

Нелинейные модели балок с переменной жёсткостью

А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Р.И. Вишталов

Дагестанский государственный технический университет,
367015, г. Махачкала, пр. И.Шамиля,70, Россия

Резюме. Цель. В статье рассматриваются балочные конструкции, обладающие переменной жёсткостью, в которых проявляются физические нелинейности их опор и материала самой конструкции. В статье рассматриваются вопросы нелинейности опор, переменность жёсткости балки и дано решение соответствующих дифференциальных уравнений, содержащих переменные коэффициенты. **Метод.** Приведены особенности работы нелинейно-упругих опор балок, описывается переменность жёсткости, указанных конструкций, которые проявляют существенные физические нелинейности. Путём введения специальных обозначений дифференциальные уравнения, содержащие переменные коэффициенты, приводятся к виду, которые позволяют получить классическое их решение. **Результат.** Рассмотрены балки на нелинейно-упругих опорах, балки с переменной жесткостью, а также балочные конструкции, балки, материал которых не следует закону Гука. Построено классическое решение дифференциального уравнения поперечного изгиба балок с переменной жёсткостью; приведены расчётные схемы, формулы, таблицы и графики. **Вывод.** Разработанные алгоритмы и полученные результаты позволяют учитывать нелинейную работу опор, влияние переменности жёсткости балок, физические нелинейности материала конструкции. Результаты исследования могут найти применение в практике проектирования и строительства.

Ключевые слова: балки, опоры, нелинейности, дифференциальные уравнения, поперечный изгиб, внутренние усилия, прогибы, перемещения, расчётные схемы

Для цитирования: А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Р.И. Вишталов. Нелинейные модели балок с переменной жёсткостью. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(2):235-246. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-2-235-246

Nonlinear models of beams with variable stiffness

A.K. Yusupov, Kh.M. Muselemov, R.I. Vishtalov

Daghestan State Technical University,
70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367026, Russia

Abstract. Objective. The article examines beam structures with variable rigidity, in which physical nonlinearities of their supports and the material of the structure itself are manifested. The article examines issues of support nonlinearity, beam rigidity variability, and provides a solution to the corresponding differential equations containing variable coefficients. **Method.** The features of the operation of nonlinear elastic beam supports are presented, and the variability of rigidity of the specified structures, which exhibit significant physical nonlinearities, is described. By introducing special notations, differential equations containing variable coefficients are reduced to a form that allows constructing their classical solution. **Result.** Beams on nonlinear-elastic supports, beams with variable stiffness, as well as beam structures, beams, the material of which does not follow Hooke's law, are considered. A classical solution to the differential equation of transverse bending of beams with variable rigidity is constructed; calculation schemes, formulas, tables and graphs are provided. **Conclusion.** The developed algorithms and the obtained results

allow taking into account the nonlinear operation of supports, the influence of variability of beam stiffness, physical nonlinearities of the material of the structure. The results of the study can be used in the practice of design and construction.

Keywords: beams, supports, nonlinearities, differential equations, transverse bending, internal forces, deflections, displacements, calculation schemes

For citation: A.K. Yusupov, Kh.M. Muselemov, R.I. Vishtalov. Nonlinear models of beams with variable stiffness. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(2): 235-246. (In Russ) DOI:10.21822 /2073-6185-2025-52-2-235-246

Введение. Под действием внешних нагрузок [1-8] балочные конструкции подвергаются изгибу. При этом проявляются различные нелинейности, описывающие изменения геометрии (перемещения), зависимости напряжений от деформации, контактные особенности опор (дискретных и сплошных), которые существенно влияют на работу балок, как системы, работающей на упругих или упруго-податливых опорах. Принято классифицировать нелинейности следующим образом: физические нелинейности; геометрические нелинейности; конструктивные нелинейности.

