МЕХАНИКА

УДК 539.3

Агаханов Г.Э.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИКТИВНЫХ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ

Agakhanov G.E.

THE SOLUTION OF PROBLEMS OF MECHANICS OF THE DEFORMABLE SOLID BODY WITH USE OF FICTITIOUS SETTLEMENT SCHEMES

Используя фиктивные расчетные схемы, основанные на эквивалентности воздействий в механике деформируемого твердого тела, получены напряженно-деформированные состояния для балки на двух опорах, находящейся под действием массовых сил; вращающегося тонкого круглого диска; плотины треугольного поперечного сечения, находящейся под действием объемных фильтрационных сил.

Ключевые слова: *механика деформируемого твердого тела, эквивалентность воздействий, фиктивная расчетная схема, напряженно-деформированное состояние.*

Using the fictitious settlement schemes based on equivalence of influences in mechanics of a deformable solid body the intense deformed states are received for the beam on two support which is under the influence of mass forces; the rotating thin round disk; the dam of triangular cross section which is under the influence of volume filtrational forces.

Key words: *mechanics of a deformable solid body, equivalence of influences, the fictitious settlement scheme, the intense deformed state.*

Введение. Известно, что основная задача механики деформируемого твердого тела заключается в исследовании напряженно-деформированного состояния твердых тел при различных воздействиях. В задаче механики деформируемого твердого тела все воздействия в зависимости от их присутствия в разрешающей системе уравнений подразделяются на поверхностные силы, объемные силы и вынужденные деформации.

Постановка задачи. Решение любой задачи механики деформируемого твердого тела начинается с построения расчетной схемы. При этом большое значение в механике деформируемого твердого тела имеет метод эквивалентности воздействий, позволяющий определить напряженно-деформированное состояния твердого тела без воспроизведения условий его работы (фиктивная расчетная схема), что особенно существенно при экспериментальном решении задач, так как осуществимость каждого воздействия ограничена возможностями техники моделирования [1, 2].

Рассмотрим решение трех задач механики деформируемого твердого тела с использованием фиктивных расчетных схем.

1. Балка на двух опорах под действием массовых сил

Балка на двух опорах находится под действием объемных сил

$$F_x = F_z = 0, \quad F_y = \gamma, \tag{1}$$

где γ - объемная масса материала балки.

По условиям эквивалентности воздействий, действие объемных сил можно заменить действием фиктивных поверхностных сил и вынужденных деформаций следующего вида:

$$P = \gamma y, \quad \xi = \frac{1-\nu}{E}\gamma y. \tag{2}$$

При этом напряжения и перемещения в исходной задаче определяются по соотношениям:

$$\sigma_{ij}^{(F)} = \sigma_{ij}^{(P)} - \sigma_{ij}^{(\xi)} - \delta_{ij}P, \qquad U_i^{(F)} = U_i^{(P)} - U_i^{(\xi)}. \tag{3}$$

Решение от заменяющих поверхностных сил имеет вид [3]

$$\begin{gathered}
\sigma_x^{(P)} = \frac{6\gamma y}{h^2}\left(l^2 - x^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{h^2}{10}\right) + \gamma y, \\
\sigma_y^{(P)} = \frac{3\gamma y}{2} - \frac{2\gamma y^3}{h^2}, \\
\tau_{xy}^{(P)} = \frac{6\gamma x y^2}{h^2} - \frac{3\gamma x}{2}, \\
U^{(P)} = \frac{\gamma}{E}\left[\frac{6xy}{h^2}\left(l^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{3} - \frac{h^2}{10}\right) + xy - \nu x\left(\frac{3y}{2} - \frac{2y^3}{h^2}\right)\right], \\
V^{(P)} = \frac{\gamma}{E}\left[\frac{3y^2}{4} - \frac{y^4}{2h^2} - \frac{3\nu y^2}{h^2}\left(l^2 - x^2 + \frac{y^2}{3} - \frac{h^2}{10}\right) - \frac{\nu y^2}{2} + \right. \\
\left. + \frac{1}{2h^2}\left(5l^4 + x^4 - 6l^2x^2\right) + \left(\frac{17}{10} + \frac{3\nu}{4}\right)\left(l^2 - x^2\right)\right].
\end{gathered} \tag{4}$$

