

**Численно-аналитическое моделирование ползучести пластин при изгибе**  
**Т.А. Волосатова<sup>1</sup>, А.Д. Мерзлякова<sup>2</sup>, М.В. Беспалов<sup>3</sup>, С.В. Литвинов<sup>1</sup>, М.А. Магомедов<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Донской государственный университет,

<sup>1</sup>344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1, Россия,

<sup>2</sup>Российский университет транспорта, Россия,

<sup>2</sup>127994, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9,

<sup>3</sup>Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы,

117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Россия,

<sup>4</sup>Дагестанский государственный технический университет,

<sup>4</sup>367015, г. Махачкала, пр. Имама Шамиля, 70, Россия

**Резюме. Цель.** В работе рассматривается задача о напряженном-деформированном состоянии жесткой пластинки при изгибе в условиях ползучести, с различными граничными условиями. Получено разрешающее линейное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно прогиба. Решение приводится численно аналитическим методом типа Мориса Леви в программном комплексе MATLAB с использованием одианрных тригонометрических рядов. Нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича использовано как уравнение состояния между деформациями ползучести и напряжениями. **Метод.** Для определения деформаций ползучести применялась линейная аппроксимация первой производной по времени, метод Эйлера. Для верификации решения задачи был произведен расчет пластинки из вторичного ПВХ, выполненный методом сеток. Методика апробирована путем сравнения решения с расчетом и других известных исследователей. **Результат.** Разработана программа для расчета в пакете MATLAB с возможностью вариации исходных данных и выводом графика зависимости перемещений, напряжений от времени. На примере пластинки из вторичного поливинилхлорида показано, что напряжения в процессе ползучести меняются незначительно. **Вывод.** Предложенный подход может быть применен к анализу напряженно-деформированного состояния и несущей способности также и железобетонной плиты. Ограничений по граничным условиям и вида нагружения нет, а материалом пластины может быть не только полимеры и композиты строительного назначения, но и бетон.

**Ключевые слова:** ползучесть полимера, неупругие коэффициенты, относительная деформация, уравнение связи Максвелла-Гуревича, изгибающие моменты, метод Эйлера, метод М. Леви, метод Навье

**Для цитирования:** Т.А. Волосатова, А.Д. Мерзлякова, М.В. Беспалов, С.В. Литвинов, М.А. Магомедов. Численно-аналитическое моделирование ползучести пластин при изгибе. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(4):196-206. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-4-196-206

**Numerical and analytical modeling of plate creep under bending**

**T.A. Volosatova<sup>1</sup>, A.D. Merzliakova<sup>2</sup>, M.V. Bespalov<sup>3</sup>, S.V. Litvinov<sup>1</sup>, M.A. Magomedov<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Don State University,

<sup>1</sup>344003, Rostov-on-Don, Gagarin Square 1, Russia,

<sup>2</sup>Russian University of Transport, Russia,

<sup>2</sup>127994, GSP-4, Moscow, Obraztsova Street, Bldg. 9,

<sup>3</sup>Patrice Lumumba Peoples' Friendship University of Russia,

<sup>3</sup>6 Miklukho-Maklaya Street, Moscow 117198, Russia,

<sup>4</sup>Daghestan State Technical University,

<sup>4</sup>70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367015, Russia

**Abstract. Objective.** This paper considers the stress-strain state of a rigid plate subject to bending under creep conditions, with various boundary conditions. A resolving linear inhomogeneous differential equation of the fourth order with respect to deflection is obtained. The solution is numerically solved using a Maurice-Lévy-type analytical method in the MATLAB software package using unary trigonometric series. The nonlinear Maxwell-Gurevich equation is used as the equation of state between creep strains and stresses. **Method.** A linear approximation of the first time derivative, the Euler method, was used to determine creep strains. To verify the solution, a mesh calculation was performed on a recycled PVC plate [1]. The method was validated by comparing the solution with calculations by other renowned researchers. **Result.** A program was developed for calculations in the MATLAB package with the ability to vary the initial data and plot a graph of displacements and stresses versus time. Using a recycled PVC plate as an example, it is shown that stresses change insignificantly during creep. **Conclusion.** The proposed approach can be applied to the analysis of the stress-strain state and the load-bearing capacity of a reinforced concrete slab. There are no restrictions on boundary conditions or loading type, and the plate material can be not only polymers and composites for construction purposes, but also concrete.

**Keywords:** polymer creep, inelastic coefficients, relative deformation, Maxwell-Gurevich constraint equation, bending moments, Euler method, M. Levy method, Navier method

**For citation:** T.A.Volosatova, A.D. Merzliakova, M.V. Bepalov, S.V. Litvinov, M.A. Magomedov. Numerical and analytical modeling of plate creep under bending. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(4):196-206. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-4-196-206

**Введение.** Идея о том, что любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда гармонически связанных синусов и косинусов была предложена французским математиком бароном Жан-Батистом Жозефом Фурье. Разложение в бесконечный ряд по тригонометрическим функциям справедливо также для любых непериодических функций, определенных на произвольном интервале (просто разложенная функция будет периодически повторяться за пределами рассматриваемого интервала). Это гениальное изобретение благодаря развитию компьютерной техники получило огромное число практических приложений и легло в основу множества современных технологий таких, как сжатие мультимедиа, беспроводная передача данных, спектральный анализ, машинное обучение и т.д.