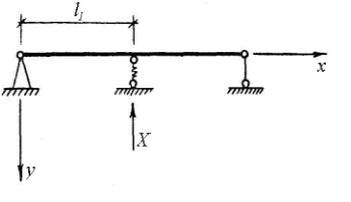
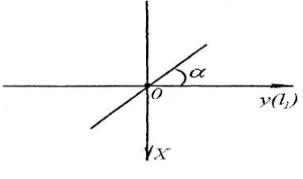
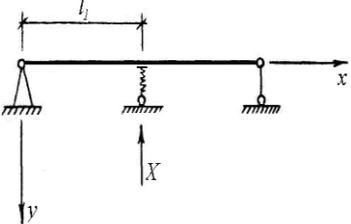
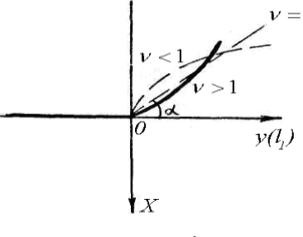
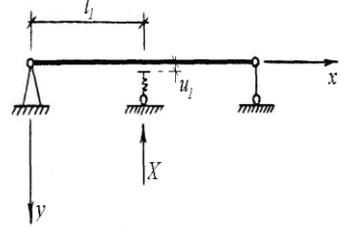
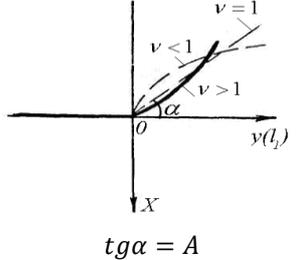
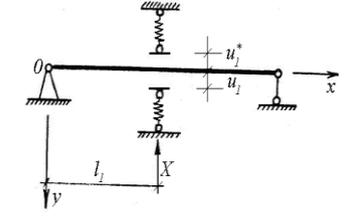
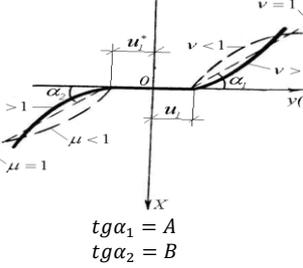
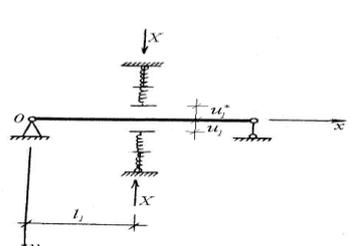
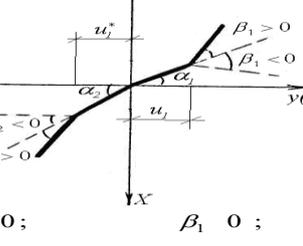
При расчете реальных балочных конструкций указанные выше нелинейности проявляются по-разному. Эти нелинейности встречаются каждая отдельно и в сочетании друг с другом. Например, при больших перемещениях [7] проявляются геометрические нелинейности; при жестких конструкциях существенное влияние имеют физические нелинейности; если балочная конструкция покоится на сплошных или дискретных опорах, то контактные напряжения нелинейно зависят от величины прогибов, перемещении. При этом могут проявляться физические нелинейности конструкционного материала самой балки. При расчете и проектировании балочных конструкций необходимо учитывать влияние указанных выше нелинейностей на напряженно деформированное состояние конструкции.

Многие части конструкций зданий и сооружений, детали машин и механизмов в процессе эксплуатации взаимодействуют между собой. При этом совместная работа взаимодействующих конструкций зачастую предопределяет их расчетные параметры, которые используются при проектировании. Неправильное описание особенностей работы опор (связей) приводит к существенным ошибкам и к аварийной ситуации конструкции. Часто при учете особенностей опор, на которых покоится балка, предполагается, что связь между балочной конструкцией и опорой - линейная как при положительных значениях прогибов, так и при отрицательных. В практике проектирования и строительства встречаются и более сложные ситуации: связь между реакциями опор и прогибами балки описываются нелинейными функциями. При этом расчетная схема балки существенно меняется. Представленные положения о балочных конструкциях, лежащих на дискретных опорах, справедливы также и в случае плит, лежащих на дискретных опорах или массивах.

Постановка задачи. Решение задач, связанных с балками, где учитываются указанные нелинейности, достаточно сложно. Здесь приходится применять численные методы анализа [5], где применяются различного рода вариационные и итерационные методы [4] (методы последовательных приближений). Здесь необходимо отметить, что иногда нелинейности, существенно влияют на напряженно-деформированное состояние балочных конструкций. При расчёте и компоновке балочных конструкций их опоры рассматриваются как линейные системы. В статье разработаны алгоритмы с использованием обобщённых функций, что позволяет вводить в дифференциальные уравнения поперечного изгиба балок соответствующие звенья.

Методы исследования. Для описания особенностей работы этих опор пользуются моделью Винклера. Работа опор балочных конструкций не всегда подчиняется линейным зависимостям: эти зависимости существенно нелинейны и для их описания необходимо пользоваться обобщёнными функциями [3,6], которые позволяют учитывать дискретность опор и скачкообразные изменения их реакций. Обычные функции не позволяют проделать эти процедуры.

