

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.04

DOI: 10.21822/2073-6185-2025-52-3-191-198



Оригинальная статья /Original article

**Статически определимые и неопределимые фермы
с позиции принципа стационарного действия**

В.А. Зинькова

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46, Россия

Резюме. Цель. В статье рассматривается соответствие статически определимых и статически неопределимых ферм общезначимому принципу стационарного действия и его конкретному проявлению в механике деформируемого твердого тела – обобщенным вариационным принципам Лагранжа и Кастильяно. **Метод.** Проектные задачи для ферм решены на основе теории структурного синтеза с использованием обобщенного вариационного принципа Кастильяно и метода множителей Лагранжа. Рассмотрены изопериметрические задачи с уравнением связи, устанавливающим заданный объем материала. Из условия стационарности обобщенного функционала потенциальной энергии деформации выведены уравнения для определения варьируемых параметров. Для трехстержневой статически неопределимой фермы обнаружено ее вырождение в единый стержень, а для многопролетной фермы – комплексные числа для искомых параметров. **Результат.** Дано обобщение теоремы Васютинского, сформулированной без учета проблемы устойчивости равновесия элементов системы. Установлено, что для статически определимой фермы минимуму потенциальной энергии деформации соответствует минимум объема материала и при наличии сжатых стержней. Дано обобщение теоремы Леви с учетом устойчивости равновесия сжатых стержней, которое подтвердило поиск рациональных систем в области статически определимых систем с обеспечением глобальных минимумов потенциальной энергии деформации и объема материала. Лишенная объективного критерия рациональности, задача синтеза статически неопределимой фермы может рассматриваться при различных вариантах субъективных критериев с локальным минимумом целевой функции. **Вывод.** Для обеспечения глобальных показателей качества механического сопротивления конструктивных систем, в частности ферм, их анализ и синтез должны производиться на единой методологической основе – с использованием принципа стационарного действия.

Ключевые слова: статически определимые и неопределимые фермы, вариационные принципы синтеза конструкций

Для цитирования: В.А. Зинькова. Статически определимые и неопределимые фермы с позиции принципа стационарного действия. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(3): 191-198. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-3-191-198

**Statically determinate and indeterminate trusses from the standpoint
of the principle of stationary action**

V. A. Zinkova

V.G. Shukhov Belgorod State Technological University,
46 Kostyukova Str, Belgorod, 308012, Russia

Abstract. Objective. The article considers the correspondence of statically definable and statically indefinable trusses to the general physical principle of stationary action and its specific manifestation in the mechanics of deformable solids – the generalized principles of Lagrange and Castigliano. **Method.** The design tasks for the farms were solved on the basis of the theory of structural synthesis using the generalized Castigliano variational principle and the Lagrange

multiplier method. Isoperimetric problems with a coupling equation that establishes a given volume of material are considered. Equations for determining the variable parameters are derived from the stationarity condition of the generalized functional of the potential strain energy. For a three-core statically indeterminate truss, its degeneration into a single core was found, and for a multi-span truss, complex numbers for the desired parameters were found. **Result.** A generalization of Vasyutinsky's theorem, formed without taking into account the problem of stability of the equilibrium of the system elements, is given. It is established that for a statically definable truss, the minimum of the potential energy of deformation corresponds to the minimum of the volume of the material even in the presence of compressed rods. A generalization of Levy's theorem is given, taking into account the stability of the equilibrium of compressed rods, which confirmed the search for rational systems in the field of statically definable systems with global minima of the potential energy of deformation and the volume of the material. Devoid of an objective criterion of rationality, the task of synthesizing a statically indeterminate farm can be considered with a variety of subjective criteria with a local minimum of the objective function. **Conclusion.** To ensure global indicators of the mechanical resistance qualities of structural systems, in particular trusses, their analysis and synthesis should be carried out on a single methodological basis using the principle of stationary action.

Keywords: statically definable and indefinable trusses, variational principles of structural synthesis

For citation: V. A. Zinkova. Statically determinate and indeterminate trusses from the standpoint of the principle of stationary action. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(3):191-198. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-3-191-198

Введение. В инженерной практике статически неопределимые системы нашли применение намного раньше, чем статически определимые. Их формирование основывалось на конструктивном чутье и в отдельных случаях на результатах испытания приближённых моделей. Даже в первой половине XIX века, когда появились расчёты проектируемых сооружений, статически неопределимые системы всё ещё не уступали место экономичным статически определимым по психологическим соображениям.