Тригонометрические ряды позволяют получить элегантное решение ряда краевых задач в теории пластин и оболочек. В литературе методы применения разложений в тригонометрические ряды часто ассоциируются с именем французского инженера-механика Клода-Луи Навье, который в 1820 году получил решение для прогиба и напряжений прямоугольной шарнирно-опёртой пластины и Морисом Леви, который получил точное решение задачи об изгибе пластины в упругой постановке в 1989 году. В своей работе М. Леви представил решение в виде однократного ряда специального вида для пластины, с граничными условиями, которые будут рассмотрены в данной статье в условиях вязкоупругости. Это стало важным вкладом в теорию изгиба пластин, дополнив более раннее исследования таких ученых, как Лагранж, Пуассон, Навье и др. Имеющиеся экспериментальные исследования неоднократно подтвердили, что действие длительных нагрузок приводит к изменению процесса деформирования. Факторы силового сопротивления полимеров и композитов строительного назначения с учетом совместного действия нелинейности и неравновесности деформирования, статических и динамических нагружений требуют дополнительного изучения для решения статически неопределимых систем.

**Постановка задачи.** Разработка новых и совершенствование существующих методов моделирования и расчета различных состояний и процессов в конструкциях из полимеров, вопросы реологического расчета, особенно нелинейного, для пластин и оболочек остаются актуальными и по-прежнему является одной из актуальных проблем.

Для упругой шарнирно опертой по контуру пластинки имеется аналитическое решение Навье в двойных тригонометрических рядах [1]. Обобщением этого решения на случай

пластинки из вязкоупругого материала было сделано в работе [2]. В качестве разрешающего уравнения авторами [2] приведено обобщенное уравнение Софи-Жермен:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left\{ q - \left( \frac{\partial^2 M_x^{cr}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m^{cr}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{cr}}{\partial y^2} \right) \right\} \quad (1)$$

Определение функции  $w(x, y)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1), довольно просто решается для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по краям и нагруженной произвольной нагрузкой в упругой постановке (решение К-Л. Навье). Решение на случай пластинки с учетом реологических свойств материала в замкнутом виде не представляется возможным и решение можно привести только численно-аналитическим методом, что, собственно, сделано было в работе [2] с использованием двойных тригонометрических рядов. Нами предлагается более универсальный метод решения задачи об изгибе прямоугольной пластины в условиях ползучести в одинарных рядах предложенным Морисом Леви, что существенно расширяет класс задач, допускающих решение. В упругой постановке впервые решение было представлено в работе Эставана [3]. Численное решение с использованием МКР, МКЭ для пластин и оболочек можно найти в работах [4-13].

**Методы исследования.** Для верификации правильности решения приведем вначале решение для шарнирно опертой пластины методом типа М. Леви. Рассмотрим прямоугольную пластину, шарнирно опертую по всем четырем сторонам под действием произвольной нагрузки  $q(x, y)$  (рис. 1) и вторую схему (рис. 2) – два края шарнирное закрепление, 2 края – защемление.

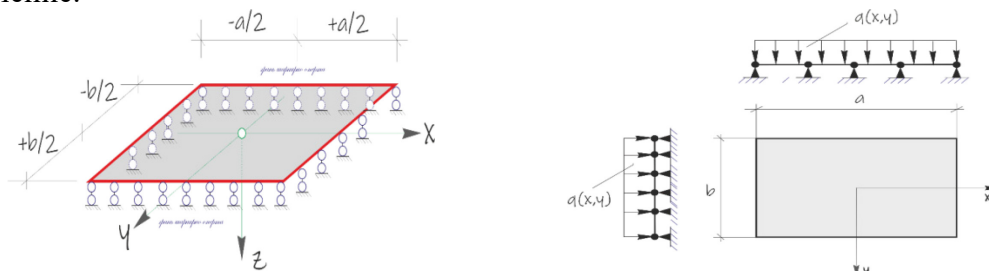


Рис. 1 – Расчетная схема для пластинки при решении типа К-Л. Навье  
 Fig. 1 – Calculation scheme for a plate with a K-L Navier solution

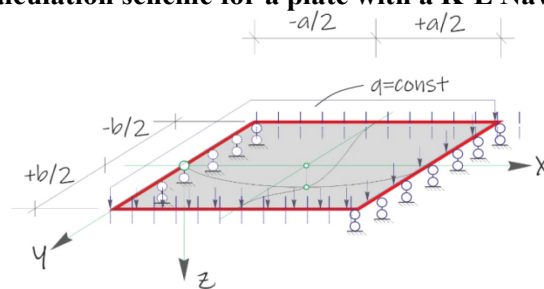


Рис. 2 – Расчетная схема для пластинки при решении типа М. Леви  
 Fig. 2 – Calculation scheme for a plate with a solution of the M. Levy type

Аналогично решению Файлона в плоской задаче примем уравнение поверхности прогибов  $w(x, y)$  в виде:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a} \quad (2)$$

где  $Y_k(y)$  – неизвестная функция от  $y$ .