Таблица 1. Схемы опор балки и соответствующие им аналитические выражения
Table 1. Beam support schemes and corresponding analytical expressions

№ п/п	Схема опоры Support diagram	График функции Function graph	Аналитические выражения Analytical expressions Function
1			$-\infty < y(l_1) < \infty$ $y = y(x)$ $x = -cy(l_1)$
2			$X = -A[y(l_1)]^v \cdot e[y(l_1)]$ $y = y(x); \quad -\infty < y(l_1) < \infty$ <p>e – единичная функция A, v – параметры $v = \frac{2k+1}{2i+1}$ $k, i = 0, 1, 2, 3, 4$</p>
3			$y = y(u); \quad -\infty < y(l_1) < \infty$ $X = -A[y(l_1) - u_1]^v \cdot e[y(l_1) - u_2]$ $v = \frac{2k+1}{2i+1}; \quad i, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ <p>e – единичная функция</p>
4			$y = y(u); \quad -\infty < y(l_1) < \infty$ $X = -A[y(l_1) - u_1]^v \cdot e[y(l_1) - u_1] +$ $- B[y(l_1) - u_1^*]^\mu \cdot e[-y(l_1) + u_1^*]$ $v = \frac{2k+1}{2i+1}; \quad i, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ $u_1 \geq 0$ $u_1^* \leq 0$ <p>e – единичная функция</p>
5			$y = y(u); \quad -\infty < y(l_1) < \infty$ $X = [y(l_1) \{-c e[y(l_1)] -$ $- (A-c) \cdot e[y(l_1) - u_1] -$ $- D \cdot e[-y(l_1) - (B-D) \times$ $\times e[-y(l_1) + u_1^*]\};$ <p>e – единичная функция</p>

Таким образом, уравнения приспособляются к особенностям работы опор балок с односторонними связями. Всё это позволяет путём решения дифференциальных уравнений получать значения перемещений и внутренних усилий в сечениях балок с учётом особенностей работы опор.

В инженерной практике, если не всегда, то очень часто, можно получить зависимость реакции опоры X_i от прогиба балки $y(l_i)$. В простейшем случае это – линейная зависимость ($X_i = c_i \cdot y(l_i)$), которой мы уже пользовались неоднократно. В реальных конструкциях эта зависимость может иметь более сложный вид.

В табл.1 приведены схемы опор балки и соответствующие им аналитические выражения $X = f(x)$ и графические изображения зависимости $f(y)$.

Балки с переменной жесткостью. Рассмотрим балки, когда жесткость $EJ = \alpha_0 + \alpha_1(x)$ представляет собой функцию координаты «х» продольной оси балки. Приведем алгоритм, основанный на использовании метода малого параметра [7].

Рассмотрим конкретный пример балки. Дополнительно предположим, что жесткость

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x), \quad (1)$$

где $\alpha_0 = const = EJ$ (EJ – жесткость сечения балки при изгибе),
 $\alpha_1(x)$ – переменная составляющая жесткости.

Будем считать, что функция $\alpha_1(x)$ мало отклоняется от своего среднего значения α_0 . На этом основании введем параметр малости ε . Тогда выражение (1) можем представить так:

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \varepsilon \cdot \alpha_1(x), \quad (2)$$

Далее по аналогии с уравнением (3) имеем

$$\alpha(x) \cdot y^{IV} + 2\alpha'(x) \cdot y''' + \alpha'' \cdot y'' = q(x). \quad (3)$$

Функцию прогибов $y(x)$ представим [4], [12] в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon \cdot y_1(x) + \varepsilon^2 \cdot y_2(x) + \varepsilon^3 \cdot y_3(x) + \dots \quad (4)$$

Здесь y_0, y_1, y_2, \dots - некоторые пока неизвестные функции.

Подставляя суммы (1) и (4) в уравнение (3), приравнивая члены при одинаковых степенях параметра ε и пренебрегая слагаемыми, содержащими $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots$, как малыми величинами более высокого порядка, получаем уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot y_0^{IV} = q(x), & (5) \\ \alpha_0 \cdot y_1^{IV} = -\alpha_1(x) \cdot y_0^{IV} - 2\alpha_1'(x) \cdot y_0''' - \alpha_1''(x) \cdot y_0''. \end{cases} \quad (6)$$

Решение уравнения (5) представим в виде интеграла

$$y_0(x) = \int_0^l G_6(x, \xi) \cdot q(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Здесь функция Грина, который строится для рассматриваемой задачи.

Теперь правая часть уравнения (6) стала уже известной.

Подставляя функцию (7) в уравнение (6) получаем

$$\alpha_0 \cdot y_1^{IV}(x) = F(x), \quad (8)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}
 F(x) = & -\alpha_1(x) \cdot \int_0^l \frac{\partial^4 G_6(x, \xi)}{\partial x^4} \cdot q(\xi) d\xi - \\
 & - 2\alpha_1'(x) \cdot \int_0^l \frac{\partial^3 G_6(x, \xi)}{\partial x^3} \cdot q(\xi) d\xi - \\
 & - \alpha_1''(x) \cdot \int_0^l \frac{\partial^2 G_6(x, \xi)}{\partial x^2} \cdot q(\xi) d\xi .
 \end{aligned} \tag{9}$$

Решение уравнение (8) представим по аналогии с интегралом (7):

$$y_1(x) = \int_0^l G_6(x, \xi) \cdot F(\xi) d\xi, \tag{10}$$

где функция $F(x)$ определена выражением (9).