Решение от заменяющих вынужденных деформаций имеет вид [3]:

$$\sigma_x^{(\xi)} = \sigma_y^{(\xi)} = \tau_{xy}^{(\xi)} = 0,$$

$$U^{(\xi)}=\frac{1-\nu}{E}\gamma xy\,, \tag{5}$$

$$V^{(\xi)}=\frac{1-\nu}{2E}\gamma\left(l^2-x^2+y^2\right).$$

Подставляя в (3) выражения (2), (4) и (5) для исходной задачи имеем

$$\sigma_x^{(F)}=\frac{6\gamma y}{h^2}\left(l^2-x^2+\frac{2}{3}y^2-\frac{h^2}{10}\right),$$

$$\sigma_y^{(F)}=\frac{\gamma y}{2}-\frac{2\gamma y^3}{h^2}\,,$$

$$\tau_{xy}^{(F)}=\frac{6\gamma xy^2}{h^2}-\frac{3\gamma x}{2}\,, \tag{6}$$

$$U^{(F)}=\frac{\gamma}{E}\left[\frac{6xy}{h^2}\left(l^2-\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}-\frac{h^2}{10}\right)-\nu x\left(\frac{y}{2}-\frac{2y^3}{h^2}\right)\right],$$

$$V^{(F)}=\frac{\gamma}{E}\left[\frac{y^2}{4}-\frac{y^4}{2h^2}-\frac{3\nu y^2}{h^2}\left(l^2-x^2+\frac{y^2}{3}-\frac{h^2}{10}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2h^2}\left(5l^4+x^4-6l^2x^2\right)+\left(\frac{6}{5}+\frac{5\nu}{4}\right)\left(l^2-x^2\right)\right].$$

2. Вращающийся тонкий круглый диск

Объемной силой будет являться сила инерции. Тогда

$$F_x=\rho\omega^2x\,,\quad F_y=\rho\omega^2y\,,\quad F_z=0\,, \tag{7}$$

где ρ - масса единицы объема материала диска, а ω - угловая скорость вращения.

Для заменяющих нагрузок имеем

$$P=\frac{\rho\omega^2r^2}{2}\,,\qquad \xi=\frac{1-\nu}{2E}\rho\omega^2r^2\,. \tag{8}$$

Если в центре нет отверстия, то под действием заменяющих поверхностных сил диск находится в условиях однородного растяжения во всех направлениях в своей плоскости, т.е.

$$\sigma_r^{(P)}=\sigma_\theta^{(P)}=\frac{\rho\omega^2b^2}{2}\,,\quad U^{(P)}=\frac{1-\nu}{2E}\rho\omega^2b^2r\,. \tag{9}$$

Если в центре имеется отверстие, решение от заменяющих поверхностных сил имеет вид [3]:

$$\sigma_r^{(P)} = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_\theta^{(P)} = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2}\right), \tag{10}$$

$$U^{(P)} = \frac{\rho\omega^2}{2E}\left[(1-\nu)(b^2 + a^2)r + (1+\nu)\frac{a^2b^2}{r}\right].$$

Решение от заменяющих вынужденных деформаций для сплошного диска имеет вид [3]:

$$\sigma_r^{(\xi)} = \frac{1-\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2),$$

$$\sigma_\theta^{(\xi)} = \frac{1-\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - 3r^2), \tag{11}$$

$$U^{(\xi)} = \frac{1-\nu}{8E}\rho\omega^2\left[(1-\nu)b^2r + (1+\nu)r^3\right].$$

Решение от заменяющих вынужденных деформаций для диска с отверстием имеет вид [3]:

$$\sigma_r^{(\xi)} = \frac{1-\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2b^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_\theta^{(\xi)} = \frac{1-\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2 + b^2 - 3r^2 + \frac{a^2b^2}{r^2}\right), \tag{12}$$

$$U^{(\xi)} = \frac{1-\nu}{8E}\rho\omega^2\left[(1-\nu)(a^2 + b^2)r + (1+\nu)\left(r^3 + \frac{a^2b^2}{r}\right)\right].$$

Подставляя в (3) выражения (9) и (11), (10) и (12), а также учитывая (8) для исходной задачи имеем:

- в случае сплошного диска

$$\sigma_r^{(F)} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2),$$

$$\sigma_\theta^{(F)} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2b^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2r^2, \tag{13}$$

$$U^{(F)} = \frac{\rho\omega^2}{8E}\left[(1-\nu)(3+\nu)b^2r - (1-\nu^2)r^3\right].$$

