

## Расчёт линзообразного покрытия мембранно-пневматического сооружения с учётом нелинейных факторов

В.Е. Хапилин

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д.77, Россия

**Резюме. Цель.** Целью исследования является разработка и апробация методики расчёта линзообразных мембранно-пневматических покрытий с учётом геометрической и физической нелинейности. Актуальность задачи обусловлена растущим интересом к пневматическим сооружениям в строительной практике, где требуется надёжное и экономичное решение для перекрытия больших пролётов. **Метод.** В работе применён усовершенствованный итерационный метод приращений параметров, основанный на численных процедурах Эйлера и Эйлера–Коши. В отличие от классических подходов (МКЭ, алгоритмы Ньютона–Рафсона, метод последовательных нагружений), предложенный метод обладает большей устойчивостью к накоплению ошибок и обеспечивает возможность регулировать точность за счёт изменения количества итераций и шага нагружения. Для практической реализации разработан программный комплекс, позволяющий учитывать как геометрическую, так и физическую нелинейность, а также внутреннее давление в оболочке. **Результат.** Численное моделирование показало, что при пролёте 60 м геометрическая нелинейность составляет около 7%, а физическая - порядка 6%. Проведённые расчёты для различных пролётов (60–100 м) подтвердили закономерность роста нелинейности с увеличением размеров покрытия. Полученные результаты демонстрируют, что использование линейных методов приводит к занижению деформаций и недооценке несущей способности конструкции. **Вывод.** Применение модифицированного метода приращений параметров позволяет повысить точность и надёжность расчётов линзообразных пневматических сооружений при приемлемой вычислительной трудоёмкости. Разработанная методика и программный комплекс могут быть рекомендованы для инженерных расчётов, проектирования спортивных и выставочных объектов, а также временных павильонов. Практическая значимость работы заключается в оптимизации расхода материалов и повышении эксплуатационной надёжности пневматических систем.

**Ключевые слова:** линзообразное покрытие, пневматические конструкции, метод приращений параметров, нелинейность, мембранные системы

**Для цитирования:** В.Е. Хапилин. Расчёт линзообразного покрытия мембранно-пневматического сооружения с учётом нелинейных факторов. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(4):232-237. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-4-232-237

## Calculation of the lens-shaped coating of a membrane-pneumatic structure taking into account nonlinear factors

V.E. Khapilin

Yuri Gagarin State Technical University  
77 Politekhnicheskaya Str., Saratov 410054, Russia

**Abstract. Objective.** The aim of the study is to develop and test a calculation method for lens-shaped membrane-pneumatic roofs taking into account geometric and physical nonlinearity. The relevance of the problem is due to the interest in pneumatic structures in construction practice, where a reliable and cost-effective solution for covering large spans is required. **Method.**

The study applies an improved iterative method of parameter increments based on the Euler and Euler-Cauchy numerical procedures. Unlike classical approaches (FEM, Newton-Raphson algorithms, the method of successive loadings), the proposed method is more resistant to error accumulation and provides the ability to adjust accuracy by changing the number of iterations and the loading step. For practical implementation, a software package has been developed that allows for taking into account both geometric and physical nonlinearity, as well as the internal pressure in the shell. **Result.** Numerical modeling showed that for a 60-meter span, geometric nonlinearity is approximately 7%, while physical nonlinearity is approximately 6%. Calculations for various spans (60–100 m) confirmed the pattern of increasing nonlinearity with increasing roof size. The results demonstrate that the use of linear methods leads to an underestimation of deformations and an underestimation of the structure's load-bearing capacity. **Conclusion.** The use of a modified parameter increment method improves the accuracy and reliability of calculations for lenticular pneumatic structures while maintaining acceptable computational complexity. The developed methodology and software package can be recommended for engineering calculations, the design of sports and exhibition facilities, and temporary pavilions. The practical significance of this work lies in the optimization of material consumption and increased operational reliability of pneumatic systems.

