

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.04

DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-2-211-219



Оригинальная статья /Original article

**Решение динамической задачи о воздействии подвижной массивной нагрузки
на конструкцию прямыми методами**

Л.Н. Панасюк¹, А.А. Фириченко¹, А.Д. Мерзлякова², В.С. Тюрина¹

¹Донской государственный технический университет,

¹344002, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1, Россия,

² Российский университет транспорта (МИИТ),

²127994, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, Россия

Рез.ме. Цель. В статье представлено моделирование динамических процессов в зданиях и сооружениях. Рассмотрена общая постановка динамической задачи о движении массивной нагрузки по массивному сооружению. **Метод.** Уравнение движения получено в форме метода конечных элементов. Решение уравнений выполняется с использованием прямых методов интегрирования задач динамики. Построены абсолютно устойчивые схемы прямого интегрирования, в которых система разрешающих уравнений тривиальная – матрица системы диагональная. Трудоемкость на шаге по времени такая же невысокая, как в явных схемах. Предлагаемые методы можно рассматривать как явные абсолютно устойчивые схемы прямого интегрирования динамической задачи с переменной во времени массой. Даны рекомендации по оценке точности численного решения. Рассмотрена задача движения массивного груза по массивному строению. Дискретизация пространственной области выполняется методом конечных элементов. Дискретизация временной области основана на шаговом однослойном процессе. Для построения основных уравнений использован подход, аналогичный тетра-методу Вилсона, примененный на основе вариационного принципа Гэртина. **Результат.** Построены дифференциальные уравнения задачи о движении подвижной массивной нагрузки по произвольному массивному сооружению в форме метода конечных элементов. Приведены численные методы решения уравнений движения с использованием абсолютно устойчивых схем прямого интегрирования. Система разрешающих уравнений может иметь диагональную структуру, что позволяет классифицировать полученные схемы как явные. **Вывод.** Предложенный подход может быть применен к анализу напряженно-деформированного состояния и несущей способности произвольных пролетных строений при движении по ним массивной нагрузки. Учтено влияние скорости нагрузки на напряженно-деформированное состояние конструкции. Ограничений по граничным условиям и видам нагружения нет.

Ключевые слова: динамика сооружений, метод конечных элементов, схема прямого интегрирования, движущаяся массивная нагрузка, спектральный радиус, матрица масс, матрица жесткости, перемещение узлов, скорость, ускорение, шаг интегрирования по времени

Для цитирования: Л.Н. Панасюк, А.А. Фириченко, А.Д. Мерзлякова, В.С. Тюрина. Решение динамической задачи о воздействии подвижной массивной нагрузки на конструкцию прямыми методами. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(2):211-219. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-2-211-219

**Solution of the dynamic problem of the effect of a mobile massive load
on a structure by direct methods**

L.N. Panasyuk¹, A.A. Firichenko¹, A.D. Merzlyakova², V.S. Tyurina¹

¹Don State Technical University,

¹1 Gagarina Square, Rostov-on-Don 344002, Russia

²Russian University of Transport (MIIT),

9 build. 9 Obraztsova St., GSP-4, Moscow, 127994, Russia

Abstract. Objective. The article presents the modeling of dynamic processes in buildings and structures. The general formulation of the dynamic problem of the motion of a massive load along a massive structure is considered. **Method.** The equation of motion is obtained in the form of the finite element method. The equations are solved using direct methods of integrating dynamics problems. Absolutely stable direct integration schemes are constructed, in which the system of resolving equations is trivial - the matrix of the system is diagonal. The complexity at the time step is as low as in explicit schemes. The proposed methods can be considered as explicit absolutely stable direct integration schemes for a dynamic problem with a time-varying mass. Recommendations are given for assessing the accuracy of the numerical solution. The problem of moving a massive load along a massive structure is considered. Discretization of the spatial domain is performed by the finite element method. Discretization of the time domain is based on a step-by-step single-layer process. An approach similar to Wilson's theta method, applied on the basis of Gartin's variational principle, is used to construct the main equations. **Result.** Differential equations of the problem of the motion of a moving massive load on an arbitrary massive structure are constructed in the form of the finite element method, and numerical methods for solving the equations of motion using absolutely stable direct integration schemes are presented. The system of resolving equations can have a diagonal structure, which allows classifying the obtained schemes as explicit. **Conclusion.** The proposed approach can be applied to the analysis of the stress-strain state and bearing capacity of arbitrary spans when a massive load moves along them. The effect of the load velocity on the stress-strain state of the structure is taken into account. There are no restrictions on boundary conditions and types of loading.

