

Методика статического расчета нелинейных мембранно-пневматических систем С.В. Полников

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д.77, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является разработка методики статического нелинейного расчета мембранно-пневматических систем на силовые нагрузки и воздействия различного рода. **Метод.** В основе расчета нелинейных линзообразных мембранно-пневматических систем лежит известный шаговый метод приращения параметров и возможности итерационного процесса численной процедуры Эйлера-Коши с повышенным числом итераций, с применением на шаге метода конечных элементов. Поскольку производится расчет пневматических систем, в основы работы которых лежит сжатый воздух, используется система уравнений, которая включает в себя универсальное уравнение состояние газа и формулу для определения приращения давления в герметичном пространстве, образуемом линзообразным покрытием сооружения. **Результат.** Представлен модифицированный итерационный метод приращения параметров и соответствующий численный подход, повышающий точность решения нелинейных уравнений. Основное улучшение заключается в увеличении числа итераций с обычных трех до тридцати. Осуществлен расчет линзообразной мембранно-пневматической системы пролетом сто двадцать метров на действие участковой распределенной на полупролете снеговой нагрузки. **Вывод.** Предложенная методика может использоваться для расчета не только линзообразных сооружений, но и для расчета воздухоопорных и пневмокаркасных объектов.

Ключевые слова: линзообразное мембранно-пневматическое покрытие, статический расчет сооружений с учетом нелинейных факторов, модифицированная методика с применением шагового метода и численной процедуры Эйлера-Коши

Для цитирования: С.В. Полников. Методика статического расчета нелинейных мембранно-пневматических систем. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(4):225-231. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-4-225-231

Method for static calculation of non-linear membrane-pneumatic systems S.V. Polnikov

Yuri Gagarin State Technical University
77 Politekhnikeskaya Str., Saratov 410054, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to develop a methodology for the static non-linear calculation of membrane-pneumatic systems for force loads and various impacts. **Method.** The calculation of nonlinear lens-shaped membrane-pneumatic systems is based on the well-known stepwise method of parameter increment and the possibilities of the iterative process of the Euler-Cauchy numerical procedure with an increased number of iterations, using the finite element method at each step. Since the calculation of pneumatic systems based on compressed air is performed, a system of equations is used that includes a universal equation of state of a gas and a formula for determining the pressure increment in a sealed space formed by the lens-shaped roof of the structure. **Result.** A modified iterative method of parameter increment and a corresponding numerical approach are presented, which improve the accuracy of solving nonlinear equations. The main improvement lies in increasing the number of iterations from the usual three to thirty. A lens-shaped membrane-pneumatic system with a span of one hundred twenty meters was

calculated for the action of a sectional snow load distributed over a half-span. Conclusion. The proposed method can be used to calculate not only lens-shaped structures, but also air-supported and pneumatic-framed objects.

Keywords: lenticular membrane-pneumatic coating, static calculation of structures taking into account nonlinear factors, modified technique using the step method and the Euler-Cauchy numerical procedure

For citation: S.V. Polnikov. Method for static calculation of non-linear membrane-pneumatic systems. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(4):225-231. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-4-225-231

Введение. В статье описывается методика выполнения нелинейного статического расчета мембранно-пневматических покрытий для сооружений больших пролётов, несущая способность которых усилена с помощью повышенного избыточного давления воздуха.

Постановка задачи. Методика расчета основывается на алгоритме, суть которого сводится к последовательному увеличению количества итераций в численной процедуре Эйлера –Коши в зависимости от решаемой задачи [1-3]. В основе лежит численная процедура Эйлера-Коши с повышенным числом итераций, достигающим при решении некоторых тестовых задач до двадцати пяти.

Как показало проведенное численное исследование на тестовых задачах меньше всего итерация требуется для определения геометрической и физической нелинейности мембран покрытия сооружения, выполненных как правило из стали, а больше всего для определения физической нелинейности воздуха, закаченного между герметичными мембранами покрытия сооружения.

Целью исследования является разработка методики статического нелинейного расчета мембранно-пневматических систем на силовые нагрузки и воздействия различного рода.

Новизна предложенного подхода проявляется в ряде важных моментов [4,5]. Так, предлагаемая методика, использующая известный шаговый метод приращений параметров, который базируется на применении численной процедуры Эйлера-Коши третьего порядка точности. Это обеспечивает повышение точности результатов расчета по сравнению с другими численными процедурами.