- в случае диска с круглым отверстием

$$\sigma_r^{(F)} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right),$$

$$\sigma_\theta^{(F)} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right), \tag{14}$$

$$U^{(F)} = \frac{\rho\omega^2}{8E}\left[(1-\nu)(3+\nu)\left(b^2+a^2\right)r + \right.$$

$$\left. + (1+\nu)(3+\nu)\frac{a^2b^2}{r} - \left(1-\nu^2\right)r^3\right].$$

3. Плотина треугольного поперечного сечения под действием объемных фильтрационных сил

Известно, что объемные фильтрационные силы F связаны с потерями напора по пути фильтрации зависимостью [4]

$$F = -\gamma \text{ grad H}, \tag{15}$$

где γ - объемная масса воды; H – напорная функция.

Значение и направление действия этих сил определяются с достаточной точностью расчетом или с использованием экспериментальных методов [5, 6].

Сложный характер распределения объемных фильтрационных сил усложняет теоретическое решение задачи. Поэтому в работе [4] при оценке взвешивания сооружения, действие объемных фильтрационных сил предлагают заменить статически эквивалентной поверхностной нагрузкой, распределенной по закону эпюры давлений в воде в плоскости подошвы сооружения.

Согласно установленным в работе [1] условиям эквивалентности воздействий, объемные фильтрационные силы (15) можно заменить поверхностной нагрузкой P и вынужденными деформациями ξ следующего вида:

$$P = -\gamma H, \tag{16}$$

$$\xi = -\frac{1-2\nu}{E}\gamma H. \tag{17}$$

Известно, что напорная функция H для установившегося фильтрационного потока удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. $\nabla^2 H = 0$. Тогда, функция вынужденных деформаций (17) также является гармонической в области плотины. В силу гармоничности вынужденных деформаций $\sigma_{ij}^{(\xi)} = 0$ зависимость (3) принимает вид:

$$\sigma_{ij}^{(F)} = \sigma_{ij}^{(P)} - \delta_{ij}P. \tag{18}$$

Результаты эксперимента и их обсуждение.

Таким образом, определение напряжений от объемных фильтрационных сил в рассматриваемой задаче сводится к определению напряжений от поверхностных сил (16).

Для определения последних, возьмем функцию напряжений в виде суммы полиномов второй и третьей степени. Тогда выражения для напряжений имеют вид:

$$\sigma_x^{(P)} = c_3 x + d_3 y + c_2 ,$$
$$\sigma_y^{(P)} = a_3 x + b_3 y + a_2 , \tag{19}$$
$$\tau_{xy}^{(P)} = -b_3 x - c_3 y - b_2 .$$

Входящие в эти формулы постоянные определим из граничных условий на вертикальной и наклонной гранях.

На вертикальной грани имеем y=0, $\sigma_y = -\gamma H, \quad \tau_{xy} = 0$.

Используя формулы (19), найдем $a_3=0$, $a_2=-\gamma H$; $b_3=0$, $b_2=0$.

С учетом этого формулы (19) для напряжений примут вид:

$$\sigma_x^{(P)} = c_3 x + d_3 y + c_2 ,$$
$$\sigma_y^{(P)} = -\gamma H , \tag{20}$$
$$\tau_{xy}^{(P)} = -c_3 y .$$

Граничные условия на наклонной грани имеют вид:

$$-\sigma_x^{(p)} \sin\alpha + \tau_{xy}^{(p)} \cos\alpha = \gamma (H - x) \sin\alpha ,$$
$$-\tau_{yx}^{(p)} \sin\alpha + \sigma_y^{(p)} \cos\alpha = -\gamma (H - x) \cos\alpha .$$

Подставляя в эти равенства выражения (20) и учитывая, что уравнение наклонной грани $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, получим:

$$-\left(c_3 x + d_3 x tg\alpha + c_2\right)\sin\alpha - c_3 x tg\alpha \cos\alpha = \gamma\left(H - x\right)\sin\alpha,$$

$$c_3 x tg\alpha \sin\alpha - \gamma H \cos\alpha = -\gamma (H - x)\cos\alpha.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$c_2 = -\gamma H ; \quad c_3 = \gamma ctg^2\alpha ; \quad d_3 = -2\gamma ctg^3\alpha + \gamma ctg\alpha .$$

Запишем окончательные выражения для напряжений от заменяющих поверхностных сил:

$$\sigma_x^{(P)} = \gamma x ctg^2\alpha + \gamma ctg\alpha\left(1 - 2ctg^2\alpha\right)y - \gamma H ,$$

$$\sigma_y^{(P)} = -\gamma H\ , \tag{21}$$

$$\tau_{xy}^{(P)} = -\gamma y ctg^2\alpha\ .$$

Это решение можно получить и другим путем. Используя принцип независимости (суперпозиции) сил поверхностную нагрузку P (16) можно разделить на две части:

$$P = -p - \gamma(H - x)\,,$$

где p – гидростатическое давление воды.

