



Численно-аналитический метод в решении задачи ползучести пологой оболочки

М.А. Магомедов¹, В.В. Кузнецов², Б.М. Языев³, С.В. Литвинов³

¹Дагестанский государственный технический университет,
¹367015, г. Махачкала, проспект Имама Шамиля, 70, Россия,

²Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И. Ибрагимов РАН,
²364051, г. Грозный, В. Алиева (Старопромысловское шоссе), 21а, Россия,

³Донской государственный технический университет,
³344002, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1, Россия

Резюме. Цель. В работе представлены общие уравнения моментной теории тонких пологих оболочек, имеющих относительно небольшой подъем над плоскостью своей проекции с учетом деформации ползучести. Рассматривается задача о напряженном-деформированном состоянии оболочки, с граничными условиями. При расчете принимали, что по краям оболочка соединена с диафрагмами, абсолютно жесткими в их плоскости и гибкими из нее. Получены разрешающие уравнения для расчета пологих изотропных и ортотропных оболочек с учетом деформаций ползучести. Задача свелась к системе из двух дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно прогиба и функции напряжений. **Метод.** Решение приводится численно-аналитическим методом в программном комплексе MATLAB. Нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича использовано как уравнение состояния между деформациями ползучести и напряжениями. Для определения деформаций ползучести применялась линейная аппроксимация первой производной по времени (метод Рунге-Кутты). Для верификации решения задачи был произведен расчет оболочки из вторичного ПВХ, выполненный методом сеток. Методика апробирована путем сравнения решения с расчетом и других известных исследователей. **Результат.** Разработана программа для расчета в пакете MATLAB с возможностью вариации исходных данных и выводом графика зависимости перемещений, напряжений от времени. Установлено, что напряжения и внутренние усилия в ортотропной оболочке той же формы, что для изотропной, происходит перераспределение напряжений: нормальные напряжения возрастают, а касательные убывают. Продольные и сдвигающие силы при этом остаются практически постоянными; изменение напряжений происходит в основном за счёт перераспределения изгибающих и крутящих моментов. **Вывод.** Предложенный подход может быть применен к анализу напряженно-деформированного состояния и несущей способности также и железобетонной оболочки. Ограничений по граничным условиям и видам нагружения нет, а материалом балки могут быть не только полимеры и композиты строительного назначения, но и бетон.

Ключевые слова: ползучесть бетона, неупругие коэффициенты, относительная деформация, уравнение связи Максвелла-Гуревича, изгибающие моменты, переменная жесткость, двойные тригонометрические ряды

Для цитирования: М.А. Магомедов, В.В. Кузнецов, Б.М. Языев, С.В. Литвинов. Численно-аналитический метод в решении задачи ползучести пологой оболочки. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(2):190-200. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-2-190-200

Numerical-analytical method in solving the problem of creep of a shallow shell

M.A. Magomedov¹, V.V. Kuznetsov², B.M. Yazyev³, S.V. Litvinov³

¹Daghestan State Technical University,
¹70 I. Shamil Ave., Makhachkala 367015, Russia,

²Kh.I. Ibragimov Integrated Research Institute of the Russian Academy of Sciences,