Несомненный интерес представляет теорема Леви: из всех ферм заданных возможных конфигураций при одном нагружении найдётся такая статически определимая ферма, вес которой будет не больше любой другой.

Наличие железобетона, природе которого свойственна статическая неопределимость конструкций, а также появление сложных металлических сооружений сохранили интерес к статически неопределимым системам.

Постановка задачи. Научное исследование должно иметь фундаментальную базу. Обратимся к общефизическому вариационному принципу стационарного действия. Его первоначальным объектом было абсолютно твёрдое тело. Затем он был приложен к деформируемому твёрдому телу (принципы Лагранжа и Кастильяно). Его приемлемость для органического мира создаёт предпосылки для проектирования технических систем, приближённых к природным объектам [1-3].

Теория структурного синтеза [4] предусматривает обобщение принципов Лагранжа и Кастильяно за счёт конфигурации и модулей материала. Стационарность исходного функционала рассматривается при дополнительных условиях (в форме уравнений связи), накладываемых на искомые функции ψ напряженно-деформируемого состояния, конфигурации, модулей материала тела:

$$\varphi(\vec{\Psi}) = 0, \int_{\omega} \varphi(\vec{\Psi}) = c, \quad (1)$$

где ω – допустимая область интегрирования (с учётом директивных требований к конструкции), c – постоянная в изопериметрической задаче.

Изопериметрическая задача имеет важное стратегическое значение. Так, при заданном объеме материала тела варьирование его топологии, геометрии и параметров элементов

приводит к рациональной композиции в отношении сопротивления заданным внешним воздействиям. Одновременно могут быть выявлены примечательные качества такого рода системы.

При проектировании дискретных систем, в частности ферм из линейно-упругого материала, предпочтительно использовать обобщённый вариационный принцип Кастильяно с исходным функционалом потенциальной энергии деформации [5-7].

Методы исследования. Рассмотрим статически определимые фермы.

На рис. 1 представлена ферма, состоящая из двух растянутых стержней. Из условия равновесия узла находим усилия:

$$N_1 = F(\cos \alpha_1 + \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cos \alpha_2)^{-1}, \quad N_2 = F \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} (\cos \alpha_1 + \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cos \alpha_2)^{-1}. \quad (2)$$

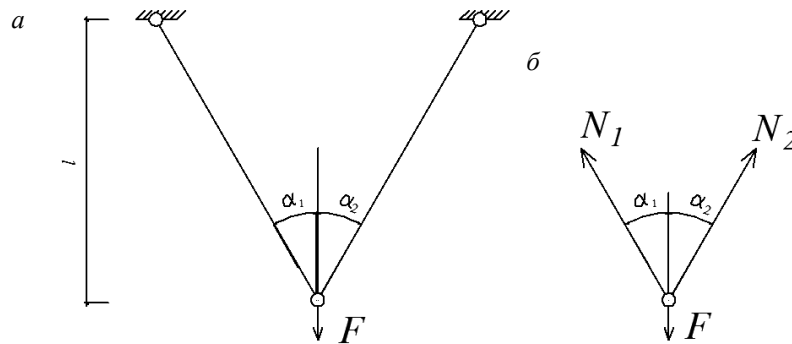


Рис. 1 - Статистически определимая ферма: а – схема, б – внутренние усилия

Fig. 1 - Statically definable truss: a – scheme, б – internal efforts

Потенциальная энергия деформации имеет вид:

$$U = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i}, \quad (3)$$

где E – модуль Юнга, A_i – площадь поперечного сечения i -го стержня.