Окончательно функцию прогибов $y(x)$ запишем в виде суммы, которая следует из ряда (4) (при $\varepsilon = 1$), $y_2 \approx y_3 \approx 0$:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) . \tag{11}$$

Здесь y_0 и y_1 даны интегралами (7) и (10). Располагая функция прогибов (11), можно определить изгибающие моменты M и поперечные силы Q по известным правилам.

Балки, материал которых не следует закону Гука. Многие материалы, такие как сталь, бетон, пластмассы, древесина и др. [2,10,11] при больших напряжениях не следуют закону Гука (рис.1.)

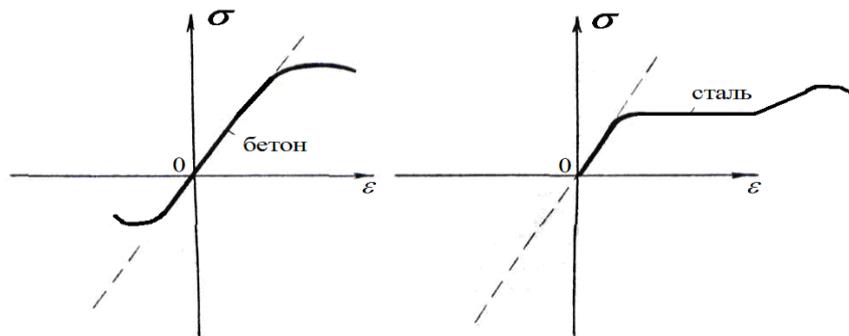


Рис.1- Зависимости напряжений от относительных деформаций для бетона и стали
Fig. 1 - Dependences of stresses on relative deformations for concrete and steel

На рис.1 – пунктирные графики соответствуют закону Гука, а сплошные – экспериментальным кривым.

Пусть зависимость между напряжениями σ и относительными деформациями ε имеет вид степенной функции. Тогда напряжения $\sigma = f(\varepsilon)$ запишутся так:

$$\sigma = A_0 \cdot \varepsilon^k . \tag{12}$$

Для этого случая дифференциальное уравнение поперечного изгиба балки дано

$$\text{в виде уравнения } \left\{ A_0 J \left[y'' - \frac{3}{2} y'' (y')^2 \right]^k \right\}'' = q(x) .$$

Рассмотрим выражение $u = \left[y'' - \frac{3}{2} y'' \cdot (y')^2 \right]^k$, входящее в это уравнение.

Разложим функцию u в ряд Тейлора и ограничимся его двумя членами:

$$\left[y'' - \frac{3}{2} y'' \cdot (y')^2 \right]^k = (y'')^k \cdot \left[1 - \frac{3}{2} \cdot k \cdot (y')^2 \right]. \quad (13)$$

Здесь предполагается, что $3/2 (y')^2 < 1$.

С учетом (13) уравнение (7) представим так:

$$A_0 J \cdot \left\{ (y'')^k \cdot \left[1 - \frac{3}{2} \cdot k \cdot (y')^2 \right] \right\}'' = q(x). \quad (14)$$

Здесь момент итерации сечения балки J вычисляется по известным правилам [2]. При $k = 1$ уравнение (14) описывает прогибы $y(x)$ балки с учетом ее геометрической нелинейности. А если пренебречь (для достаточно высоких балок $(y')^2 = 0$ вторым слагаемым в квадратной скобке, то уравнение (14) упрощается:

$$A_0 \cdot J \left[(y'')^k \right]'' = q(x). \quad (15)$$

Уравнение (15) учитывает только физическую нелинейность (12).

Поскольку здесь рассматриваются балки, материал которых не следует закону Гука, дальше будем пользоваться уравнением (15).