Очевидно, что ряд (2) удовлетворяет граничным условиям опирания пластины на жесткие шарнирные опоры двух параллельных кромок

$$\text{при } x = 0 \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} -Y_k \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{k\pi x}{a} = 0$$

$$\text{при } x = a \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} -Y_k \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{k\pi x}{a} = 0$$

Для того чтобы ряд (2) удовлетворял также дифференциальному уравнению (1) и граничным условиям на двух других краях, необходимо соответствующим образом подобрать функцию  $Y_k(y)$ .

После подстановки принятого ряда в разрешающее уравнение (1), запишем левую часть уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{\infty} -Y_k \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi x}{a} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} - Y_k \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a}; \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^4 Y_k}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} + \frac{k^4 \pi^4}{a^4} Y_k \right] \sin \frac{k\pi x}{a} \end{aligned} \quad (3)$$

Как и ранее, нагрузку представим в виде ряда:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \\ q^{cr}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{cr}(y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \end{aligned} \quad (4)$$

Для определения коэффициентов произвольного члена ряда (4) умножим правую и левую часть равенства на  $\sin \frac{k\pi x}{a}$  и проинтегрировав в пределах от 0 до  $a$  получим:

$$q_k(y) = \frac{2}{b} \int_0^b q(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (5)$$

Второй коэффициент разложения  $q_k^{cr}$  можно, как и ранее, вычислить только численно, где в разложении функции будут присутствовать только нечетные члены.

После подстановки выражений (3) — (5) в дифференциальное уравнение (1) оно принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \left[ \frac{\partial^4 Y_k}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} + \frac{k^4 \pi^4}{a^4} Y_k \right] \sin \frac{k\pi x}{a} = \\ = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{(q_k + q_k^{cr})}{D} \sin \frac{k\pi x}{a} \end{aligned} \quad (6)$$

Данное уравнение распадается на ряд обыкновенных дифференциальных уравнений. Напишем  $k$ -е уравнение ряда

$$\frac{\partial^4 Y_k}{\partial y^4} - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} + \lambda^4 Y_k = \frac{(q_k + q_k^{cr})}{D} \quad (7)$$

Здесь  $\lambda = \frac{k\pi}{a}$ ;

Не останавливаясь на этапах интегрирования этого уравнения, напишем его общий интеграл:

$$Y_k = Y_{k1} + Y_{k2} \quad (8)$$

Первое слагаемое представляет собой решение однородного уравнения, когда в правой части (7) стоит ноль. Решение можно представить, как в показательной форме, так и гипербола тригонометрической. Остановимся на последней:

$$Y_{k1}(y) = C_{1k}ch\lambda y + C_{2k}\lambda ysh\lambda y + C_{3k}sh\lambda y + C_{4k}\lambda ych\lambda y \quad (9)$$

Первые два слагаемых составляют симметричную часть решения относительно оси  $x$ , а вторые — антисимметричную. Произвольные постоянные  $C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k}$  находятся из условий на продольных кромках пластины  $y = \pm \frac{b}{2}$ .

Вторая часть суммы (8) — это частное решение уравнения (7), которое подбирается так, чтобы при подстановке в это уравнение получилось равенство, т.е. оно непосредственно зависит от вида функции  $q_k(y)$ . Например, если  $q_k$  — линейная функция от  $y$ , например

$$q_k = A + By$$

то подстановкой легко убедиться в том, что

$$Y_{k2} = \frac{1}{D\lambda^4}(A + By) \quad (10)$$

Внутренние усилия выражаются через функцию  $Y_k$ .

Таким образом, в каждой конкретной задаче требуется определить коэффициенты разложения заданной нагрузки по (4), составить выражение  $Y_k$  (8) и найти произвольные постоянные из условий на кромках  $y = \pm b/2$ . После этого по (2) вычисляются прогибы и соответствующие внутренние усилия в пластине.