Keywords: structural dynamics, finite element method, direct integration scheme, moving mass load, spectral radius, mass matrix, stiffness matrix, node displacement, velocity, acceleration, and time integration step

For citation: L.N. Panasyuk, A.A. Firichenko, A.D. Merzlyakova, V.S. Tyurina. Solution of the dynamic problem of the effect of a mobile massive load on a structure by direct methods. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(2):211-219. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-2-211-219.

Введение. Впервые задача о динамическом воздействии подвижной нагрузки на сооружение была поставлена в начале 20 века в работах Стокса и Бресса. Исчерпывающее решение задачи о движении системы сил, не связанных с массой, дано в работах А.Н. Крылова и С.П. Тимошенко. Показано, что при учете массы груза задача имеет решение в замкнутом виде лишь в предположении о возможности пренебрежения массой сооружения по сравнению с массой нагрузки. В.В. Болотным получены дифференциальные уравнения движения массы груза и сооружения, однако здесь сооружение моделировалось массивной балкой. Даже в этом частном случае сооружения показано, что решение полученных дифференциальных уравнений возможно лишь численными методами [1].

Постановка задачи. В данной работе построены дифференциальные уравнения задачи о движении подвижной массивной нагрузки по произвольному массивному сооружению в форме метода конечных элементов, а также приведены численные методы решения уравнений движения с использованием абсолютно устойчивых схем прямого интегрирования. Система разрешающих уравнений может иметь диагональную структуру, что позволяет классифицировать полученные схемы как явные.

Методы исследования. Рассмотрим уравнения движения массивной нагрузки для неоднородной упругой пространственной области. В пределах объема V_1 движущаяся масса не изменяется во времени, и для бесконечно малого дифференциального элемента среды справедливы стандартные уравнения динамической теории упругости (1), записанные в матричной форме:

$$A\sigma + p = \rho u, \in V_1, t, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}$ – матрица операций дифференцирования, $\mathbf{p}$ – вектор объемных сил, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\ddot{\mathbf{u}}$ – вектор ускорений, $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор напряжений, ρ – плотность материала среды ускорения. Наполнение этих матриц здесь не приведено.

Во всем объеме V справедливы уравнения неразрывности деформаций и закона Гука с обозначениями согласно (1):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \in V, t \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \in V, t\end{aligned}\quad (2)$$

На части объема V_2 масса не является стационарной величиной. Происходит постоянное ее изменение за счет перемещающихся со скоростью v_t массивных объектов [2-3]

$$\Delta M(t) = \rho(t) \Delta V = \Delta M_0 + \Delta M_t(t) = \rho_0 \Delta V + \rho_t(t) \Delta V, \in V_2, t \quad (3)$$

Скорость элементарного объема в начале временного промежутка $v = \dot{u}$, в конце $v + dv = \dot{u} + d\dot{u}$. При выводе уравнения движения тела переменной массы можно применить теорему об изменении количества движения к дифференциальному элементу среды. При этом уравнение движения малого элемента объема V_2 будет подчиняться уравнению Мещерского. С учетом постоянной плотности перемещающихся объектов $\rho_0 = \text{const}$ получим уравнение движения элемента с переменной массой:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} + (v_t - \dot{u}) \frac{d\rho_t}{dt} = \rho \ddot{u}, \in V_2, t \quad (4)$$

С учетом статических граничных условий на поверхности S_1 , кинематических граничных условий на поверхности S_2 и начальных условий система уравнений динамической теории упругости с переменной массой имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} &= \rho \ddot{u}, \in V_1, t \\ \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} + (v_t - \dot{u}) \frac{d\rho_t}{dt} &= \rho \ddot{u}, \in V_2, t \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \in V, t \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \in V, t \\ \mathbf{A}_s \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{p}_s &= 0, \in S_1, t \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_s, \in S_2, t \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0, \in V, t = 0 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Скорость движения переменной массы v_t , а также скорость изменения массы $\frac{d\rho_t}{dt} \Delta V$ являются детерминированными функциями времени. Эти функции определяются выбранным режимом движения. Отметим, что первое уравнение (5) является частным случаем второго. Действительно, если во втором уравнении (5) положить $\rho_t = 0$, то получим первое уравнение. Поэтому оба уравнения можно заменить вторым, справедливым во

всем объеме системы:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} + (v_t - \dot{u}) \frac{d\rho_t}{dt} = \rho \ddot{u}, \in V_2, t$$

Тогда при задании параметров движущейся нагрузки в объеме V_1 следует положить нулю функцию скорости и массы движущейся нагрузки.