²364051, Grozny, V. Aliyeva (Staropromyslovskoe shosse), 21a, Russia,

³Don State Technical University,

³1 Gagarina Square, Rostov-on-Don 344002, Russia

Abstract. Objective. The paper presents general equations of the moment theory of thin shallow shells with a relatively small rise above the plane of their projection taking into account creep deformation. The problem of the stress-strain state of the shell with boundary conditions is considered. At the edges, the shell is connected to diaphragms that are absolutely rigid in their plane and flexible from it. Resolving equations are obtained for calculating shallow isotropic and orthotropic shells taking into account creep deformations. The problem is reduced to a system of two fourth-order differential equations with respect to deflection and stress function. **Method.** The solution is given by the numerical-analytical method in the MATLAB software package. The non-linear Maxwell-Gurevich equation is used as the equation of state between creep deformations and stresses. To determine creep deformations, a linear approximation of the first derivative with respect to time (Runge-Kutta method) was used. To verify the solution to the problem, a shell made of secondary PVC was calculated using the grid method. The method has been tested by comparing the solution with the calculations of other well-known researchers. **Result.** A program has been developed for calculation in the MATLAB package with the ability to vary the initial data and output a graph of the dependence of displacements and stresses on time. It has been established that stresses and internal forces in an orthotropic shell of the same shape as for an isotropic one are subject to stress redistribution: normal stresses increase, and tangential stresses decrease. Longitudinal and shear forces remain almost constant; stress changes occur mainly due to the redistribution of bending and torque moments. **Conclusion.** The proposed approach can be applied to the analysis of the stress-strain state and bearing capacity of a reinforced concrete shell as well. There are no restrictions on boundary conditions and types of loading, and the beam material can be not only polymers and composites for construction purposes, but also concrete.

Keywords: concrete creep, inelastic coefficients, relative deformation, Maxwell-Gurevich constraint equation, bending moments, variable stiffness, double trigonometric series

For citation: M.A. Magomedov, V.V. Kuznetsov, B.M. Yazyev, S.V. Litvinov. Numerical-analytical method in solving the problem of creep of a shallow shell. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025; 52(2):190-200. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-2-190-200.

Введение. Пологие оболочки широко применяются для устройства большепролетных перекрытий, поэтому их рассмотрение представляет особенный интерес. Напряженное состояние пологой оболочки является переходным от невыгодного чисто моментного напряженного состояния пластины к выгодному безмоментному состоянию оболочки [1, 3, 4]. Пологие оболочки занимают промежуточное положение между изгибаемыми плитами и безмоментными оболочками, соединяя преимущества первых в части распределения материала по перекрываемой площади с преимуществом оболочек в части распределения напряжений по толщине.

Здесь рассматриваются пологие оболочки прямоугольного в плане очертания, которые наиболее распространены в строительной практике в качестве перекрытий различного рода сооружений [5-7]. Даже в тех случаях, когда строгое решение принципиально возможно, числовой расчет и получение окончательного результата сопряжены большей частью с очень большими трудностями.

Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольный в плане бесконечно малый элемент пологой оболочки размерами $dx \times dy$, на боковых гранях которого действуют усилия в срединной поверхности (рис.1, а), а также моменты и поперечные силы (рис. 1, б). Нормально к срединной поверхности приложена внешняя поперечная нагрузка q . (рис. 1), уравнение поверхности которой имеет вид:

$$z = f(x, y)$$

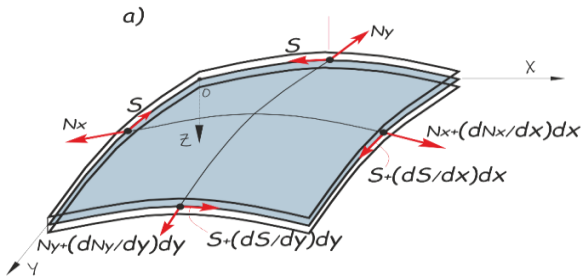


Рис. 1 а) Срединная поверхность полой оболочки

Fig. 1 a) Middle surface of the shallow shell

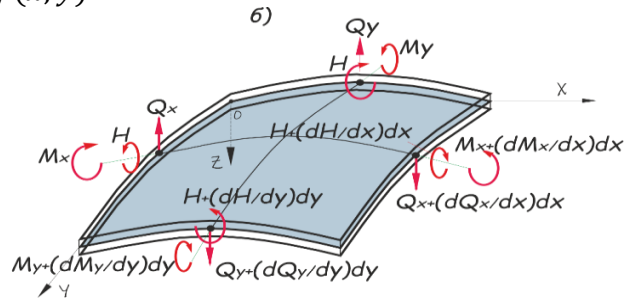


Рис. 1 б) Усилия в элементе полой оболочки

Fig. 1 б) Efforts in a shallow shell element

При наличии ползучести геометрические и статические уравнения теории пологих оболочек остаются неизменными. Изменения происходят только в физических уравнениях. Вывод разрешающих уравнений. Уравнение равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_x N_x - k_y N_y + q &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_x; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y; \end{aligned} \quad (1)$$

где N_x, N_y – продольные силы; S – сдвигающая сила; M_x, M_y – изгибающие моменты; H – крутящий момент; Q_x, Q_y – поперечные силы; q – поверхностная нагрузка.