Рассмотрим примеры, когда равномерной нагрузкой  $q$  загружена пластина с шарнирно опертыми краями  $x = 0, x = a$  и заделанными кромками  $y = \pm b/2$  (рис. 1). Тогда функция  $w$  должна быть четной относительно  $x$  (упругая поверхность симметрична относительно оси  $x$ ). То есть:

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0.$$

Следовательно,  $C_{3k} = 0, C_{4k} = 0$  так как функции  $sh\lambda y$  и  $\lambda ych\lambda y$  — нечетные.

$$\text{при} \quad q(x, y) = q = const, \quad q_k = \frac{2q}{k\pi}(1 - \cos k\pi).$$

$$\text{если } k \text{ — четное, то} \quad q_k = 0;$$

$$\text{если } k \text{ — нечетное,} \quad q_k = \frac{4q}{k\pi}$$

Приведем два варианта оставшихся 2-х граничных условий:

1. шарнир—шарнир (для сравнения с задачей типа Навье)

$$\left( y = \pm \frac{a}{2} \rightarrow w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right)$$

2. защемление—защемление

$$\left( y = \pm \frac{a}{2} \rightarrow w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \right)$$

#### 1-й вариант (полное шарнирное опирание)

Учитывая симметрию относительно оси  $x$ , в выражении (9) для  $Y_{k1}$  удерживаем только первые два слагаемых, а  $Y_{k2}$  принимаем по (10) при  $A = \frac{4q}{k\pi}, B = 0$ .

$$Y_k = C_{1k}ch\lambda y + C_{2k}\lambda ysh\lambda y + \frac{(q_k + q_k^{cr})}{\lambda^4 D}$$

Для отдельного члена ряда это дает

$$y = \pm \frac{b}{2}, \quad Y_k = 0, \quad \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} = 0 \quad \text{— шарнирное опирание} \quad (11)$$

$$Y_k = 0, \quad \underbrace{C_{1k}ch\lambda y + C_{2k}\lambda ysh\lambda y}_{Y_{k1}} + \underbrace{\frac{4(q + q^{cr})}{\lambda^4 D k \pi}}_{Y_{k2}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} = 0 \quad C_{1k}\lambda^2 ch\lambda y + C_{2k}(\lambda^2 ch\lambda y + \lambda^2 ch\lambda y + \lambda^3 ysh\lambda y) = 0$$

Уравнения запишем относительно  $C_{1k}$  и  $C_{2k}$  в матричном виде и сократив на  $\lambda^2$  в последнем выражении:

$$\begin{bmatrix} ch\alpha & \alpha sh\alpha \\ ch\alpha & (2ch\alpha + \alpha sh\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(q_k + q_k^{cr})}{\lambda^4 D} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Здесь  $\alpha = \lambda \frac{b}{2} = \frac{k\pi b}{2a}$

Решение дает следующие значения постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} C_{1k} = -\frac{(q_k + q_k^{cr})}{\lambda^4 D} \cdot \frac{(2ch\alpha + \alpha sh\alpha)}{2 \cdot ch^2\alpha} \\ C_{2k} = \frac{(q_k + q_k^{cr})}{\lambda^4 D} \cdot \frac{1}{2 \cdot ch\alpha} \end{cases} \quad (12)$$

Можно составить окончательные выражения для прогибов (2.38) или усилий. Так, выражение для прогибов получит вид

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a} = \frac{4(q + q^{cr})a^4}{\pi^5 D} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[ 1 + \frac{\lambda ysh\lambda y}{2ch\alpha} - \frac{(2ch\alpha + \alpha sh\alpha)}{2ch^2\alpha} ch\lambda y \right] \sin \frac{k\pi x}{a} \quad (13)$$

**2-й вариант (2 края – шарнирное опирание, 2 края - защемление)**

$$y = \pm \frac{b}{2} \quad Y_k = 0, \quad \frac{\partial Y_k}{\partial y} = 0 \quad \text{опирание – защемление}$$

$$Y_k = 0, \quad \underbrace{C_{1k}ch\lambda y + C_{2k}\lambda ysh\lambda y}_{Y_{k1}} + \underbrace{\frac{4(q + q^{cr})}{\lambda^4 D k \pi}}_{Y_{k2}} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y} = 0 \quad C_{1k}\lambda sh\lambda y + C_{2k}(\lambda sh\lambda y + \lambda^2 ych\lambda y) = 0$$

Относительно  $C_{1k}$  и  $C_{2k}$  в матричном виде и сократив на  $\lambda$  во втором выражении:

$$\begin{bmatrix} ch\alpha & \alpha sh\alpha \\ sh\alpha & (sh\alpha + \alpha ch\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4(q + q^{cr})}{\lambda^4 D k \pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решение дает следующие значения постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} C_{1k} = -\frac{(q_k + q_k^{cr})}{\lambda^4 D} \cdot \frac{(sh\alpha + \alpha ch\alpha)}{(ch\alpha \cdot sh\alpha + \alpha)} \\ C_{2k} = \frac{(q_k + q_k^{cr})}{\lambda^4 D} \cdot \frac{sh\alpha}{(ch\alpha \cdot sh\alpha + \alpha)} \end{cases} \quad (15)$$