Выполнив операции дифференцирования, уравнение (15) представим в следующем виде:

$$k \cdot (y'')^{k-1} \cdot y^{IV} + k \cdot (k-1) \cdot (y'')^{k-2} \cdot (y''')^2 = \bar{q}(x), \quad (16)$$

где

$$\bar{q}(x) = q(x) / A_0 \cdot J.$$

При $k = 1$ это уравнение принимает обычный вид $y^{IV}(x) = \bar{q}(x)$. Прибавим в обе части уравнения (16) произведение

$$\alpha_0 \cdot y^{IV}(x) = \bar{q}(x) + F(x). \quad (17)$$

Здесь: α_0 - жесткость сечения балки при изгибе, когда $k = 1$;

$$F(x) = \alpha_0 \cdot y^{IV}(x) - k \cdot [y''(x)]^{k-1} \cdot y^{IV}(x) - k(k-1) \cdot [y''(x)]^{k-2} \cdot [y'''(x)]^2. \quad (18)$$

Обычно поправки на прогиб $y(x)$, обусловленные учетом физической нелинейности материала, составляют 20 - 30% от упругих прогибов. Поэтому введем параметр малости ε и уравнение (16) запишем в виде

$$\alpha_0 y^{IV}(x) = \bar{q}(x) + \varepsilon \cdot F(x). \quad (19)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда по степеням малого параметра (3) [6,7]. Подставив ряд (3) и выражение (18) в уравнение (19), по аналогии с уравнениями (5) и (6) будем иметь

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot y_0^{IV} = \bar{q}(x), & (20) \\ \alpha_0 \cdot y_1^{IV} = \bar{F}(x), & (21) \end{cases}$$

$$F(x) = \alpha_0 \cdot y^{IV}(x) - k [y_0''(x)]^{k-1} \cdot y_0^{IV}(x) - k(k-1) \cdot [y_0''(x)]^{k-2} \cdot [y_0'''(x)]^2. \quad (22)$$

где

Если нам задана конкретная балка с указанием условий крепления ее концов и промежуточных опор, то пользуясь рекуррентным методом, мы можем построить функцию Грина. Решение уравнения (19) можно представить так:

$$y_0(x) = \int_0^l G_6(x, \xi) \cdot q(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Теперь правая часть уравнения (21) (выражение 22) стала вполне определенной. Это позволяет получить функцию

$$y_1(x) = \int_0^l G_6(x, \xi) \cdot \bar{F}(\xi) d\xi. \quad (24)$$

Окончательно функцию прогибов по аналогии с суммой (11) находим в виде

$$y(x) \approx y_0(x) + y_1(x), \quad (25)$$

где слагаемые y_0 и y_1 даны интегралами (23) и (24).

Классическое решение для балки с переменной жесткостью. Решения для балок, полученные на основе функции Грина, являются точными. При использовании вариационных методов [4] соответствующие решения только приближенно удовлетворяют уравнению изгиба балки, поскольку ряды, представляющие решения, не сходятся в точке $x = \xi$, а число удерживаемых членов практически всегда ограничено. Тем не менее, использование вариационных методов обеспечивает достаточную для практических целей точность и простоту решения при определении соответствующих производных функций Грина. Поэтому функция Грина, вычисляемая точными методами или в виде ряда, позволяет получать достоверные результаты.

Указанная функция Грина была нами использована для построения приближенного решения балок с переменной жесткостью. Приближенные решения, хотя обеспечивают достаточную точность, однако, как отмечалось выше, удовлетворяют уравнению изгиба балки только приближенно. Такие решения (решения, получаемые на основе вариационных, итерационных и других минимизирующих энергию – минимизирующих функционал – методов) обычно называют обобщенными. Если же решение при непосредственной подстановке в дифференциальные уравнения превращает это уравнение в тождество, то такое решение называют классическим. Таким образом, различают обобщенные (приближенные) и классические (точные) решения уравнения изгиба балок.

При этом и обобщенные, и классические решения должны точно удовлетворять граничным условиям (условиям крепления балки на крайних и промежуточных опорах).

Далее приведем построение классического решения для балки с переменной жесткостью. Пусть $EJ = \alpha(x)$ - переменная жесткость сечения однопролетной балки ($\alpha(x)$ - дважды дифференцируемая функция). Уравнение изгиба запишем в виде

$$(\alpha y'')'' = q(x) \quad (26)$$

Здесь изгибающий момент и поперечная сила выражаются через прогибы:

$$(\alpha y'') = -M(x), \quad (27)$$

$$\frac{dM}{dx} = -(\alpha \cdot y'')' = Q(x). \quad (28)$$

Уравнения (26) и (27) можно представить в виде системы

$$\begin{cases} M'' = -q_0(x), \\ y'' = -M(x) \cdot \alpha^{-1}(x). \end{cases} \quad (29)$$

Из первого уравнения этой системы следует, что изгибающие моменты

$$M(x) = -\iint q(x) dx^2 - C_3 \cdot x - C_2, \quad (30)$$

а из второго – прогибы

$$y(x) = -\iint M(x) \cdot \alpha^{-1}(x) dx^2 - C_1 \cdot x + C_0. \quad (31)$$

Подставляя выражение (30) в интеграл (31), окончательно имеем решение для прогибов

$$y(x) = \iint \left[\alpha^{-1}(x) \cdot \left(\iint q(x) dx^2 + C_3 \cdot x + C_2 \right) \right] dx^2 - C_1 \cdot x + C_0. \quad (32)$$

Здесь произвольные постоянные C_0, C_1, C_2, C_3 определяются из условия крепления однопролетной балки на левой и правой опорах. Подстановка функции (32) в уравнение (26) превращает последнее в тождество, то есть решение (32) является классическим. Далее поставим перед собой цель: представить решение (32) через функцию Грина.