По известной методике Гэртина строим вариационное уравнение типа Лагранжа в свертках для системы с переменной массой. Выполнив *свертку* уравнения равновесия в объеме системы и уравнения статических граничных условий с вариацией перемещений δu , получим интегральное тождество [4]:

$$\int_{(V)} \left(A\sigma + p + (v_t - \dot{u}) \frac{d\rho_t}{dt} - (\rho_0 + \rho_t)u \right) * \delta u dV + \int_{(S_1)} (A_s \sigma - p_s) * \delta u dS = 0 \quad (6)$$

где обозначает операцию свертки двух функций по времени. Преобразовав интеграл по объему по формуле Остроградского-Гаусса, используя формулу интегрирования по частям и учитывая изохронность вариации перемещений $\delta u(0) = \delta u(t) = 0$, получим вариационное уравнение типа Лагранжа движения системы с переменной массой в свертках (7):

$$\int_{(V)} \delta(A^T u) * \sigma dV - \int_{(V)} \delta u * p dV - \int_{(S_1)} \delta u * p_s dS - \int_{(V)} \delta u * (v_t - \dot{u}) \rho_t + \frac{1}{2} \int_{(V)} (\rho_0 + \rho_t) \dot{u} * \dot{u} dV = 0 \quad (7)$$

Вывод разрешающих уравнений. По известной методике Гэртина строим вариационное уравнение типа Лагранжа в свертках для системы с переменной массой. Выполнив свертку уравнения равновесия в объеме системы и уравнения статических граничных условий с вариацией перемещений δu , получим интегральное тождество:

$$\int_{(V)} \left(A\sigma + p + (v_t - \dot{u}) \frac{d\rho_t}{dt} - (\rho_0 + \rho_t)u \right) * \delta u dV + \int_{(S_1)} (A_s \sigma - p_s) * \delta u dS = 0 \quad (8)$$

где обозначает операцию свертки двух функций по времени. Преобразовав интеграл по объему по формуле Остроградского-Гаусса, используя формулу интегрирования по частям и учитывая изохронность вариации перемещений $\delta u(0) = \delta u(t) = 0$, получим вариационное уравнение типа Лагранжа движения системы с переменной массой в свертках (7):

$$\int_{(V)} \delta(A^T u) * \sigma dV - \int_{(V)} \delta u * p dV - \int_{(S_1)} \delta u * p_s dS - \int_{(V)} \delta u * (v_t - \dot{u}) \rho_t + \frac{1}{2} \int_{(V)} (\rho_0 + \rho_t) \dot{u} * \dot{u} dV = 0 \quad (9)$$

Уравнения движения в форме метода конечных элементов строим известным способом. Для этого вся область разбивается на ансамбль конечных элементов. В пределах каждого конечного элемента проводится аппроксимация вектор-функции перемещений через перемещения узлов конечного элемента: $u = \varphi q$, где φ - матрица координатных функций конечного элемента, зависящая только от пространственных координат [5]. Деформации определяют через узловые перемещения по формуле: $\varepsilon = A^T u = A^T \varphi q = \Phi q$, где $\Phi = A^T \varphi$. После исключения напряжений по формуле $\sigma = D\varepsilon = D\Phi q$, имеем уравнение движения одного i -го конечного элемента с учетом движущейся массы (10):

$$\begin{cases} (M_i + M_{it}) \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i + \dot{M}_{it} (q_i - q_{it}) = P_{i0} + P_{it}(t), \\ \text{при } t=0 \quad q_i = q_{i0}, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_{i0} \\ M_i = \int_{(V)} \rho_0 \varphi^T \varphi dV - \text{матрица масс конечного элемента,} \\ K_i = \int_{(V)} \Phi^T D \Phi dV - \text{матрица жесткости конечного элемента} \end{cases} \quad (10)$$