Методы исследования. На начальном этапе задача решается с использованием метода приращений первого порядка точности, применяя формулу Эйлера. Это позволяет получить начальное приближение решения, которое затем уточняется на последующих итерациях. Предложенный метод сочетает в себе современные численные подходы и учитывает важные аспекты нелинейного поведения систем под воздействием различных нагрузок, что делает его эффективным инструментом для решения сложных инженерных задач [6-8].

В предложенной методике используется усовершенствованная численная процедура Эйлера-Коши третьего порядка точности для расчета системы с учетом корректируемых нагрузок, которые изменяются в процессе нагружения.

Для начала решения задачи применяется метод приращений первого порядка точности, который реализуется с использованием формулы Эйлера первого порядка точности. Это означает, что на первом этапе расчетов мы получаем начальное приближение решения, основываясь на простом линейном подходе, который учитывает изменения параметров системы [1,3].

Данная методика обеспечивает последовательное уточнение расчетов, начиная с первого приближения и постепенно улучшая результаты за счет применения более сложных и точных численных методов. Это позволяет более эффективно учитывать все нагрузки и их влияние на систему в процессе расчета.

1) Решение задачи в первом приближении, т.е. методом приращений первого порядка точности с применением формулы Эйлера:

$$\Delta Z_{nv}^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} \Delta x_{n\mu} \cdot A'_{v\mu}(x_{n-1,\mu}, y_{n-1}) \quad (1)$$

2) Решение задачи в с-том приближении по формуле:

$$\Delta Z_{nv}^{(c)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} \Delta x_{n\mu} \cdot A'_{v\mu}\left(x_{n-1,\mu} + \frac{\Delta x_{n\mu}}{2}, y_{n-1} + \frac{\Delta y_n^{(c-1)}}{2}\right) \quad (2)$$

где $3 \leq c \leq C_k \leq 30$.

Так как в расчете мы имеем дело с пневматическими сооружениями, где одним из главных компонентов является воздух, то в методике расчета таких сооружений присутствуют две формулы для учета воздействия воздуха на мембраны покрытия сооружения, формула для расчета приращения давления и универсальное уравнение состояния газа.

$$\Delta P^{(c+1)} = \Delta P^{(c)} - DP^{(c)} \quad (3)$$

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} \quad (4)$$

В статье показан модифицированный итерационный метод приращения параметров и соответствующий численный подход, чтобы повысить точность решения нелинейных уравнений. Стоит отметить, что этот метод разработан специально для расчетов пневматических систем. Результаты численного исследования показали, что данный метод обеспечивает высокий уровень точности при расчете прогибов и сил в соответствующих точках, что подтверждает высокое качество численного исследования.

Обсуждение результатов. Рассмотрим для примера решение тестовой задачи на расчет линзообразной мембранно-пневматической системы пролетом сто двадцать метров на действие участковой распределенной на полупролете снеговой нагрузки: избыточное давление в линзе 4000 Па. Мембранно-пневматическая система показана на рис. 1

Мембраны выполнены из стали Ст 3, толщина верхней 6 мм, а несущей нижней 8мм. Избыточное давление в полости пневмолинзы составляет 105 000 Па. Снеговая нагрузка QL на всем пролете, одношаговый расчет.

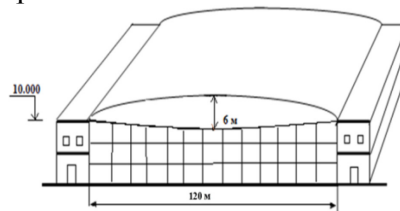


Рис. 1 – Мембранно-пневматическое сооружение пролетом 120 метров

Fig. 1 – Membrane-pneumatic structure with a span of 120 meters

Расчетная схема показана на рис. 2.