Пусть
$$\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} = \delta(x - \xi). \quad (33)$$

Отсюда найдем

$$\bar{G}(x, \xi) = \iint \delta(x - \xi) dx^2 + \bar{C}_3 \cdot x + \bar{C}_2. \quad (34)$$

где \bar{C}_2, \bar{C}_3 - постоянные интегрирования.

Пользуясь зависимостями (12), интеграл (31) запишем так:

$$\bar{G}(x, \xi) = \frac{1}{2} |x - \xi| + \frac{1}{2} (x - \xi) + \bar{C}_3 \cdot x + \bar{C}_2. \quad (35)$$

Введем обозначение

$$B(x - \xi) = \frac{1}{2} \cdot \left(|x - \xi| + x - \xi \right). \quad (36)$$

Тогда вместо выражения (32) будем иметь

$$\bar{G}(x, \xi) = B(x - \xi) + \bar{C}_3 \cdot x + \bar{C}_2. \quad (37)$$

Теперь решение первого уравнения из системы (29) можно выразить через функцию (37):

$$\begin{aligned} M(x) &= -\int_0^l \left[B(x - \xi) + \bar{C}_3 \cdot x + \bar{C}_2 \right] q(\xi) d\xi = \\ &= -\int_0^l B(x - \xi) q(\xi) d\xi + C_3 \cdot x + C_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь введены новые произвольные постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} C_2 &= \bar{C}_2 \cdot \int_0^l q(\xi) d\xi, \\ C_3 &= \bar{C}_3 \cdot \int_0^l q(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогично можно представить решение и второго уравнения из системы (29):

$$\begin{aligned}
 y(x) &= - \int_0^l \left[B(x-\xi) + \bar{C}_1 \cdot x + \bar{C}_0 \right] M(\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) d\xi = \\
 &= - \int_0^l B(x-\xi) M(\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) d\xi + C_1 \cdot x + C_0.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Как и ранее, здесь также введены новые произвольные постоянные интегрирования

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \bar{C}_0 \cdot \int_0^l M(\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) d\xi, \\
 C_1 &= \bar{C}_1 \cdot \int_0^l M(\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

Далее для получения функции прогибов в окончательном виде достаточно представить изгибающий момент (38) в подынтегральное выражение (39):

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \int_0^l B(x-\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \times \\
 &\times \left\{ \int_0^l B(\xi-\eta) q(\eta) d\eta + C_3 \cdot \xi + C_2 \right\} d\xi + C_1 \cdot x + C_0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Этот интеграл удобно представить так:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \int_0^l B(x-\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \cdot \left\{ \int_0^l B(\xi-\eta) q(\eta) d\eta \right\} + \\
 &+ C_3 \cdot \int_0^l B(x-\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi + \\
 &+ C_2 \cdot \int_0^l B(x-\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) d\xi + C_1 \cdot x + C_0.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь и далее функция $B(x-\xi)$ дается выражением (33). Заметим, что

$$B'_x(x-\xi) = e(x-\xi). \tag{42}$$

Далее нам понадобятся производные функции прогибов. С учетом равенств (42) и (41) из интеграла (41) имеем

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \int_0^x \alpha^{-1}(\xi) \cdot \left\{ \int_0^l B(\xi-\eta) \cdot q(\eta) d\eta \right\} d\xi + \\
 &+ C_3 \cdot \int_0^x \alpha^{-1}(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi + C_2 \cdot \int_0^x \alpha^{-1}(\xi) d\xi + C_1.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Найдем вторую и третью производные:

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= \alpha^{-1}(x) \cdot \int_0^l B(\xi-\eta) \cdot q(\eta) d\eta + \\
 &+ C_3 \cdot \alpha^{-1}(x) \cdot x + C_2 \cdot \alpha^{-1}(x).
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 y'''(x) &= \left[\frac{1}{\alpha(x)} \right]' \cdot \int_0^l B(x-\eta) \cdot q(\eta) d\eta + \alpha^{-1}(x) \cdot \int_0^x q(\eta) d\eta + \\
 &+ C_3 \cdot \left\{ \left[\alpha^{-1}(x) \right]' \cdot x + \alpha^{-1}(x) \right\} + C_2 \left[-\alpha^{-1}(x) \right]'.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Теперь изгибающие моменты $M(x)$ и поперечные силы $Q(x)$ легко выразить через производные функции прогибов:

$$M(x) = -\alpha(x) \cdot y''(x), \quad (46)$$

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = -\alpha'(x) \cdot y''(x) - \alpha(x) \cdot y'''(x).$$

Во всех предыдущих выражениях (41) - (46) переменные $x, \xi: \in [0; l]$.