Окончательные выражения для прогибов (2) или усилий во втором варианте закрепления пластинки имеет вид:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a} = \frac{4(q + q^{cr})a^4}{\pi^5 D} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[ 1 + \frac{(\lambda ysh\lambda y \cdot sh\alpha) - (sh\alpha + \alpha ch\alpha) \cdot ch\lambda y}{(ch\alpha \cdot sh\alpha + \alpha)} \right]. \quad (16)$$

$$\cdot \sin \frac{k\pi x}{a}$$

Этот ряд (6) сходится очень быстро. Уже первое приближение (упругое решение) совпадает с точным решением до третьего знака. После того как функция  $w(x, y)$  найдена, вычислить изгибающие моменты и напряжения нетрудно. Изгибающие моменты и крутящий момент:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_x^{cr} =$$

$$= D \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda^2 Y_k - \nu \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} - M_x^{cr} \quad (17)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_y^{cr} =$$

$$= D \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda^2 \nu Y_k - \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} - M_y^{cr} \quad (18)$$

$$m = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - m^{cr} =$$

$$= -D(1 - \nu) \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda \frac{\partial Y_k}{\partial y} \right) \cos \frac{k\pi x}{a} - m^{cr} \quad (19)$$

$M_x^{cr}, M_y^{cr}, m^{cr}$  – определяются только численно как:

$$\begin{pmatrix} M_x^{cr} \\ M_y^{cr} \\ m^{cr} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu \quad 0] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{pmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1 \quad 0] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{pmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{(1 - \nu)}{2} \right] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{pmatrix} z dz \end{array} \right\} \quad (20)$$

Напряжения определяются после нахождения прогиба, как:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left[ z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_x^{cr} + \nu \varepsilon_y^{cr} \right] =$$

$$= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ z \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda^2 Y_k - \nu \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} - (\varepsilon_x^{cr} + \nu \varepsilon_y^{cr}) \right];$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left[ z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon_y^{cr} + \nu \varepsilon_x^{cr} \right] =$$

$$= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ z \left( \lambda^2 \nu Y_k - \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} - (\varepsilon_y^{cr} + \nu \varepsilon_x^{cr}) \right]; \quad (21)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{2(1 + \nu)} \left( 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \gamma_{xy}^{cr} \right) =$$

$$= -\frac{E}{2(1 + \nu)} \left( 2z \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda \frac{\partial Y_k}{\partial y} \right) \cos \frac{k\pi x}{a} + \gamma_{xy}^{cr} \right).$$

По известным напряжениям вычисляются скорости роста деформаций ползучести в момент времени  $(t + \Delta t)$ , а также величины  $M_x^{cr}, M_y^{cr}, m^{cr}, q_{mn}^{cr}$ .

В качестве уравнения состояния принималось нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, которое при плоском напряженном состоянии записывается в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{cr}}{\partial t} = \frac{f_{ij}^{cr}}{\eta^*}, \quad i = x, y, \quad j = x, y \quad (22)$$

где  $f_{ij}^{cr}$  – функция напряжений,  $\eta^*$  – релаксационная вязкость.

$$f_{ij}^{cr} = \frac{3}{2} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) - E_\infty \varepsilon_{ij}^{cr}, \quad (23)$$

где  $p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$  – среднее напряжение,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $E_\infty$  – модуль высокоэластичности.

$$\frac{1}{\eta^{cr}} = \frac{1}{\eta_0^{cr}} \exp\left(\frac{|f_{\max}^{cr}|}{m^*}\right), \quad (24)$$

где  $\eta_0^{cr}$  – начальная релаксационная вязкость,  $m^{cr}$  – модуль скорости.

Для вычисления деформаций ползучести вводится равномерная сетка по времени. Величина  $\varepsilon_{i,t+\Delta t}^*$  в момент времени  $(t + \Delta t)$  вычисляется на основе метода Эйлера [5]:

$$\frac{\partial \varepsilon_i^{cr}}{\partial t} \approx \frac{\varepsilon_{i,t+\Delta t}^{cr} - \varepsilon_{i,t}^{cr}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{i,t+\Delta t}^* = \varepsilon_{i,t}^{cr} + \frac{\partial \varepsilon_i^{cr}}{\partial t} \Delta t. \quad (25)$$

Аналогичный подход для решения задач ползучести применяется в работах [3,8].

Приведем расчет прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластинки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ .

**Обсуждение результатов.** С целью контроля правильности результатов была решена задача для прямоугольной пластинки, рассмотренной в работе [2] (приводится численно-аналитическое решение задачи ползучести с использованием двойных тригонометрических рядов) и работе [9], где пластинка решалась методом конечных разностей.

Материал пластинки – вторичный ПВХ, модуль упругости  $E = 1480$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , величина нагрузки  $q = 2$  кПа, размеры пластины:  $a = 0.8$  м,  $b = 0.6$  м, толщина пластинки  $h = 2$  см.

Реологические параметры ПВХ при различных температурах приводятся в работах [12]. При  $T = 20^\circ\text{C}$ :  $E_\infty = 5990$  МПа,  $\eta_0^* = 9.06 \cdot 10^5$  МПа · мин,  $m^* = 12.6$  МПа.