Для ансамбля конечных элементов, моделирующего расчетную область, уравнения движения строятся известным приемом «поэлементного» суммирования. Окончательно уравнение движения ансамбля конечных элементов с учетом движущейся массы записано в (11):

$$\begin{cases} (M + M_t) \ddot{q} + C \dot{q} + K q + \dot{M}_t (q - q_t) = P_0 + P_t(t), \\ \text{при } t=0 \quad q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} q = q(t) - \text{вектор-функция узловых перемещений,} \\ P = P(t) - \text{вектор-функция внешней нагрузки,} \\ M = \sum M_i - \text{глобальная матрица масс ансамбля элементов,} \\ C = \sum C_i - \text{глобальная матрица демпфирования (вязкости) системы,} \\ K = \sum K_i - \text{глобальная матрица жесткости ансамбля элементов} \end{cases}$$

Для построения *явной устойчивой* схемы прямого интегрирования уравнения (11) использован общий прием, предложенный в работах Л.Н.Панасюка. Преобразуем полудискретную сеточную систему уравнений (11), используя представление:

$$\begin{cases} C = C_1 + C_2, \\ K = K_1 + K_2 \end{cases} \quad (12)$$

В (12) C_1, K_1 – диагональные положительно определенные матрицы, в которых элементы на главной диагонали не превышают соответствующих в матрицах демпфирования и жесткости. Преобразуем (11) с учетом (12) и выполним операцию свертки полученного уравнения с некоторой непрерывной функцией $g(t)$:

$$\begin{aligned} g(t) * [(M + M_t)\ddot{q} + C_1\dot{q} + K_1q + M_t(\dot{q} - \dot{q}_t)] = \\ = g(t) * [P_0 + P_t(t) - C_2\dot{q} + K_2q] \end{aligned} \quad (13)$$

Методика расчета и абсолютная устойчивость схемы. При аппроксимации искомой вектор-функции узловых перемещений в пределах малого временного отрезка Δt считаем, что левая часть уравнения (13) содержит функцию с неопределенными параметрами: $q \approx q_1(q_n, q_{n+1}, q_n)$, а параметры в правой части известны с предыдущих шагов: $q \approx q_2(q_n, q_n)$. Подобную аппроксимацию можно выполнить разными способами.

Использование каждого из них порождает различные варианты явной схемы прямого интегрирования. Например, вектор-функции q_1 и q_2 представим в виде:

$$\begin{cases} q_1 = q_n + \dot{q}_n\tau + (q_{n+1} - q_n - s_n)\frac{\tau^2}{\Delta t^2}, \quad \tau \in [0, \Delta t], \quad s = q\Delta t \\ q_2 = q_n + \dot{q}_n\tau \end{cases} \quad (14)$$

В (14) и далее нижние индексы n и $n+1$ означают номер итерации по времени. Примем, что в пределах малого временного шага вектор-функцию нагрузки и матрицу движущейся массы можно приблизить линейными функциями:

$$\begin{cases} P(\tau) \approx \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right)P_n + \frac{\tau}{\Delta t}P_{n+1}, \\ M_t(\tau) \approx \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right)M_n + \frac{\tau}{\Delta t}M_{n+1} \end{cases} \quad (15)$$

После подстановки (15), (14) в (13) и вычисления свертки со степенной функцией $g=\tau^m$, получим:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{m!t^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{2}{\Delta t^2} M(q_{n+1} - q_n - s_n) + \right. \\ & C_1 \cdot \left[\frac{m!t^{m+1}}{(m+1)!} \dot{q}_n + \frac{2m!}{(m+2)!} \cdot \frac{t^{m+2}}{\Delta t^2} \cdot (q_{n+1} - q_n - s_n) \right] + \\ & \left. \frac{m!t^{m+1}}{(m+1)!} (C - C_1) \dot{q}_n + \frac{2m!}{(m+2)!} \cdot \frac{t^{m+2}}{\Delta t^2} K_1 \cdot (q_{n+1} - q_n - s_n) + \right. \\ & K \cdot \left[\frac{m!t^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \dot{q}_n + \frac{m!}{(m+2)!} \cdot \frac{t^{m+2}}{1} \dot{q}_n \right] - \\ & \left. \left[\frac{m!t^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{m!}{(m+2)!} \cdot \frac{t^{m+2}}{\Delta t} \right] P_n - \frac{m!}{(m+2)!} \cdot \frac{t^{m+2}}{\Delta t} P_{n+1} = 0 \right. \end{aligned} \quad (16)$$

Если равенство (16) удовлетворить дискретно в точке $\Theta\Delta t$, то после сокращения на $\Delta t^{m-1}\Theta^m$, получим систему уравнений с диагональной матрицей относительно неизвестного вектора q_{n+1} . Входящий в уравнение неопределенный параметр Θ следует назначать из соображений абсолютной устойчивости шагового вычислительного процесса. Достаточным условием устойчивости схемы является спектральная устойчивость по Дж.Нейману, обеспечивающая непрерывность решения по начальным данным [6-8].