Располагая общим интегралом (41) и пользуясь методами, изложенными в предыдущих главах, можно построить алгоритмы для исследования напряженно-деформированного состояния многопролетных балок с переменной жесткостью. При этом для перехода к основной системе не требуется вводить, как ранее, расширенную область.

Обсуждение результатов. Рассмотрим простейший пример. Пусть двухпролетная балка с переменной жесткостью $\alpha(x)$ загружена нагрузкой $q_0(x)$ (рис.2 а). Необходимо построить алгоритм, позволяющий исследовать на компьютере напряженно-деформированное состояние балки.

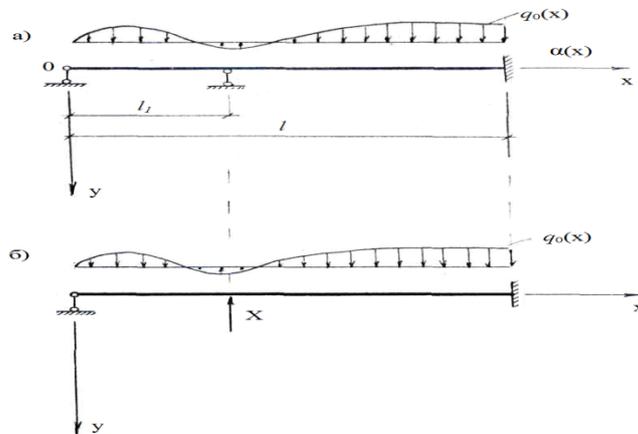


Рис. 2 - Схемы заданной (а) и основной (б) систем
 Fig. 2 - Schemes of the given (a) and main (b) systems

Перейдем от заданной системы (рис.2 а) к основной (рис.2 б). Сохранив без изменения условия крепления крайних опор (без введения расширенной области!), заменим промежуточную опору ее реакцией X .

В основной системе (рис.2 б) нагрузка записывается в виде

$$q(x) = q_0(x) - X \cdot \delta(x - l_1). \quad (47)$$

Далее воспользуемся общим решением (41). Подставляя функцию (48) в подынтегральное выражение (41), получаем

$$y(x) = \int_0^l B(x-\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \cdot \left\{ \int_0^l B(\xi-\eta) \cdot [q_0(\eta) - X \cdot \delta(\eta - l_1)] d\eta \right\} d\xi + C_3 \cdot \int_0^l B(x-\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \cdot \xi d\xi + C_2 \cdot \int_0^l B(x-\xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) d\xi + C_1 \cdot x + C_0. \quad (48)$$

С учетом фильтрующих свойств дельта-функции интеграл (49) упростим:

$$y(x) = y_0(x) - X \cdot y_4(x) + C_3 \cdot y_3(x) + C_2 \cdot y_2(x) + C_1 \cdot x + C_0. \quad (49)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$y_0(x) = \int_0^l B(x - \xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \cdot \left\{ \int_0^l B(\xi - \eta) \cdot q_0(\eta) d\eta \right\} d\xi, \\
y_4(x) = \int_0^l B(x - \xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \cdot B(\xi - l_1) d\xi, \\
y_3(x) = \int_0^l B(x - \xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) \cdot \xi d\xi, \\
y_2(x) = \int_0^l B(x - \xi) \cdot \alpha^{-1}(\xi) d\xi. \quad (50)$$

В выражение для прогиба (50) входят пять неизвестных:

$$X, C_0, C_1, C_2, C_3.$$

Для их определения имеем четыре условия крепления балки на крайних опорах и одно условие – на промежуточной опоре (рис. 2 а). В соответствии с расчетной схемой (рис. 2 а) эти пять условий запишем так:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y''(0) = 0, \\ y(l) = 0, \\ y'(l) = 0, \\ y(l_1) = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Подставив функцию (50) в условия (49), можно получить систему пяти уравнений, из которой нетрудно найти неизвестные X, C_0, C_1, C_2, C_3 . После чего прогибы вычисляются с помощью выражения (50), а внутренние усилия – соотношениями (46). При этом, выполняя над функциями (51) операции дифференцирования и интегрирования, следует пользоваться свойством (42). Процесс итераций сходится достаточно быстро. Для практических расчетов достаточно ограничиться первыми двумя приближениями.