Решим изопериметрическую задачу при варьировании величин A_i и заданном объёме материала V_0 :

$$\sum_{i=1}^2 A_i l_i = V_0. \quad (4)$$

Используем метод множителей Лагранжа (μ). В изопериметрической задаче они являются постоянными. Функционал вариационной задачи имеет вид:

$$J = \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i} + \mu (\sum_{i=1}^2 A_i l_i - V_0). \quad (5)$$

Условие его стационарности представляем в виде [8]:

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial J}{\partial \mu} \delta \mu = 0. \quad (6)$$

Из условия: $\partial J / \partial \mu = 0$, $\partial J / \partial A_i = 0$ вытекают уравнение (4) и специфические уравнения:

$$-\frac{N_i^2}{2EA_i^2} + \mu = 0. \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

Так как N_i / A_i выражает напряжение в стержне σ_i , то уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{\sigma_i^2}{2E} = \mu \quad (= \text{const}), \quad (8)$$

свидетельствующий о равнонапряжённости фермы. По теореме Васютинского [9] для линейно-упругого тела, ей соответствует минимум потенциальной энергии деформации (проявление принципа стационарного действия). А поскольку она пропорциональна объёму тела, то последующий также оказывается минимальным. Таким образом, условие $\sigma_i = \text{const}$ является критерием рациональности фермы. Это главный результат вариационной постановки данной изопериметрической задачи. Сами по себе площади A_i легко определить из системы уравнений (4), (7).

На рис. 2 представлена ферма, состоящая из растянутого и сжатого стержней. Её можно представить как виртуальную систему с внутренними силами N_i/φ_i , где φ_i – коэффициент уменьшения расчётного сопротивления для сжатых стержней (для растянутых стержней $\varphi_i = 1$).

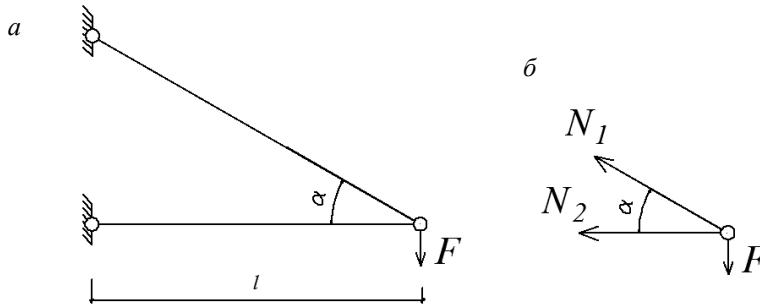


Рис. 2 - Статистически определяемая ферма: а – схема, б – внутренние усилия

Fig. 2 - Statically definable truss: a – scheme, б – internal efforts

Из условий равновесия находим усилия:

$$N_1 = \frac{F}{\sin \alpha}, \quad N_2 = -F \operatorname{ctg} \alpha. \quad (9)$$

Потенциальная энергия деформации имеет вид:

$$U = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i^2 l_i}{2E A_i \varphi_i^2}. \quad (10)$$

Решим изопериметрическую задачу при варьировании величин A_i и заданном объеме материала V_0 (формула 4). Функционал вариационной задачи имеет вид:

$$J = \frac{N_i^2 l_i}{2E A_i \varphi_i^2} + \mu (\sum_{i=1}^2 A_i l_i - V_0). \quad (11)$$

Условие его стационарности представим в виде (6). Из условий $\partial J / \partial A_i = 0$ вытекают условия:

$$-\frac{N_i^2}{2EA_i^2 \varphi_i^2} + \mu = 0. \quad (i=1,2) \quad (12)$$

Величину $N_i/(\varphi_i A_i)$ представим как квазинатяжение $\bar{\sigma}_i$, а уравнение (12) представим в виде:

$$\frac{\bar{\sigma}_i^2}{2E} = \mu (= \text{const}). \quad (13)$$

Это свидетельствует о квазиравнонапряжённости фермы (обобщение теоремы Васютинского, сформулированной без учёта проблемы устойчивости равновесия элементов системы).

Приняв теперь в качестве дополнительного условия равенство $\bar{\sigma}_i = R$, где R – расчётное сопротивление материала, определим площади сечений стержней:

$$A_i = \frac{|N_i|}{\varphi_i R}. \quad (14)$$

Введя в уравнение (10) вместо $|N_i|/\varphi_i$ величину RA_i из формулы (14), получим:

$$U = \frac{R^2 V}{2E}, \quad (15)$$

то есть минимуму энергии U соответствует минимум объёма материала V .

Рассмотрим изопериметрическую задачу для статически неопределимой системы (рис. 3). Запишем уравнение равновесия: $2N_1 \cos \alpha + N_2 = F$, откуда $N_1 = (F - N_2)/2 \cos \alpha$.