Определяем значение Θ при $\Delta t \rightarrow \infty$, что обеспечивает устойчивость схемы для произвольно большого отношения шага интегрирования к периодам собственных форм колебаний. После предельного перехода имеем:

$$\frac{2\Theta^2}{(m+2)(m+3)} \cdot K_1 q_{n+1} = \left(\frac{2\Theta^2}{(m+2)(m+3)} \cdot K_1 - K \right) q_n + \left(\frac{2\Theta^2}{(m+2)(m+3)} \cdot K_1 - \frac{\Theta}{m+2} K \right) s_n \quad (17)$$

$$\Theta = \frac{m+3}{2} \lambda_i$$

Можно показать, что устойчивость обеспечена при исследовании спектрального радиуса системы (17) после разложения последней по собственным векторам матрицы $K_1^{-1}K$ можно свести к анализу спектрального радиуса матрицы второго порядка:

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{\lambda_i} \frac{m+2}{m+3} & 0 \\ -\frac{4}{\lambda_i} \frac{m+2}{m+3} & -1 \end{bmatrix}$$

λ_i обозначает i -е собственное число матрицы.

При этом собственные числа матрицы $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1 - \frac{2}{\lambda_i} \cdot \frac{m+2}{m+3}$. Тогда спектральный радиус $\rho = \max(|\mu_1|, |\mu_2|) = 1$.

Для обеспечения устойчивости одновременно по всем формам разложения необходимо назначить Θ по максимальному собственному числу. Окончательно $\Theta = \frac{m+3}{2} \lambda$.

Явная безусловно устойчивая схема прямого интегрирования уравнений движения с переменной массой:

$$\begin{cases} [M_n + M_{n+1} + \Delta t C_D + 0.5\lambda\Delta t^2 K_D] q_{n+1} = \\ [M_n + M_{n+1} + \Delta t C_D + 0.5\lambda\Delta t^2 K_D - \Delta t^2 K] q_n + \\ + [M_n + M_{n+1} + \Delta t C_D - \Delta t C + 0.5\lambda\Delta t^2 K_D - 0.5\Delta t^2 K] s_n + \\ 0.5\Delta t^2 (P_n + P_{n+1}), \\ s_{n+1} = -s_n + 2(q_{n+1} - q_n), s = \dot{q}\Delta t, \lambda = \max\{eig(K_D^{-1}K)\} \end{cases} \quad (18)$$

Система разрешающих уравнений (15) имеет диагональную структуру, допускает тривиальное обращение. Особенности оптимизации алгоритма (15), в данной статье не рассматриваются. Повысить точность схемы интегрирования возможно, используя другой вариант аппроксимации вектор-функции перемещений по времени. Построенная схема названа «схемой с внутренней итерацией»:

$$\begin{cases} [M_n + M_{n+1} + \Delta t C_D + 0.5 \lambda \Delta t^2 K_D] q_{n+1} = \\ [M_n + M_{n+1} + \Delta t C_D + 0.5 \lambda \Delta t^2 K_D + \Delta t^3 (C - C_D) R^{-1} K - \Delta t^2 K + 0.5 \Delta t^4 (K - \lambda K_D) R^{-1} K] q_n + \\ + \left[M_n + M_{n+1} + \Delta t C_D - \Delta t C + 0.5 \lambda \Delta t^2 K_D - \Delta t C - 0.5 \Delta t^2 K + \right. \\ \left. + \Delta t^3 (C - C_D) R^{-1} (1/\Delta t C + 0.5 K) + 0.5 \Delta t^4 (K - \lambda K_D) R^{-1} (1/\Delta t C + 0.5 K) \right] s_n + \\ 0.5 \Delta t^2 (P_n + P_{n+1}), \\ s_{n+1} = -s_n + 2(q_{n+1} - q_n), s = q \Delta t, \lambda = \max \{eig(K_D^{-1} K)\} \end{cases} \quad (19)$$

Обсуждение результатов. Выполнены численные эксперименты и сравнения решений по (15)-(16) с «эталонной» задачей В.В. Болотина. В расчетах варьировались отношение массы груза к массе балки в сегменте $[0.05...0.5]$ и отношение скорости груза к «критической» в таком же сегменте. Решение МКЭ построено при разбиении оси балки на 100 конечных элементов. Локальные матрицы масс и жесткости построены традиционно. Продольная податливость элемента балки не учитывалась (рис.1).