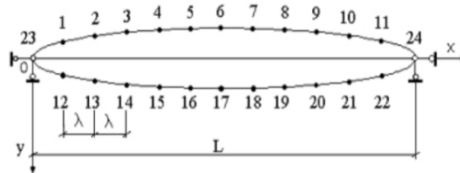


Рис. 2 – Расчетная схема мембранно-пневматического сооружения

Fig. 2 – Calculation scheme of the membrane-pneumatic structure

Исходные данные

Число шагов для расчета $N=1$

Число итераций на одном шаге для расчета $C=24$

Признак падения и возрастания давления $P=0$

Наличие силы $Q=1$

Наличие воздействия температуры $T=0$

Наличие воздействия кинематической силы $C=0$

ЕI% - индикатор наличия изгиба, 1-есть, 0-нет, EU =1

Протяженность конструкции между точками опоры L =120

Расчет на шаге N=1

Счет на шаге N =1 CI =1

Величина объем полости линзы в процессе эксплуатации V2= 233.9978928932476

Изменение объема внутри полости линзы $\Delta V = -0.14634633745$

Давление внутри линзы P (SL%) =105019.1

Приращение давления в линзе в результате деформации PC (SL%) = 277.5475

Счет на шаге N =1 CI =3

Величина объем полости линзы в процессе эксплуатации V2=234.0247034679128

Изменение объема внутри полости линзы $\Delta V = -0.1453534633567$

Давление внутри линзы P (SL%) =106008.1

Изменение давления в линзе в результате деформации PC (SL%) =305.4953

Счет на шаге N =1 CI =19

Величина объем полости линзы в процессе эксплуатации V2=234.0211157530955

Изменение объема внутри полости линзы $\Delta V = -0.1600092469044796$

Приращение давления в линзе в результате деформации PC (SL%) =269.4534

Счет на шаге N =1 CI =25

Результаты в конце шага N=1

Величина объем полости линзы в процессе эксплуатации V2=233.8611201470188

Изменение объема внутри полости линзы $\Delta V = -0.3200048529811852$

Приращение давления в линзе PN (SL%) =303.4853

Избыточное давление в линзе PL (SL%) =4303.4853

Давление внутри линзы P (SL%) =105303.4853

Пневматические нагрузки на стадии эксплуатации

SIM (1) = -73.5560607653357#	SIM (2) = -360.0364533333753#
SIM (3) = -63.63554333053366#	SIM (4) = -375.0636357653574#
SIM (5) = -30.6636707773357#	SIM (6) = -374.3756375036433#
SIM (7) = -30.30630033367373#	SIM (8) = -377.4636076005307#
SIM (9) = -30.37337737733473#	SIM (10) = -377.6574665336303#
SIM (11) = 0	SIM (12) = -377.3750053777773#
SIM (13) = 30.37337737733367#	SIM (14) = -377.6574665336377#
SIM (15) = 30.30630033367736#	SIM (16) = -377.4636076005373#
SIM (17) = 30.6636707773663#	SIM (18) = -374.3756375036777#
SIM (19) = 63.63554333050547#	SIM (20) = -375.0636357653033#
SIM (21) = 73.55606076533606#	SIM (22) = -360.0364533333776#
SIM (23) = -63.66473636644357#	SIM (24) = 375.0053663335064#
SIM (25) = -60.73747576636736#	SIM (26) = 376.3355565633663#
SIM (27) = -60.6473065676774#	SIM (28) = 377.4473036703606#
SIM (29) = -30.47033335673647#	SIM (30) = 375.5005364373636#
SIM (31) = -35.53335730433537#	SIM (32) = 374.5777043633673#
SIM (33) = 0	SIM (34) = 374.4703636353677#
SIM (37) = 35.53335730433733#	SIM (36) = 374.5777043633673#
SIM (37) = 30.47033335673633#	SIM (38) = 375.5005364373733#
SIM (39) = 60.6473065676774#	SIM (40) = 377.4473036703344#
SIM (41) = 60.73747576636466#	SIM (42) = 376.3355565633733#
SIM (43) = 63.66473636644633#	SIM (44) = 375.0053663335067#

Суммарные горизонтальные перемещения и вертикальные перемещения
на шаге N=1

U (1) = 6.284947466642447D-04	V (1) = 5.771208673931539D-03
U (2) = 9.064404491792996D-04	V (2) = .0104728230323212D-01
U (3) = 9.011065428940217D-04	V (3) = .0140501529367025D-01
U (4) = 7.33697482369551D-04	V (4) = 1.706106577192919D-01
U (5) = 4.055428094971367D-04	V (5) = 1.877749506766422D-01
U (6) = -3.530975929322013D-04	<u>V (6) = 1.914159524204323D-01</u>
U (7) = -4.055428094978867D-04	V (7) = 1.877749506766691D-01
U (8) = -7.33697482370406D-04	V (8) = 1.706106577193401D-01
U (9) = -9.011065428949444D-04	V (9) = 1.405015293670819D-01
U (10) = -9.064404491801258D-04	V (10) = 1.047282303232607D-02
U (11) = -6.284947466647538D-04	V (11) = 5.771208673934299D-03
U (12) = 7.134250597895554D-04	V (12) = -2.547522547260301D-03
U (13) = 2.504397359691547D-04	V (13) = 2.125278384508049D-03
U (14) = -9.108938131861513D-04	V (14) = 1.404018469923477D-02
U (15) = -2.296969329327237D-04	V (15) = 8.614553416621804D-03
U (16) = -7.996037468916633D-05	V (16) = 1.030762314101923D-02
U (17) = 2.844169738660936D-04	<u>V (17) = 1.912882084281139D-02</u>
U (18) = 7.996037468976961D-05	V (18) = 1.030762314102113D-02
U (19) = 2.296969329334221D-04	V (19) = 8.614553416625604D-03
U (20) = 9.108938131870038D-04	V (20) = 1.404018469924047D-02
U (21) = -2.504397359685375D-04	V (21) = 2.125278384511751D-03
U (22) = -7.134250597892292D-04	V (22) = -2.547522547258527D-03
U (23) = 0	V (23) = 0
U (24) = 0	V (24) = 0