Условие совместности деформаций имеет вид:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha, \quad (16)$$

где Δl_1 и Δl_2 – приращения длин стержней, или

$$\frac{N_1 l}{EA_1 \cos^2 \alpha} - \frac{N_2 l}{EA_2} = 0, \quad (17)$$

где A_1, A_2 – площади поперечных сечений.

Приняв во внимание $N_1/A_1 = \sigma_1$ и $N_2/A_2 = \sigma_2$, устанавливаем отсутствие равнонапряженности (являющейся критерием рациональности статически определимой фермы):

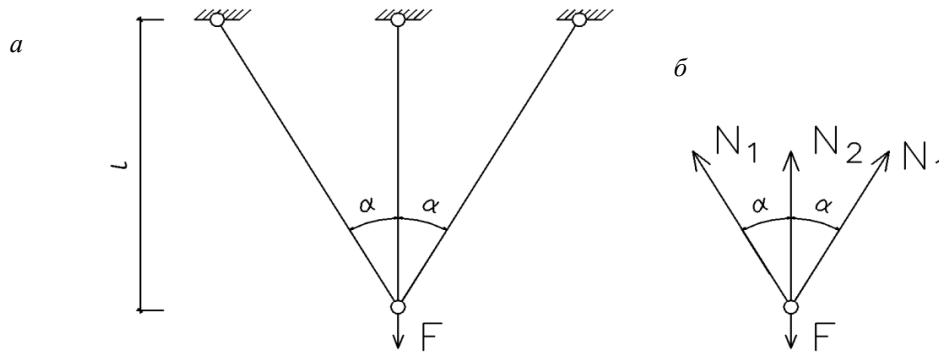
$$\sigma_1 = \sigma_2 \cos^2 \alpha. \quad (18)$$


Рис. 3 - Статически неопределимая ферма: *a* – схема, *б* – внутренние усилия
 Fig. 3 - Statically indefinable truss: *a* – scheme, *б* – internal efforts

Потенциальная энергия деформация равна:

$$U = \frac{(F-N_2)^2 l}{4EA_1 \cos^3 \alpha} + \frac{N_2^2 l}{2EA_2}. \quad (19)$$

Введём дополнительное условие:

$$\frac{2A_1 l}{\cos \alpha} + A_2 l = V_0, \quad (20)$$

где V_0 – заданный объём.

Взяв за основу вариационный принцип Кастильяно, представим функционал задачи в виде:

$$J = \frac{(F-N_2)^2 l}{4EA_1 \cos^3 \alpha} + \frac{N_2^2 l}{2EA_2} + \mu \left(\frac{2A_1 l}{\cos \alpha} + A_2 l - V_0 \right). \quad (21)$$

Следствием стационарности функционала (21) является условие:

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial N_2} \delta N_2 + \frac{\partial J}{\partial A_1} \delta A_1 + \frac{\partial J}{\partial A_2} \delta A_2 + \frac{\partial J}{\partial \mu} \delta \mu = 0. \quad (22)$$

Из условий $\partial J / \partial N_2 = 0$, $\partial J / \partial A_1 = 0$, $\partial J / \partial A_2 = 0$, $\partial J / \partial \mu = 0$ вытекают уравнения:

$$-\frac{(F-N_2)l}{2EA_1 \cos^3 \alpha} + \frac{N_2 l}{EA_2} = 0, \quad (23)$$

$$-\frac{(F-N_2)^2 l}{4EA_1^2 \cos^3 \alpha} + \frac{2\mu l}{\cos \alpha} = 0, \quad (24)$$

$$-\frac{N_2^2 l}{2EA_2^2} + \mu l = 0, \quad (25)$$

$$\frac{2A_1 l}{\cos \alpha} + A_2 l = V_0. \quad (26)$$

Исключая множитель μ , приводим уравнения (23), (24) к одному:

$$-\frac{(F-N_2)^2}{4A_1^2 \cos^2 \alpha} + \frac{N_2^2}{A_2^2} = 0. \quad (27)$$

Из уравнений (23) и (27) легко вывести синтезирующее уравнение:

$$\cos^4 \alpha - 1 = 0, \quad (28)$$

откуда $\alpha = 0$, что означает вырождение трёхстержневой фермы, обращение её в единый стержень, то есть статическую определимость рациональной системы.

Обратимся к статически неопределимой ферме (рис. 4) пролётом $l=6d=18$ м и высотой $h=2$ м и исследуем возможность квазиравнонапряжённого состояния при заданном расчётном сопротивлении R .