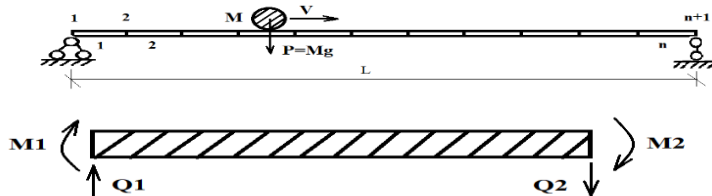


Рис. 1-МКЭ модель балки и степени свободы балочного элемента
 Fig. 1 -FEM model of a beam and degrees of freedom of a beam element

Тестируемое решение строилось в комплексе Scilab [9-10]. Отметим, что решения по предлагаемой схеме в большей части области совпадает с уточненным решением уравнений В.В. Болотина (два члена аппроксимации Бубнова-Галеркина). Различия между результатами в эталонном решении и его уточнении при увеличении членов аппроксимации указывают на необходимость учитывать кососимметричные слагаемые в аппроксимации по пространственной оси в методе Бубнова-Галеркина.

Относительная погрешность для большей части результатов между эталонным и тестируемым имеет порядок 0,1% (рис. 2-4). Максимальная погрешность достигается при высоких скоростях движения, но не превышает 3-4%.

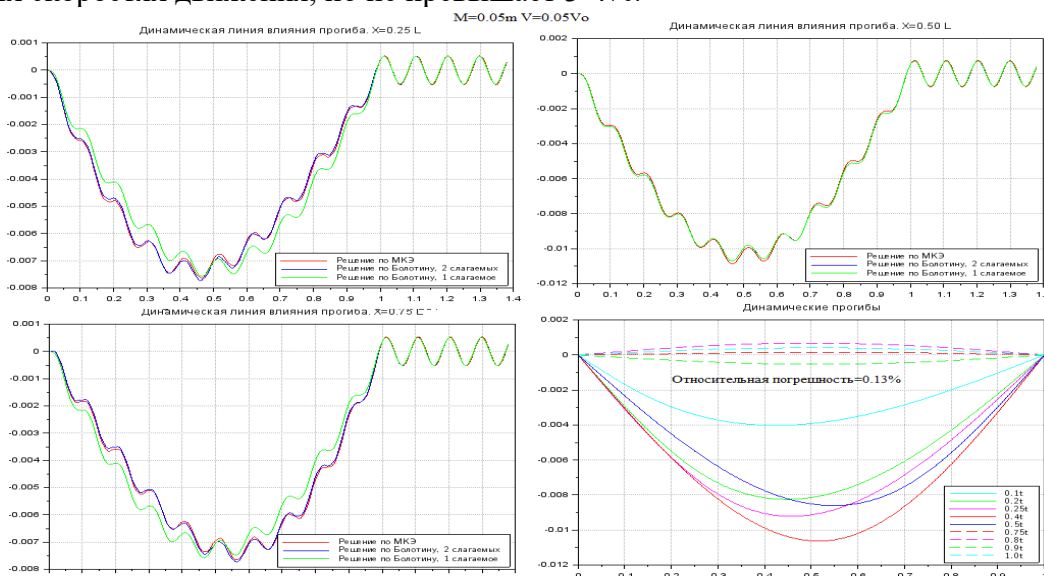


Рис. 2 - Параметры движения: $M=0.05m$, $V=0.05V_0$
 Fig. 2 - Movement parameters: $M=0.05m$, $V=0.05V_0$