Таблица 1. Расчет пневматической системы на действие снеговой нагрузки на половине пролета

Table 1. Calculation of the pneumatic system for the action of snow load at half the span

№	Методика расчета Calculation Methodology	Приращение избыточного давления воздуха в линзе Increase in excess air pressure in the lens	Различие в приращениях избыточного давления воздуха, выраженное в процентах The difference in excess air pressure increments, expressed as a percentage
1	Расчет 1 порядка точности при $C_k = 1$ First-order accuracy calculation at	PC(SL%) = 277.5475 Па	8,54%
2	Расчет 3 порядка точности при $C_k = 3$ Third-order accuracy calculation at	PC(SL%) = 305.4953 Па	- 0,66%
3	Расчет с учетом последействия при $C_k = 25$ Calculation taking into account aftereffects at	PN(SL%) = 303.4843 Па	-

В табл. 1 влияние общей нелинейности составило примерно 8,54%. От участковой нагрузки прогибы меньше, поэтому меньше и нелинейность. Учитывая относительную небольшую нагрузку на линзообразное покрытие и высокую несущую способность сжатого воздуха, находящегося между гибких мембран покрытия сооружения, прогиб в данном примере в точке V6 составляет 19.1 см., что допустимо по всем нормам.

Разработанная автором методика и программа для расчета линзообразных большепролетных систем объединяет различные методы решения задач и позволяет рассчитывать различные конструкции с пролетами в сотни метров и более. В дальнейшем мы рассмотрим традиционные аспекты алгоритма, включая загрузку системы МКЭ на каждом этапе.

В методе последовательных нагрузок проводится проверка состояния системы на каждом этапе, используя определитель системы решений, основанный на методе конечных элементов. Когда данный определитель достигает нулевого значения, это указывает на потерю устойчивости системы, что отражается в выводах программы для расчета.

Следует отметить, что в случае значительных деформаций (вызванных изменением переменных параметров нелинейной системы) устойчивость системы на первых стадиях не гарантирует ее устойчивости на последующих стадиях. Поэтому необходимо проводить исследования на ее устойчивость на всем протяжении процесса деформации покрытия.

Условием предельного равновесия мембранной системы, которая имеет жесткий контур, является выполнение определенного равенства.

Это равенство отражает баланс сил и моментов в системе, обеспечивая ее стабильность и предотвращая деформацию или разрушение:

$$\det|A_{v\mu}| = 0, \quad v = \overline{1, m};, \quad \mu = \overline{1, M} \quad (5)$$

Когда изменяется один из параметров x (например, это может быть параметр нагрузки q , давление P , температура T или осадка опор C), условием предельного равновесия системы становится выполнение определенного равенства:

$$\frac{\partial Z_v}{\partial x_\mu} = A'_{v\mu} = 0, \quad (6)$$

что дает выражение условия параллельности координатной оси параметра x_μ и касательной, проведенной к кривой решения $Z_v(x_\mu)$. Это условие указывает на то, что направление изменения параметра x_μ совпадает с направлением касательной к кривой решения в данной точке.

Если рассматривать поэтапное решение статической задачи для континуальных расчетных схем на произвольной итерации метода последовательных нагружений, то это означает, что на каждом этапе итерации необходимо проверять, сохраняется ли данное условие.

Это важно для обеспечения корректности расчетов и стабильности системы в процессе ее анализа.

$$\Delta Z_{nv}^{(c)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} \Delta x_{n\mu} \cdot A'_{v\mu}(x_{n\mu}^{(c)}, y_n^{(c)}) \quad (7)$$

Предполагает процедуру вычисления производных Фреше, то поэтапное применение метода конечных элементов при дискретных расчетных схемах не требует вычисления частных производных Фреше $A'_{v\mu}(x_{n\mu}^{(c)}, y_n^{(c)})$, а позволяет сразу определять искомые приращения функций $\Delta Z_{nv}^{(c)}$ решением системы алгебраических уравнений, матрицей линейного преобразования которой является матрица жесткости рассчитываемой конструкции [2].