Усилие в лишнем стержне 2-8 (6-9) обозначим X . Длины стержней и величины внутренних усилий в них от X представлены в табл. 1.

Предположив варьируемыми величинами усилие X и геометрические параметры h_1 и h_2 (длины стержней 3-11 и 5-13), запишем функционал потенциальной энергии деформации (обобщённый функционал Кастильяно при линейном физическом законе):

$$\tilde{U} = U(h_1, h_2) + \Delta U(X, h_1), \quad (29)$$

где величина $U(h_1, h_2)$ относится к основной статически определимой системе, дополнение $\Delta U(X, h_1)$ отображает влияние усилия X и параметра h_1 .

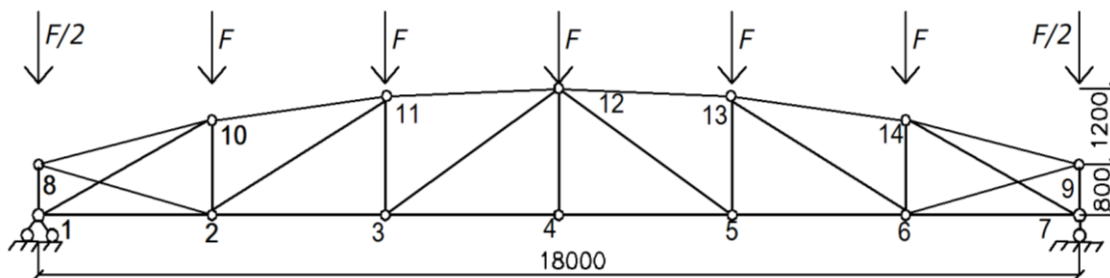


Рис. 4 - Статически неопределимая ферма
 Fig. 4 - A statically indeterminate truss

Таблица 1. Длины стержней и продольные усилия от X
 Table 1. Rod lengths and longitudinal forces from X

Стержень Rod	Длина Length	Внутреннее усилие Internal Force
1-8	$0,4h$	$-Xh_1/\sqrt{0,16h^2 + d^2}$
2-10	h_1	$-0,4Xh/\sqrt{0,16h^2 + d^2}$
1-2	d	$-Xd/\sqrt{0,16h^2 + d^2}$
8-10	$\sqrt{(h_1 - 0,4h)^2 + d^2}$	$-X/\sqrt{\frac{(h_1 - 0,4h)^2 + d^2}{0,16h^2 + d^2}}$
1-10	$\sqrt{h_1^2 + d^2}$	$X/\sqrt{\frac{h_1^2 + d^2}{0,16h^2 + d^2}}$
2-8	$\sqrt{(0,4h)^2 + d^2}$	X

Условие стационарности функционала (4) представляем в виде:

$$\partial \tilde{U} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} \partial X + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial h_1} \partial h_1 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial h_2} \partial h_2 = 0. \quad (30)$$

Вычислим величину ΔU в предположении квазиравнонапряженности фермы по условию обобщенной теоремы Васютинского:

$$\Delta U = \frac{2XR}{E\sqrt{0,16h^2 + d^2}} \left[\frac{0,4hh_1}{\varphi_1} + 0,4hh_1 + d^2 + \frac{(h_1 - 0,4h)^2 + d^2}{\varphi_2} + \frac{h_1^2 + d^2}{\varphi_3} + (0,16h^2 + d^2) \right]. \quad (31)$$

Из условия $\partial \tilde{U} / \partial X = \partial \Delta U / \partial X = 0$ вытекает уравнение, содержащее в левой части слагаемые из квадратной скобки. При $d=3$, $h=2$ и в предположении сначала $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0,5$, затем $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0,15$ оно имеет вид:

$$\begin{aligned} h_1^2 - 0,2h_1 + 13,978 &= 0, \\ h_1^2 - 0,34h_1 + 10,71 &= 0. \end{aligned}$$

Комплексные числа для h_1 означают отсутствие решения задачи, в постановку которой заложено наличие в напряжениях величины расчетного сопротивления R , а именно квазиравнонапряженности фермы, что привело к нарушению условий совместности деформаций. Это означает, что минимальный объем фермы будет получен при устранении лишних стержней (обобщение теоремы Леви, сформулированной без учета проблемы устойчивости равновесия элементов системы).