Вывод. Результатами проведенного исследования являются:

1. Даны дифференциальные уравнения поперечного изгиба балок с учетом физических и геометрических нелинейностей конструкции;
2. Отмечается, что при расчете балочных конструкции встречаются три типа нелинейностей: физическая нелинейность, геометрическая нелинейность и конструктивная нелинейность. Геометрическая нелинейность проявляется в основном в балочных конструкциях (не только в балочных конструкциях), если конструкция гибкая и развивается под действием внешних нагрузок большие прогибы (перемещения);
3. В практике проектирования и строительства чаще всего приходится иметь дело с физическим, конструктивным и геометрическим нелинейностям. В данной статье внимание уделяется физическим и геометрическим нелинейностям;
4. Рассмотрены нелинейные задачи балочных конструкции, которые чаще всего встречаются при проектировании реальных балок;
5. Подробно рассмотрены балочные конструкции, материал которых не следует закону Гука. Даны соответствующие уравнения и примеры;
6. Дан алгоритм решения для балки с переменной жесткостью, который позволяет построить классическое решение;

Представленные в статье нелинейные расчетные модели могут найти применение в практике проектирования и строительства балочных конструкции.

Библиографический список:

1. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции /общий курс/. Издательство «Стройиздат», Москва, 1991г. 970 стр.
2. Беляева Н.М. Сопrotивление материалов. Издательство «Наука», Москва, 1976г., 607 стр.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Издательство «Наука», Москва, 1986г., 544 стр.
4. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. «Наука». М., 1969 г.
5. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Издательство «Наука», Москва, 1967г., 368 стр.
6. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. «Наука», М., 1965 г.
7. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику, изд-во АН УССР, 1937 г.
8. СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия». Свод правил – Москва, Стандартинформ, 2016. – 95 с.,
9. СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции». Свод правил – Москва, Стандартинформ, 2017. – 126 с.
10. СП 128.13330.2016 «Алюминиевые конструкции». Свод правил – Москва, Стандартинформ, 2016. – 86 с.
11. СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции». Свод правил – Москва Стандартинформ 2019. – 126 с

References:

1. Baykov V.N., Sigalov E.E. Reinforced concrete structures /general course/. *Stroyizdat Publishing House*, Moscow, 1991;970 p.(In Russ)
2. Belyaeva N.M. Strength of materials. Nauka Publishing House, Moscow, 1976;607 p. (In Russ)
3. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of mathematics for engineers and university students. *Nauka Publishing House*, Moscow, 1986;544 p.(In Russ)
4. Weinberg M.M. Variational methods for studying nonlinear operators. *Nauka*. Moscow, 1969.(In Russ)
5. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. Numerical methods of analysis. *Nauka Publishing House*, Moscow, 1967;368 p. (In Russ)
6. Zeldovich Ya.B., Myshkis A.D. Elements of Applied Mathematics. *Nauka*, Moscow, 1965.(In Russ)
7. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. Introduction to Nonlinear Mechanics, Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1937.
8. SP 20.13330.2016 "Loads and Impacts". Code of Practice - *Moscow, Standartinform*, 2016; 95 p. (In Russ)
9. SP 16.13330.2017 "Steel Structures". Code of Practice - *Moscow, Standartinform*, 2017; 126 p. (In Russ)
10. SP 128.13330.2016 "Aluminum Structures". Code of Practice – *Moscow, Standartinform*, 2016; 86 p.(In Russ)
11. SP 63.13330.2018 “Concrete and Reinforced Concrete Structures”. Code of Practice – *Moscow Standartinform* 2019; 126 p..(In Russ)

Сведения об авторах:

Абусупян Курашевич Юсупов, доктор технических наук, профессор, кафедра «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Хайрулла Магомедмуратович Муселемов, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Раджаб Исабекович Вишталов, кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Information about the authors:

Abusupryan K. Yusupov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Department of Building Structures and Hydraulic Structures; hairulla213@mail.ru

Hairulla M. Muselemov, Dr. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Head of the Department of Building Structures and Hydraulic Structures; hairulla213@mail.ru

Rajab I. Vishtalov, Cand.Sci. (Eng.), Assoc. Prof. Department of Building Structures and Hydrotechnical Structures; hairulla213@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 01.02.2025.

Одобрена после рецензирования/ Reviced 30.03.2025.

Принята в печать/Accepted for publication 14.05. 2025.