Вывод. В статье показано, что усовершенствование численной процедуры Эйлера-Коши, а именно увеличение числа итераций с совместным применением шагового метода приращений параметров может помочь для расчета многих нелинейных линзообразных пневматических систем. Основное улучшение заключается в увеличении числа итераций с обычных трех до тридцати.

На каждой итерации расчет продолжается до тех пор, пока значения приращения давления воздуха на предыдущем и текущем шагах не станут идентичными.

Такой подход позволяет провести полный анализ процесса нагружения нелинейных пневматических систем, включая воздействия силовых, температурных, кинематических и пневматических нагрузок.

Важно отметить, что для обеспечения устойчивости системы на всех этапах деформации, особенно при значительных прогибах, требуется большое количество итераций. В процессе расчетов принимаются во внимание упругие свойства воздуха, который закачивается в закрытое пространство пневматической линзы.

Библиографический список:

1. Городецкий А.С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А.С. Городецкий. - М.: Транспорт, 1981. - 143 с.
2. Давиденко Д.Ф. О приложении метода вариации параметра к теории нелинейных функциональных уравнений / Д.Ф. Давиденко // Укр. матем. журнал. 1955. Т. 7.- С. 56-64.

3. Игнатъев В.А. Расчет мембранно-пневматических сооружений с учетом нелинейных факторов / В.А. Игнатъев, А.Ю. Ким // Вестник СГАУ.- 2004. № 4.- С. 43-45.
4. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров в теории расчета нелинейных мембранно-пневматических систем / А.Ю. Ким.- Саратов: Изд-во СГТУ, 2005. - 188 с.
5. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров для расчёта нелинейных мембранно-пневматических систем с учётом упругой работы воздуха // Вестник СГАУ.- 2005.- № 1.- С. 39-42.
6. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек / В.В. Петров.- Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. - 118 с.
7. Пирумов У.Г. Численные методы / У.Г. Пирумов.- М.: Изд-во Дрофа, 2003. - 224 с.
8. Ким А.Ю., Амоян М.Ф., Хапилин В.Е. Алгоритм численного расчета нелинейных линзообразных мембранно-пневматических систем итерационным методом приращений параметров с учетом последствие действия давления воздуха. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2022;49(2):133-142. DOI.org/10.21822/2073-6185-2022-49-2-133-142

References:

1. Gorodetsky, A.S. Finite Element Method in Designing Transport Facilities. - Moscow: Transport. 1981: 143 p. (In Russ)
2. Davidenko, D.F. On the Application of the Parameter Variation Method to the Theory of Nonlinear Functional Equations. *Ukrainian Math. Journal*. 1955;7:56-64.
3. Ignatyev, V.A. Calculation of Membrane-Pneumatic Structures Taking into Account Nonlinear Factors / V.A. Ignatyev, A.Yu. Kim. *Bulletin of SSTU*. 2004; 4.: 43-45. (In Russ)
4. Kim, A.Yu. Iterative Method of Parameter Increments in the Theory of Calculating Nonlinear Membrane-Pneumatic Systems - Saratov: Publishing House of SSTU, 2005;188. (In Russ)
5. Kim A. Yu. Iterative method of parameter increments for calculating nonlinear membrane-pneumatic systems taking into account the elastic work of air. *Bulletin of SSAU*. 2005;1:39-42. (In Russ)
6. Petrov V. V. Method of successive loadings in the nonlinear theory of plates and shells . Saratov: Publishing house of Saratov University, 1975;118. (In Russ)
7. Pirumov U. G. Numerical methods. - Moscow: Publishing house Drofa, 2003:224. (In Russ)
8. Kim A.Yu., Amoyan M.F., Khapilin V.E. Algorithm for numerical calculation of nonlinear lenticular membrane-pneumatic systems by iterative method of parameter increments taking into account the aftereffect of air pressure. Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. 2022;49(2):133-142. (In Russ) <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2022-49-2-133-142>

Сведения об авторе:

Полников Сергей Валерьевич, старший преподаватель, кафедра «Строительные материалы конструкции и технологии»; werad91@mail.ru; ORCID0000-0002-4670-309X

Information about author:

Sergey V. Polnikov, Senior Lecturer, Department of Building Materials, Construction and Technology; werad91@mail.ru; ORCID0000-0002-4670-309X

Конфликт интересов/Conflict of interests.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов/The author declare that there are no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 01.09.2025

Одобрена после рецензирования/Revised 30.09.2025

Принята в печать/Accepted for publication 08.10.2025