Обсуждение результатов. Таким образом, статически неопределимая система с позиции структурного синтеза в рамках принципа стационарного действия не удовлетворяет его установке – условию стационарности функционала задачи. Рациональная статически определимая ферма имеет глобальный минимум потенциальной энергии деформации и глобальный минимум объема однородного материала. Это следует из обобщенной теоремы Васютинского [4]. Лишённая объективного критерия рациональности, задача синтеза статически неопределимой фермы может рассматриваться при различных вариантах

субъективных критериев и привести к локальным минимумам целевой функции и объёма материала [10-13] (компромиссное решение).

В научных исследованиях получает распространение привлечение различных материалов к композиции стержневых систем, в частности, ферм. Чередование областей с высокой и низкой плотностью материала рассматривается в работах [14-16]. Последующим шагом в решении этой проблемы явились, так называемые, симплекс-методы [17-19].

В качестве оптимизирующей функции рассматривается потенциальная энергия системы или перемещения узлов, а ограничения накладываются на объём используемого материала. Эта установка соответствует вариационному принципу синтеза конструкций [4].

Возможны и принципиальные издержки. Примером служит работа [20], в которой площади сечений стержней статически неопределимой фермы определяются на основе критерия минимума объёма материала при дополнительном условии равнонапряжённости (без учёта возможной потери устойчивости стержней). Но, по теореме Васютинского, использованные критерий и дополнительное условие вполне идентичны, что нарушает суть постановки оптимизационной задачи и сводит на нет содержание работы. Следует заметить, что статически неопределимые фермы в заголовке статьи представляются равнопрочными, что опровергается результатами исследований, изложенными в настоящей статье.

Вывод. Изложенные результаты исследований приводят к обобщению теоремы Леви, сформулированной без учёта проблемы устойчивости равновесия элементов стержневых систем. В то же время утверждается, что анализ и синтез конструктивных систем, в частности ферм, должны производиться на единой методологической основе – с использованием вариационного принципа стационарного действия.

Благодарности. Работа выполнена с использованием оборудования на базе Центра высоких технологий БГТУ им. В.Г. Шухова.

Acknowledgments. This work was carried out using equipment from the V.G. Shukhov BSTU High Technology Center.

Библиографический список:

1. Юрьев А.Г. Естественный фактор оптимизации конструкций. Белгород: Изд-во БГТУ, 2003. 110 с.
2. Rashevsky N. Mathematical biophysics: Physico-mathematical foundations of biology. V.2. New York: Dover. Publ, 1960. 453 p.
3. Patzelt O. Wachsen und Bauen: Konstruktionen in Natur und Technik. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1972. 168 p.
4. Юрьев А.Г. Оптимизация топологии и геометрии конструкций. Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. 96 с.
5. Юрьев А.Г. Оптимизация структуры металлических ферм / А.Г. Юрьев, В.А. Зинькова, Н.А. Смоляго, О.А. Яковлев // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 7. С.41-45.
6. Юрьев А.Г. Оптимизация нагружения металлических ферм / А.Г. Юрьев, В.А. Зинькова // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2020. №2. С. 56-61.
7. Зинькова В.А. Формы консоли на основе вариационного принципа Кастильяно // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 4(61). С. 90–95.
8. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.-Л.: Гостехиздат, 1960. 296 с.
9. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Techniques. 1960. V. 8. No 6. pp. 259–268.
10. Pippard A.I.S. On a method for the direct design of framed structures having redundant bracing // Techn. Rep. Aero. Res. Com. London, 1923.
11. Рабинович И.М. К теории статически неопределимых ферм. М.: Транспечать, 1933. 120 с.
12. Радциг Ю.А. Инновационные свойства статически неопределимых ферм наименьшего объёма // Материалы науч.-техн. конф. 1966 г. по строит. механике и строит. конструкциям. Казань: Изд-во Каз ИСИ, 1966. С.86-87.
13. Мажид К.И. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Высшая школа, 1979. 238 с.
14. Bendsoe M.P. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method / M.P. Bendsoe, N. Kikuchi // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1988. No 71(2). P. 197-224.
15. Diaz A.R. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization using a homogenization method / A.R. Diaz, N. Kikuchi // Int. J. Numer. Methods Eng. 1992. No 35. P. 1487-1502.
16. Bendsoe M.P. Topology optimization: theory, methods, and applications / M.P. Bendsoe, O. Sigmund. Berlin: Springer. 2003. 376 p.
17. Rozvany G.I.N. Structural design via optimality criteria. Dordrecht: Kluwer, 1989, 463 p.