**Keywords:** lens-shaped coating, pneumatic structures, method of parameter increments, nonlinearity, membrane systems

**For citation:** V.E. Khapilin. Calculation of the lens-shaped coating of a membrane-pneumatic structure taking into account nonlinear factors. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(4):232-237. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-4-232-237

**Введение.** Пневматические конструкции активно используются в мировой практике при создании временных и стационарных объектов. В России линзообразные сооружения пока редки, однако их потенциал очевиден: они позволяют возводить долговечные и энергоэффективные покрытия при относительно низкой себестоимости. Конструкции данного типа относятся к категории гибких систем, для которых характерно проявление нелинейных эффектов. В соответствии с «золотым правилом» строительной механики, снижение жёсткости элементов сопровождается усилением нелинейности работы конструкции [1-3]. В настоящей статье рассматривается расчёт покрытия мембранно-пневматического сооружения без стоек рис. 1, расчётная схема представлена на рис. 2. Внутри оболочки поддерживается избыточное давление порядка 105 000 Па при атмосферном значении около 101 000 Па [4, 5, 6].

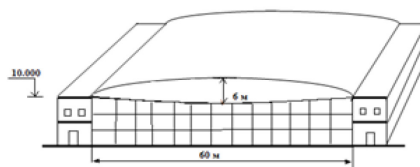


Рис. 1 – Однопролетное мембранно-пневматическое сооружение  
Fig. 1 – Single-span membrane-pneumatic structure

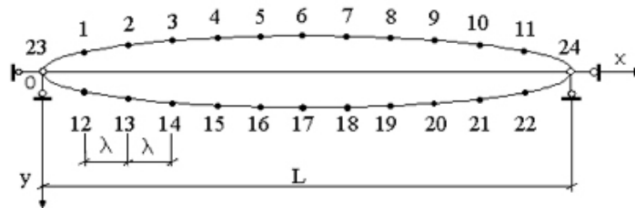


Рис. 2 – Расчетная схема мембранно-пневматического сооружения  
Fig. 2 – Design scheme of a membrane-pneumatic structure

**Постановка задачи.** Расчёт линзообразных мембранно-пневматических покрытий осложняется проявлением геометрической и физической нелинейности, что делает традиционные методы анализа недостаточно точными. Необходимо разработать подход, который обеспечит устойчивость вычислений и достоверность результатов при приемлемой трудоёмкости. В данной работе ставится задача применения и проверки усовершенствованного итерационного метода приращений параметров для расчёта линзообразных пневматических сооружений с учётом нелинейных факторов.

**Методы исследования.** При расчёте линзообразных мембранно-пневматических покрытий возникает необходимость учитывать выраженные геометрические и физические нелинейности. Традиционные методы строительной механики не всегда позволяют получить достоверные результаты для подобных систем. [7-9]. В инженерной практике для решения задач этого класса применяются три основных подхода: метод конечных элементов (МКЭ), метод последовательных нагружений и итерационные алгоритмы типа Ньютона–Рафсона.

Каждый из перечисленных методов имеет как достоинства, так и ограничения. МКЭ отличается универсальностью, но при моделировании больших деформаций требует значительных вычислительных ресурсов и усложняет интерпретацию результатов. [10-12]. Алгоритм Ньютона–Рафсона обеспечивает быструю сходимость, однако его эффективность во многом зависит от выбора корректного начального приближения. [13-15]. Метод последовательных нагружений демонстрирует высокую устойчивость, но при малом числе шагов накапливает заметную погрешность [16-18].

Таким образом, для рассматриваемой задачи требуется такой метод, который сочетал бы устойчивость вычислений и достаточную точность при разумной трудоёмкости. В настоящей работе предлагается использовать усовершенствованный итерационный метод приращений параметров, позволяющий проводить расчёт линзообразных пневматических сооружений с учётом нелинейных факторов.

Математическая постановка задачи сводится к операторному уравнению:

$$A(X, Y) = P, \quad (1)$$

где  $X$  – варьируемые параметры системы,  $Y$  – функции, описывающие накопления деформаций, изменения геометрии и свойств материала, а  $P$  – внешние воздействия.

Для численного решения применяется метод последовательных нагружений с использованием процедур Эйлера и Эйлера–Коши.

### 1. Приближение первого порядка (метод Эйлера):

$$y_{n+1} = y_n + h \int (x_n, y_n), \quad (2)$$

где  $h$  – шаг нагружения,  $n$  – номер итерации.

### 2. Приближение второго порядка (метод Эйлера–Коши):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[ \int (x_n, y_n) + \int (x_{n+1}, y_n + h \int (x_n, y_n)) \right] \quad (3)$$

Данный вариант позволяет существенно уменьшить погрешность вычислений и повысить устойчивость итерационного процесса.

**3. Расширенный алгоритм:** В случае высоких уровней нелинейности используется уточнение третьего порядка, что позволяет достичь точности до  $O(h^4)$ , В таком виде метод может быть применён для расчёта мембранных покрытий больших пролётов при значительных нагрузках.