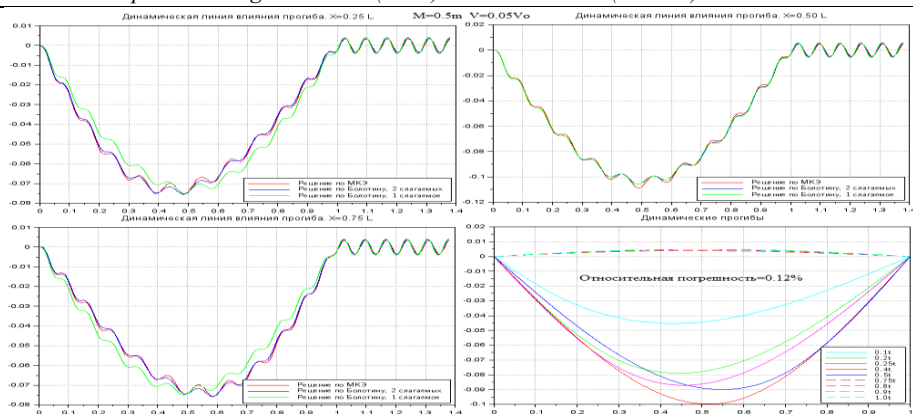


Рис. 3 - Параметры движения: $M=0.5m$, $V=0.05V_0$

Fig. 3 - Movement parameters: $M=0.5m$, $V=0.05V_0$

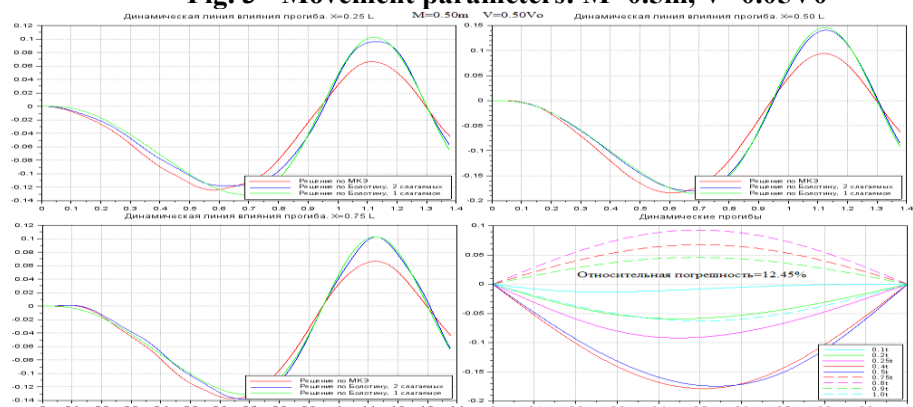


Рис. 4 - Параметры движения: $M=0.50m$, $V=0.50V_0$

Fig. 4 - Movement parameters: $M=0.50m$, $V=0.50V_0$

Расчет был выполнен в программном комплексе SCILAB. На рис. 5 приведена зависимость среднеквадратичного отклонения решения МКЭ с решением В.В.Болотина.

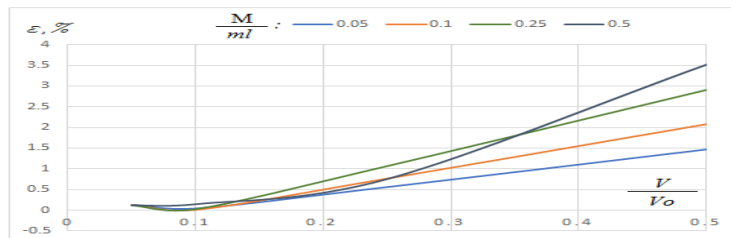


Рис. 5- Среднеквадратичное отклонение, (%)

Fig. 5- Standard deviation, (%)

Вывод. Анализ погрешности решения позволяет сделать вывод, что явную абсолютно устойчивую схему интегрирования уравнений движения в форме МКЭ можно применять в реальных задачах со сложной геометрией и распределением физико-механических параметров расчетной пространственной области. Предложенные методы решения позволяют моделировать динамическую работу конструкции при высокой степени ее дискретизации методом конечных элементов.

Устойчивость приведенных схем прямого интегрирования уравнений движения обеспечена в смысле критерия Дж. Неймана. Данные схемы являются абсолютно устойчивыми, что обеспечивает сходимость численного решения к точному при сгущении шага интегрирования по времени. Следовательно, проверку точности численных решений можно выполнять сравнением решений, построенных с разным по времени шагом интегрирования.

Библиографический список:

1. Работнов Ю Н. Механика деформируемого твердого тела. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 650 с.