18. Rozvany G.I.N. Topology optimization in structural design / G.I.N. Rozvany, N. Zhou, O. Sigmund // *Advances in design optimization*. London: Adeli. 1994. P.240-299.
19. Yang R.J. Automotive applications of topology optimization / R.J. Yang, A.I. Chahande// *Structural Optimization*. 1995. № 9. P.245-249.
20. Липин Е.К. Некоторые свойства статически неопределимых равнопрочных ферм / Уч. Зап. ЦАГИ, 1983. Т.14. № 5. С. 72-79.

References:

1. Yuriev A.G. Natural factor of constructions optimization. Belgorod: BSTU, 2003; 110. (In Russ)
2. Rashevsky N. Mathematical biophysics: Physico-mathematical foundations of biology. V.2. New York: Dover. Publ, 1960. 453 p.
3. Patzelt O. Wachsen und Bauen: Konstruktionen in Natur und Technik. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1972; 168.
4. Yuriev A.G. Topology and geometry optimization of constructions. Belgorod: BSTU, 2018; 96. (In Russ)
5. Yuriev A.G. Structure optimization of metallic trusses / A.G. Yuriev, V.A. Zinkova, N.A. Smolyago, O.A. Yakovlev // *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2017;7:41-45. (In Russ)
6. Yuriev A.G. Loading optimization of metallic trusses/ A.G. Yuriev, V.A. Zinkova. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2020. No2; 56-61. (In Russ)
7. Zinkova V.A. Consol forms on base of Castiliano's variational principle. *Bulletin of Engineering School of DVFU*. 2024;4(61):90-95. (In Russ)
8. Lavrentiev M.A., Lyusternik L.A. Course of variational calculus. Moscow: Gostechizdat. 1960;296. (In Russ)
9. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength. *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Techniques*. 1960;8(6): 259-268.
10. Pippard A.I.S. On a method for the direct design of framed structures having redundant bracing. *Techn. Rep. Aero. Res. Com. London*, 1923.
11. Rabinovich I.M. To theory of statically indefinable trusses. Moscow: *Transpechat*. 1933; 120. (In Russ)
12. Radeig Yu.A. Recent properties of statically indefinable trusses having least volume. Materials of research conference (1966) on mechanics structure and building constructions. Kazan: Publishing House KazISI. 1966; 86-87. (In Russ)
13. Majid K.I. Optimal design of constructions. Moscow: *Nauka*. 1979; 238. (In Russ)
14. Bendsoe M.P. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method / M.P. Bendsoe, N. Kikuch. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*. 1988;71(2):197-224.
15. Diaz A.R. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization sing a homogenization method / A.R. Diaz, N. Kikuchi. *Int. J. Numer. Methods Eng*. 1992;35:1487-1502.
16. Bendsoe M.P. Topology optimization: theory, methods, and applications/ M.P. Bendsoe, O. Sigmund. Berlin: *Springer*. 2003;376 p.
17. Rozvany G.I.N. Structural design via optimality criteria. Dordrecht: *Kluwer*, 1989; 463 p.
18. Rozvany G.I.N. Topology optimization in structural design / G.I.N. Rozvany, N. Zhou, O. Sigmund. *Advances in design optimization*. London: Adeli. 1994:240-299.
19. Yang R.J. Automotive applications of topology optimization / R.J. Yang, A.I. Chahande. *Structural Optimization*. 1995;9:245-249.
20. Lipin E.K. Some properties of statically indefinable of equal strength. *Scientific Notes of CAGI*. 1983; 14 (5):72-79. (In Russ)

Сведения об авторе:

Зинькова Виктория Анатольевна, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Теоретическая механика и сопротивление материалов»; vikzinkova@mail.ru

Information about author:

Victoria A. Zinkova, Cand. Sci. (Eng.), Assoc.Prof., Department of Theoretical Mechanics and Strength of Materials; vikzinkova@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов/The author declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 16.04.2025.

Одобрена после рецензирования/Reviced 25.05.2025.

Принята в печать/Accepted for publication 20.08.2025.