Для практического применения разработана программа «Расчёт пневматических сооружений с учётом нелинейных факторов». В её основе лежит численная процедура Эйлера–Коши третьего порядка с числом итераций до 30, а также формула приращения давления в пневмолинзе и универсальное уравнение состояния газа. Программа позволяет моделировать влияние как геометрической, так и физической нелинейности. Особое

внимание уделено корректному учёту работы воздуха внутри оболочки, что критически важно для пневматических систем.

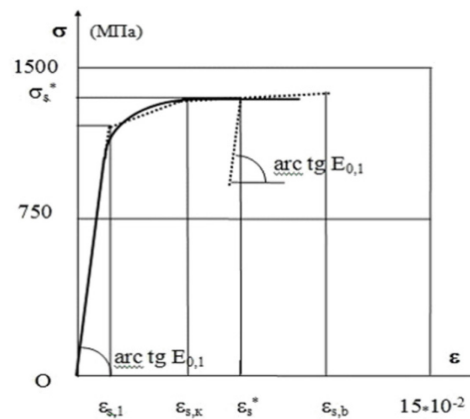
**Обсуждение результатов.** Численные эксперименты показали, что при пролёте 60 м геометрическая нелинейность мембран составляет порядка 7%, а физическая — около 6%. Для проектировщика это означает, что применение линейных методов расчёта приведёт к заметному занижению деформаций и, как следствие, к потенциальной недооценке нагрузочной способности конструкции.

Особенность результатов заключается в том, что влияние внутреннего давления проявляется двояко: оно одновременно увеличивает несущую способность и снижает уровень нелинейности. Таким образом, регулируя величину давления, можно добиваться оптимальных параметров работы конструкции.

**Таблица 1. Результаты исследования тестовой задачи на геометрическую нелинейность**  
**Table 1. Results of the test problem on geometric nonlinearity**

Число итераций Number of iterations	Избыточное давление (Па) Excess pressure (Pa)	Отклонение, % Deviation, %
$S_k = 1$	487,36	-38,8
$S_k = 3$	373,46	-6,3
$S_k = 25$	351,11	—

Для мембранного пояса физическая нелинейность определялась по диаграмме «напряжение–деформация» рис. 3.



**Рис. 3 – Диаграмма напряжений и деформаций мембран покрытия пневматического сооружения**

**Fig. 3 – Diagram of stresses and deformations of the pneumatic structure's membrane cover**

Дополнительно проведено исследование пролётов различной длины табл. 2.

**Таблица 2. Сравнительная оценка геометрической и физической нелинейности при различных пролётах**

**Table 2. Comparative assessment of geometric and physical nonlinearity at different flight heights**

Пролёт, м Span, m	Геометрическая нелинейность, % Geometric nonlinearity, %	Физическая нелинейность, % Physical nonlinearity, %	Характеристика поведения системы System behavior characteristics
60	7	6	Нелинейные эффекты умеренные, расчёт устойчив Nonlinear effects are moderate, the calculation is stable
80	11	9	Проявления нелинейности усиливаются, требуется больше итераций Nonlinearity becomes more pronounced, requiring more iterations
100	15	13	Значительная нелинейность, необходим мелкий шаг нагружения Significant nonlinearity, requires a small loading step

Результаты показывают, что с ростом пролёта линзообразного покрытия влияние нелинейности возрастает, что подтверждает необходимость применения специализированных численных методов.

**Вывод.** Проведённый анализ подтвердил необходимость учёта нелинейных факторов при проектировании линзообразных мембранно-пневматических покрытий. Применение усовершенствованного итерационного метода приращений параметров обеспечивает баланс между точностью и вычислительной сложностью. Разработанный программный комплекс может быть рекомендован как инструмент для инженерных расчётов и научных исследований в области пневматических сооружений.

Практическая значимость работы заключается в возможности оптимизации проектных решений: снижения расхода материалов, сокращения сроков возведения и повышения надёжности объектов различного назначения — от спортивных арен до временных павильонов.