Решение от гидростатического давления воды имеет вид: [7]

$$\sigma_x = \gamma x ctg^2\alpha - 2\gamma y ctg^3\alpha\,,$$

$$\sigma_y = -\gamma x\ , \tag{22}$$

$$\tau_{xy} = -\gamma y ctg^2\alpha\ .$$

Решение от второй части поверхностной нагрузки, получаемое аналогично решению (21) с помощью функции напряжений в виде суммы полиномов второй и третьей степени, имеет вид:

$$\sigma_x = \gamma y ctg\ \alpha - \gamma H\ ,$$

$$\sigma_y = -\gamma(H - x)\ , \tag{23}$$

$$\tau_{xy} = 0\ .$$

Легко проверить, что выражения (22) и (23) в сумме также дают решение (21).

Тогда, согласно (16) и (18), для напряжений от объемных фильтрационных сил получаем

$$\sigma_x^{(F)} = \gamma x ctg^2\alpha + \gamma ctg\alpha\left(1 - 2ctg^2\alpha\right)y\,,$$

$$\sigma_y^{(F)} = 0\,, \tag{24}$$

$$\tau_{xy}^{(F)} = -\gamma y ctg^2\alpha\ .$$

Вывод. Фиктивные расчетные схемы, основанные на эквивалентности воздействий, можно использовать при решении и других более сложных задач механики деформируемого твердого тела, требующих применения и экспериментальных методов исследования напряжений и деформаций.

Библиографический список:

1. Агаханов Э. К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела//Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки 2013. № 2 (29). С. 39-45.

2. Агаханов Г.Э. О математическом моделировании воздействия порового давления на грунт//Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки 2015. № 1 (36) С. 8-16.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Теория упругости. М., Наука, 1975, 576 с.
4. Флорин В. А., Основы механики грунтов, т.1, Госстройиздат, 1959.
5. Аравин В. И., Нумеров С. Н., Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений, Л.-М., Госстройиздат, 1955, 291 с.
6. Дружинин Н. И., Метод электрогидродинамических аналогий и его применение при исследовании фильтрации, М.-Л., Госэнергоиздат, 1956, 346 с.
7. Варданян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. М., Горшков А. А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности, под ред. Г. С. Варданяна, М., Изд. АСВ, 1995, 568 с.

УДК 537.9:539.23

Билалов Б.А., Гусейнов М.К., Сафаралиев Г.К.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И СОСТАВА ПЛЕНОК ТВЕРДОГО РАСТВОРА $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ МАГНЕТРОННОГО ОСАЖДЕНИЯ

Bilalov B.A., Gusejnov M.K., Safaraliev G.K.

RESEARCH OF STRUCTURE AND COMPOSITION OF FILMS SOLID SOLUTION $(SIC)_{1-X}$ $(ALN)_X$, RECEIVED BY METHOD MAGNETRON DEPOSITION

Методом магнетронного распыления поликристаллических мишеней SiC-AlN на подложках SiC и Al_2O_3 получены тонкие пленки твердого раствора $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$. Методами рентгенографии и электронной микроскопии проведены исследования структуры и состава этих пленок. Установлены факторы, определяющие состав и структуру пленок, а также условия формирования монокристаллических пленок $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$ на подложках SiC. Рассчитаны основные технологические параметры процесса магнетронного осаждения пленок $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$.

Ключевые слова: *карбид кремния, твердые растворы, технология получения пленок $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$.*

Method of magnetron sputtering targets polycrystalline SiC-AlN on substrates SiC and Al_2O_3 thin films received solid solutions $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$. The methods of X-ray and electron microscopy studies the structure and composition of films. There are factors that determine the composition and structure of films, as well as conditions for the formation of monocrystalline films of $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$ to the substrate