Сравнение при различном числе членов  $s$  ряда для решений Навье при  $m, n = 1, \dots, (2s - 1)$ , Леви при  $k = 1, \dots, (2s - 1)$  и МКЭ [2] приведено в табл.1.

За эталон было принято решение, полученное в конце процесса ползучести  $w$  (Мориса – Леви,  $s = 9$ ):

$$\delta = \frac{w_i - w \text{ (Мориса – Леви, } s = 9)}{w \text{ (Мориса – Леви, } s = 9)} \cdot 100\%$$

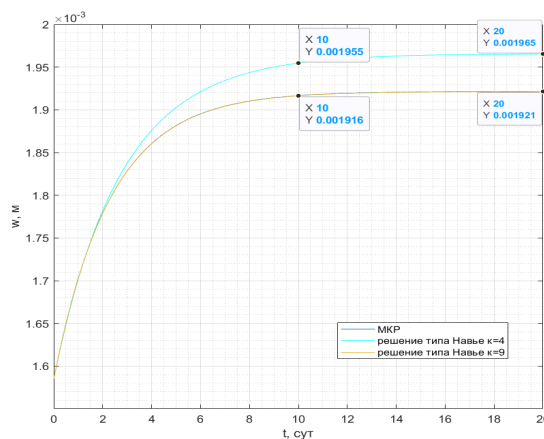
В теории упругости из выражения для удельной потенциальной энергии изменения формы, известно выражение интенсивности напряжений  $\sigma_i$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left(\sigma_y - \underbrace{\sigma_z}_{=0}\right)^2 + \left(\underbrace{\sigma_z}_{=0} - \sigma_x\right)^2 + 6\tau_{xy}^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

**Табл. 1. Сравнение прогибов в центре пластины в различные моменты времени, полученных на основе аналитического решения типа Навье, М-Леви, с решением при помощи МКР [2]**  
**Table 1. Comparison of deflections in the center of the plate at different moments in time, obtained on the basis of an analytical solution of the Navier, M-Levy type, with a solution using the MKR [2]**

$t$ , час	0	8	$\delta$ , %
$w$ (К – Л Навье, $s = 1$ ), мм	1.6296	2.0104	3.612
$w$ (Мориса – Леви, $s = 1$ ), мм	1.6162	1.9790	1.994
$w$ (К – Л Навье, $s = 2$ ), мм	1.5813	1.9500	0.500
$w$ (Мориса – Леви, $s = 2$ ), мм	1.5821	1.9371	0.164
$w$ (К – Л Навье, $s = 5$ ), мм	1.5847	1.9544	0.727
$w$ (Мориса – Леви, $s = 5$ ), мм	1.5847	1.9404	0.005
$w$ (К – Л Навье, $s = 9$ ), мм	1.5847	1.9543	0.721
$w$ (Мориса – Леви, $s = 9$ ), мм	1.5847	1.9403	0
$w$ (МКЭ), мм	1.6109	1.9354	0.253

На рис. 3 приведены графики роста прогиба при различном числе членов ряда  $k$ .

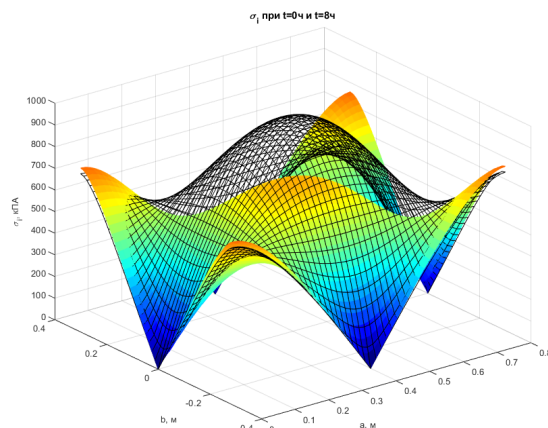
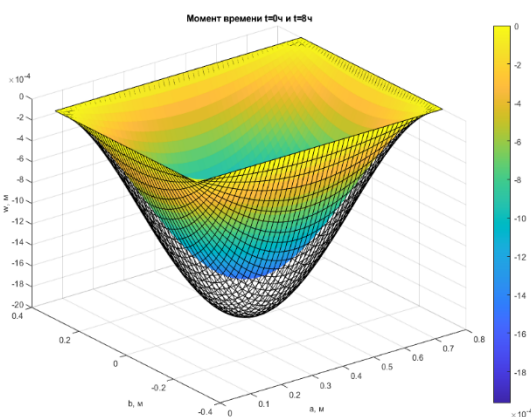


**Рис. 3 – Рост прогиба в центре пластины (решение типа Навье, Леви и МКР)**

**Fig. 3 – Increase in deflection in the center of the plate (Navier, Levy and MKR type solution)**

Из представленных графиков видно, что при  $k = 4$  ( $m = 1, 3$  и  $n = 1, 3$  - зеленый) и  $k = 9$  ( $m = 1, 3, 5$  и  $n = 1, 3, 5$  - зеленый пунктирный) результаты практически совпадают.