#### **Библиографический список:**

1. Игнатъев В.А. Расчет мембранно-пневматических сооружений с учетом нелинейных факторов / В.А. Игнатъев // Вестник СГАУ.- 2004.-№ 4.- С. 43-45.
2. Игнатъев В.А., Ким А.Ю. Экспериментальное и теоретическое исследование мембранно-пневматических сооружений / В.А. Игнатъев, А.Ю. Ким // Вестник СГАУ. 2005.- № 1.- С. 37-39.
3. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров в теории расчета нелинейных мембранно-пневматических систем / А.Ю. Ким.- Саратов: Изд-во СГТУ, 2005. - 188 с.
4. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров для расчёта нелинейных мембранно-пневматических систем с учётом упругой работы воздуха// Вестник СГАУ.- 2005.- № 1.- С. 39-42.
5. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек / В.В. Петров.- Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. - 118 с.
6. Пирумов У.Г. Численные методы / У.Г. Пирумов.- М.: Изд-во Дрофа, 2003. - 224 с.
7. Ким А.Ю., Амоян М.Ф., Хапилин В.Е. Статический расчет на устойчивость линзообразного мембранно-пневматического покрытия сооружения // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 1. С. 14–20. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.1.14.20
8. Нургазиев Р.Б. Статический расчет пространственных мембранно-стержневых систем с учетом геометрической и конструктивной нелинейности автореферата по ВАК РФ 05.23.17: автореферат дис. кан. тех.наук. – Волгоград: 2004. – 17 с.
9. Нургазиев Р.Б. Статический расчет пространственных мембранно-стержневых систем с учетом геометрической и конструктивной нелинейности: диссертация. – Волгоград: 2004. – 17 с.
10. Полников, С.В. Применение шаговых методов с применением на шаге МКЭ для расчета большепролетных пневматических сооружений [Текст] / С.В. Полников, А.Ю. Ким [и др.] // Научная дискуссия: вопросы технических наук : сб. ст. по материалам XL международной заочной науч.-практ. конф., г. Москва, ноябрь 2015 г. - М., 2015. - № 11 (29). - С. 50-54.
11. Полников, С.В. Использование шаговых методов с применением на шаге численной процедуры Рунге-Кутты четвертого порядка точности при расчете нелинейных пневматических сооружений [Текст] / А.Ю. Ким, С.В. Полников // Перспективы развития науки и образования : сб. науч. тр. по материалам IV междунар. науч.-практ. конф., г. Москва, 29 апр. 2016 г. - М., 2016. - С. 102-104.
12. Gantes, C., & Connor, J.J. Structural Analysis of Pneumatic Membrane Structures // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol. 124–125. – P. 112–124. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.04.002.
13. Zhang, L., & Zhou, J. Nonlinear finite element analysis of inflatable membrane structures // Thin-Walled Structures. – 2018. – Vol. 132. – P. 320–330. DOI: 10.1016/j.tws.2018.09.011.
14. Rizzo, F., & Orlando, A. Numerical modeling of large-span pneumatic structures under dynamic loads // Engineering Structures. – 2020. – Vol. 209. – P. 109913. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.109913.
15. Khandelwal, R.S., & El-Shafie, A.H. Advances in analysis of membrane and inflatable structures: A state-of-the-art review // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11 (22). – P. 10643. DOI: 10.3390/app112210643.
16. Chen, Y., Li, H., & Wang, Z. Experimental and numerical study of air-supported membrane structures with nonlinear material behavior // Journal of Constructional Steel Research. – 2022. – Vol. 191. – P. 107228. DOI: 10.1016/j.jcsr.2021.107228.
17. Oliveira, P., & Pascoal, A. Geometric nonlinearity effects in large-span pneumatic domes: Simulation and validation // Journal of Building Engineering. – 2023. – Vol. 64. – P. 105696. DOI: 10.1016/j.jobeb.2023.105696.
18. Ким А.Ю., Амоян М.Ф., Хапилин В.Е. Численное исследование влияния отдельных стоек в линзах на работу нелинейных линзообразных мембранно-пневматических систем шаговым методом.

