1 "Automatic Control Systems"; lobivit@bmstu.ru; ORCID 0009-0009-2744-8685

Andrey L. Maslennikov, Senior lecturer, Department of IU1 "Automatic Control Systems"; amas@bmstu.ru; ORCID 0000-0001-9061-4193

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 07.10.2025.

Одобрена после рецензирования/Revised 19.11.2025.

Принята в печать/Accepted for publication 15.01.2026.