На рис. 4 и 5 приведены графики изменения интенсивности напряжения и роста прогиба с течением времени.

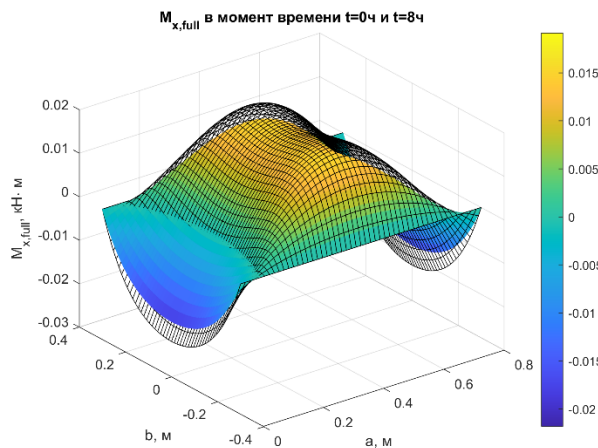


**Рис. 4 – График роста прогиба в центре пластины (решение типа М. Леви). Сетка – соответствует концу расчетного периода**

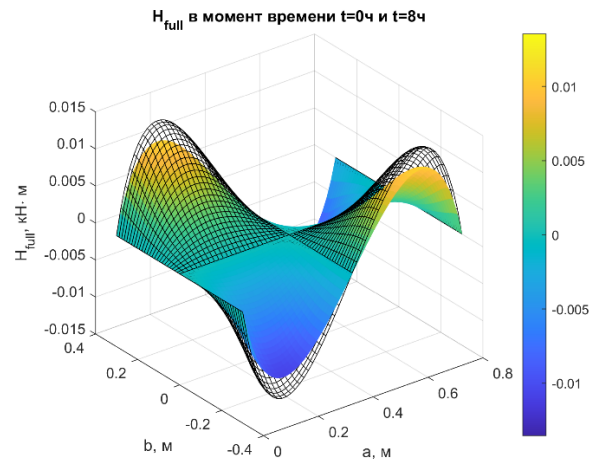
**Fig. 4 – Graph of the growth of deflection at the center of the plate (M. Levy type solution). The grid corresponds to the end of the calculation period**

**Рис. 5 – График интенсивности напряжений (решение типа М. Леви). Сетка – соответствует концу расчетного периода**

**Fig. 5 – Stress intensity graph (M. Levy type solution). The grid corresponds to the end of the calculation period.**



**Рис. 6 – График роста изгибающего момента в центре пластины (решение типа М. Леви). Сетка – соответствует концу расчетного периода**  
**Fig. 6 – Graph of the growth of the bending moment at the center of the plate (M. Levy-type solution). The grid corresponds to the end of the calculation period**



**Рис. 7 – График роста крутящего момента в центре пластины (решение типа М. Леви). Сетка – соответствует концу расчетного периода**  
**Fig. 7 – Graph of torque growth at the center of the plate (M. Levy type solution). The grid corresponds to the end of the calculation period.**

**Вывод.** Приведено разрешающее уравнение с учетом ползучести. Решение полученного уравнения выполнялось численно аналитическим методом на примере полимерной пластинки из вторичного ПВХ методом типа М. Леви, а интегралы, в которые входят деформации ползучести, вычисляются численно. Интегрирование по времени также выполняется численно с использованием метода Эйлера. Представлено сравнение результатов, полученных численно-аналитически и при помощи метода конечных разностей.

Установлено, что при действии на пластинку равномерно распределенной нагрузки с течением времени в ней возрастают главные напряжения. Это связано с ростом изгибающих моментов, который в свою очередь обусловлен тем, что для полимеров, подчиняющихся нелинейному уравнению Максвелла-Гуревича длительный коэффициент Пуассона всегда выше мгновенного.

Таким образом, расчет пластин только в упругой стадии приводит к заниженным значениям напряжений, и как следствие возможному ее разрушению в процессе эксплуатации.

#### Библиографический список:

1. Лукашевич А.А. Теория расчёта пластин и оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2017. 131 с.
2. Савченко А.А. Моделирование реологических процессов и прогнозирование прочностных характеристик пластин из полимерных и композитных материалов: //диссертация ... канд. физ.-мат. наук: 02.00.06/ – КБГУ им. Х.М. Бербекова, 2018. - 145 с.
3. Монахов В.А. Теория пластин и оболочек. Пенза: ПГУАС, 2016. 252 с.
4. Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание. Москва: ООО И.Д. Вильямс, 2008. 1104 с.
5. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. pp. 707-710.
6. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. 264 с.
7. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1004-1005. pp. 257-260.
8. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Козельская М.Ю. Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона // Научное обозрение. 2014. № 11. С. 759-763.
9. Chepurnenko A.S., Yazyev B.M., Savchenko A.A. Calculation for the circular plate on creep considering geometric nonlinearity // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. pp. 1680–1685.
10. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams// International Journal of Mechanical Sciences. 2008. Vol. 50. No. 3. Pp. 578-588.
11. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams // Structural engineering and mechanics. 2010. v. 35. №5. P. 631-643.