#### References:

1. Ignatiev V.A. Calculation of membrane-pneumatic structures taking into account nonlinear factors / V.A. Ignatiev. *Bulletin of SSAU*. 2004;4: 43-45. (In Russ)
2. Ignatiev V.A., Kim A.Yu. Experimental and theoretical study of membrane-pneumatic structures / V.A. Ignatiev, A.Yu. Kim. *Bulletin of SSAU*. 2005; 1: 37-39. (In Russ)
3. Kim A.Yu. Iterative method of parameter increments in the theory of calculating nonlinear membrane-pneumatic systems / A.Yu. Kim. - Saratov: Publishing house of SSTU, 2005:188 p. (In Russ)
4. Kim A.Yu. Iterative method of parameter increments for calculating nonlinear membrane-pneumatic systems taking into account the elastic work of air. *Bulletin of SSAU*. 2005; 1:39-4. (In Russ)
5. Petrov V.V. Method of successive loadings in the nonlinear theory of plates and shells / V.V. Petrov. - Saratov: Publishing house of Saratov University, 1975:118 p. (In Russ)
6. Pirumov U.G. Numerical methods / U.G. Pirumov. - Moscow: Publishing house Drofa, 2003; 224 p. (In Russ)
7. Kim A.Yu., Amoyan M.F., Khapilin V.E. Static analysis of the stability of a lenticular membrane-pneumatic coating of a structure. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2022;1:14–20. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.1.14.20 (In Russ)
8. Nurgaziyev R.B. Static calculation of spatial membrane-rod systems taking into account geometric and structural nonlinearity of the abstract of the thesis according to the Higher Attestation Commission of the Russian Federation 05.23.17: abstract of the dissertation of the Cand. of Technical Sciences. – Volgograd: 2004:17 p. (In Russ)
9. Nurgaziyev R.B. Static calculation of spatial membrane-rod systems taking into account geometric and structural nonlinearity: dissertation. – Volgograd: 2004: 17 p. (In Russ)
10. Polnikov, S.V. Application of step methods with the application of the FEM step for the calculation of large-span pneumatic structures [Text] / S.V. Polnikov, A.Yu. Kim [et al.] // Scientific discussion: issues of technical sciences: collection of articles based on the materials of the XL international correspondence scientific and practical conf., Moscow, November 2015. - M., 2015;11 (29):50-54. (In Russ)
11. Polnikov, S.V. Use of step methods with the application of the fourth-order Runge-Kutta numerical procedure at the step in the calculation of nonlinear pneumatic structures [Text] / A.Yu. Kim, S.V. Polnikov // Prospects for the development of science and education: collection of scientific papers based on the materials of the IV international. scientific and practical conf., Moscow, April 29. 2016 - M., 2016;102-104. (In Russ)
12. Gantes, C., & Connor, J.J. Structural Analysis of Pneumatic Membrane Structures. *International Journal of Solids and Structures*. 2017; 124–125:112–124. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.04.002.
13. Zhang, L., & Zhou, J. Nonlinear finite element analysis of inflatable membrane structures. *Thin-Walled Structures*. 2018;132: 320–330. DOI: 10.1016/j.tws.2018.09.011.
14. Rizzo, F., & Orlando, A. Numerical modeling of large-span pneumatic structures under dynamic loads. *Engineering Structures*. 2020;209:109913. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.109913.
15. Khandelwal, R.S., & El-Shafie, A.H. Advances in analysis of membrane and inflatable structures: A state-of-the-art review. *Applied Sciences*;2021;11 (22):10643. DOI: 10.3390/app112210643.
16. Chen, Y., Li, H., & Wang, Z. Experimental and numerical study of air-supported membrane structures with nonlinear material behavior. *Journal of Constructional Steel Research*. 2022;191:107228. DOI: 10.1016/j.jcsr.2021.107228.
17. Oliveira, P., & Pascoal, A. Geometric nonlinearity effects in large-span pneumatic domes: Simulation and validation. *Journal of Building Engineering*. 2023; 64: 105696. DOI: 10.1016/j.jobe.2023.105696.
18. Kim A.Yu., Amoyan M.F., Khapilin V.E. Numerical study of the effect of individual racks in lenses on the operation of nonlinear lenticular membrane-pneumatic systems by the step method. *Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences*. 2022;49(1):122-132. (In Russ) DOI.org/10.21822/2073-6185-2022-49-1-122-132

#### Сведения об авторе:

Хапилин Виктор Евгеньевич, преподаватель-исследователь, кафедра «Строительные материалы конструкции и технологии»; [khapilin2010@yandex.ru](mailto:khapilin2010@yandex.ru)

#### Information about author:

Viktor E. Khapilin, Researcher, Department of Building Materials, Construction and Technology; [khapilin2010@yandex.ru](mailto:khapilin2010@yandex.ru)

#### Конфликт интересов/Conflict of interests.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов/The author declare that there are no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received. 08.07.2025

Одобрена после рецензирования/Reviced. 24.08.2025

Принята в печать/Accepted for publication.08.10.2025