2. Александров А.Ф., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. [Основы эластичности]. М.: Высшая школа, 1990.
3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.-334с.
4. Gurtin M.E. Variational Principles for Linear Elastodynamics-Arch.Rat. Mech.-Anal, 1964;16:31-50.
5. Batha K.J. Finite Element Procedures. K.J. Baths. New Jersey: Prentice Hall, 1996.pp. 10-12.
6. Panasyuk L.N., Kravchenko G.M. Stability of direct circuits integrating the equations of motion in the simulation of the dynamics of destruction.-MATEC «Web of Conferences» 2017
7. Panasuk L.N., Kravchenko G.M., Trufanova E.V. Researching design solutions for frames of buildings in case of increased seismic intensity in specific zones. – Matec Web of Conferences. 2017 № 106, Импакт-фактор журнала (по JCR, SNIP, SJR): 0,17 DOI статьи: doi.org/10.1051/mateconf/201710602027
8. Панасюк Л.Н. Анализ точности явных устойчивых схем прямого интегрирования задачи динамики сооружений// Известия ВУЗов, Естественные науки. 1994. № 4, С.20-25
9. Панасюк Л.Н. О построении явных безусловно устойчивых схем прямого интегрирования задачи динамики сооружений// Известия ВУЗов, строительство. 1995. № 10, С.35-40
10. Панасюк Л.Н. О концепции программных комплексов решения задач строительной механики на основе объектно-ориентированного программирования. – Ростов н/Д.: РГАС, 1996. – 39с.

References:

1. Rabotnov Yu N. Mechanics of a deformable solid body. Mechanics of a deformable solid body. Moscow: Nauka, 1979; 650. (In Russ)
2. Aleksandrov A.F., Potapov V.D. Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity. [Fundamentals of Elasticity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1990. (In Russ)
3. Dekker K., Verver J. Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential methods. Moscow: Mir, 1988;334 p.
4. Gurtin M.E. Variational Principles for Linear Elastodynamics-Arch.Rat. Mech.-Anal, 1964;16:31-50.
5. Batha K.J. Finite Element Procedures. K.J. Baths. New Jersey: Prentice Hall, 1996;10-12.
6. Panasiuk L.N., Kravchenko G.M. Stability of direct circuits integrating the equations of motion in the simulation of the dynamics of destruction.-MATEC «Web of Conferences» 2017
7. Panasiuk L.N., Kravchenko G.M., Trufanova E.V. Researching design solutions for frames of buildings in case of increased seismic intensity in specific zones. – Matec Web of Conferences. 2017 №106, Импакт-фактор журнала (по JCR, SNIP, SJR): 0,17 DOI статьи: doi.org/10.1051/mateconf/201710602027
8. Panasiuk L.N. Analysis of the accuracy of explicit stable direct integration schemes for the dynamics of structures. *Izvestiya VUZov, natural sciences*. 1994;4:20-25 (In Russ)
9. Panasiuk L.N. On the construction of explicit unconditionally stable schemes for direct integration of the problem of structural dynamics. *Izvestiya VUZov, stroitelstvo*. 1995;10:35-40 (In Russ)
10. Panasyuk L.N. On the concept of software systems for solving problems of structural mechanics based on object-oriented programming. Rostov n/A: RGAS, 1996;39. (In Russ)

Сведения об авторах:

Леонид Николаевич Панасюк, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика и теория сооружений», Panasjuk.leonid@gmail.com

Андрей Александрович Фириченко, аспирант, кафедра «Строительная механика и теория сооружений»; sru-52.5@donstu.ru

Александра Дмитриевна Мерзлякова, старший преподаватель, кафедра «Системы автоматизированного проектирования»; Merzlyakova@mail.ru

Василина Сергеевна Тюрина, кандидат технических наук, доцент, доцент, кафедра «Строительная механика и теория сооружений»; vasilina.93@mail.ru

Information about authors:

Leonid N. Panasiuk, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; Panasjuk.leonid@gmail.com

Andrey A. Firichenko, Postgraduate, Department of Structural Mechanics and Theory of Structures;

Alexandra D. Merzlyakova, Senior Lecturer, Department of Computer-Aided Design Systems; Merzlyakova@mail.ru

Vasilina S. Tyurina, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; vasilina.93@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 15.05.2025.

Одобрена после рецензирования / Revised 01.06.2025.

Принята в печать / Accepted for publication 18.06.2025.