12. Магомедов М.А. и др. Численно-аналитический метод в решении задачи ползучести пологой оболочки // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2025. – Т. 52. – №. 2. – С. 190-200.
13. Литвинов С.В. и др. Определение реологических параметров бетона на основе нелинейного обобщенного уравнения Максвелла-Гуревича // Вестник евразийской науки. – 2023. – Т. 15. – №. 1. – С. 55.

#### References:

1. Lukashevich, A.A. "Theory of Plate and Shell Calculations." SPb.: SPbGASU, 2017. 131 p. (In Russ)
2. Savchenko, A.A. "Modeling Rheological Processes and Predicting the Strength Characteristics of Polymer and Composite Plates." Dissertation ... Cand. Sci. (Phys. and Mathematics): 02.00.06/ – Berbekov Kabardino-Balkarian State University, 2018. 145 p. (In Russ)
3. Monakhov, V.A. "Theory of Plates and Shells." Penza: PSUAS, 2016. 252 p. (In Russ)
4. Edwards, C.G., Penny, D.E. "Differential Equations and Boundary Value Problems: Modeling and Computation Using Mathematica, Maple, and MATLAB." 3rd edition. Moscow: OOO I.D. Williams, 2008. 1104 p. (In Russ)
5. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep. *Advanced Materials Research*. 2014; 900: 707-710.
6. Samul V.I. Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Vysshaya Shkola, 1982:264. (In Russ)
7. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation of stability of compressed polymer rods considering creep. *Advanced Materials Research*. 2014;1004-1005:257-260.
8. Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V., Kozelskaya M.Yu. Stress-strain state of a prestressed reinforced concrete cylinder taking into account concrete creep. *Scientific Review*. 2014; 11:759-763. (In Russ)
9. Chepurnenko A.S., Yazyev B.M., Savchenko A.A. Calculation for the circular plate on creep considering geometric nonlinearity. *Procedia Engineering*. 2016;150:1680–1685.
10. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2008; 50(3): 578-588.
11. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams. *Structural engineering and mechanics*. 2010;35(5): 631-643.
12. Magomedov M. A. et al. Numerical-analytical method for solving the creep problem of a shallow shell. *Herald of the Dagestan State Technical University. Technical sciences*. 2025;52(2):190-200. (In Russ)
13. Litvinov S. V. et al. Determination of rheological parameters of concrete based on the nonlinear generalized Maxwell-Gurevich equation. *Bulletin of Eurasian Science*. 2023;15(1): 55. (In Russ)

#### Сведения об авторах:

Волосатова Татьяна Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика»; [kulikta@mail.ru](mailto:kulikta@mail.ru); ORCID 0000-0001-6416-0212

Мерзлякова Александра Дмитриевна, преподаватель кафедры «Системы автоматизированного проектирования»; [Merzlyakova@mail.ru](mailto:Merzlyakova@mail.ru); ORCID 0000-0001-9161-1701

Беспалов Максим Викторович, аспирант кафедры «Технологии строительства и конструкционных материалов»; [Maxim@mail.ru](mailto:Maxim@mail.ru)

Литвинов Степан Викторович, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры «Строительная механика и теория сооружений»; [litvstep@yandex.ru](mailto:litvstep@yandex.ru); ORCID 0000-0001-5729-1425

Магомедов Марсель Айдемирович, аспирант кафедры «Строительная механика»; [marsmag05@ya.ru](mailto:marsmag05@ya.ru). ORCID 0000-0001-5517-919X;

#### Information about authors:

Tatyana A. Volosatova, Cand. Sci. (Physic. and Mathemat.), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics; [kulikta@mail.ru](mailto:kulikta@mail.ru); ORCID 0000-0001-6416-0212

Aleksandra D. Merzliakova, Lecturer, Department of Computer-Aided Design Systems; ORCID 0000-0001-9161-1701

Maxim V. Bepalov, Postgraduate Student, Department of Construction Technology and Structural Materials; [Maxim@mail.ru](mailto:Maxim@mail.ru)

Stepan V. Litvinov, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; [litvstep@yandex.ru](mailto:litvstep@yandex.ru); ORCID 0000-0001-5729-1425

Marcel A. Magomedov, Postgraduatet, Department of Structural Mechanics; [marsmag05@ya.ru](mailto:marsmag05@ya.ru). ORCID 0000-0001-5517-919X

**Конфликт интересов/Conflict of interest.**

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.**

**Поступила в редакцию/ Received 05.10.2025.**

**Одобрена после рецензирования/Revised 01.11.2025.**

**Принята в печать /Accepted for publication 21.11.2025.**