Исключим из этих уравнений поперечные силы Q_x, Q_y проинтегрировав последнюю строку уравнения (1) по x, y и подставив в 2-ю строку уравнения (1), имеем обобщающее уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - k_x N_x - k_y N_y + q = 0. \quad (2)$$

Геометрические соотношения согласно [6,7], полные деформации, есть сумма составляющих деформаций срединной поверхности и деформаций, связанных с изменением кривизны:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности в соответствии координат x, y, z .

В (3) первое слагаемое – деформации срединной поверхности, второе слагаемое – изменения кривизн срединной поверхности. Введем обозначения:

$$(a) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{Bmatrix} w; \quad (б) \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} w \quad (4)$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности в соответствии координат x, y, z .

Уравнение совместности деформаций можно получить из (4а) проинтегрировав ε_x^0 и ε_y^0 по x и y соответственно, и суммируя их имеем:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (k_x w) \\ (k_y w) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Если $k_{xy} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, из чего следует, что k_x и k_y – главные кривизны, уравнение совместности деформаций (5) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} = k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Физические соотношения с учетом деформаций ползучести на основе первой гипотезы теории расчёта оболочек, как и пластинок, зависимость напряжений от деформаций принимается в виде:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{Bmatrix} \right); \quad (7)$$

Усилия, изгибающие и крутящий момент имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^{cr} \\ N_y^{cr} \\ S^{cr} \end{Bmatrix}; \quad (8)$$

где

$$\begin{Bmatrix} N_x^{cr} \\ N_y^{cr} \\ S^{cr} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{Bmatrix} dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{Bmatrix} dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[0 \quad 0 \quad \frac{(1-\nu)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}; \quad (9)$$

Соотношения для изгибных и крутящих моментов определяются как:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^{cr} \\ M_y^{cr} \\ H^{cr} \end{Bmatrix}; \quad (10)$$

где

$$\begin{Bmatrix} M_x^{cr} \\ M_y^{cr} \\ H^{cr} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{Bmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{Bmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [0 \quad 0 \quad \frac{(1-\nu)}{2}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{cr} \\ \varepsilon_y^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{Bmatrix} z dz \end{Bmatrix}; \quad (11)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{цилиндрическая жесткость}$$

Первые 2 уравнения равновесия (1) могут быть удовлетворены, если ввести функцию напряжений по формулам:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}. \quad (12)$$

Деформации срединной поверхности из (8) с учетом (12) представим, как:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_x^{cr} \\ N_y^{cr} \\ S^{cr} \end{Bmatrix} \right) \quad (13)$$

Подставив (1) в уравнение совместности деформаций (6), мы получим первое разрешающее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Omega - k_x \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} = \\ & = \frac{1}{Eh} \left[2(1+\nu) \frac{\partial^2 S^{cr}}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 N_x^{cr}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y^{cr}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 N_x^{cr}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_y^{cr}}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив уравнение (10) в (2), получим второе разрешающее уравнение:

$$D \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{w} + k_x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = q - \left(\frac{\partial^2 M_x^{cr}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^{cr}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{cr}}{\partial y^2} \right). \quad (15)$$

Таким образом получаем систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $\mathbf{w}$ и Ω .

Система дифференциальных уравнений (14) и (15) обобщает две теории упругости с учетом ползучести: задачу об изгибе пластинки и плоскую задачу [7, 8, 9].

Рассмотрим различные случаи граничных условий для прямоугольной в плане полой оболочки, кромки которой совпадают с координатными линиями x и y , являющимися линиями главных кривизн. На каждой кромке оболочки накладываются ограничения на функции w и φ , причем таких условий должно быть четыре - по два условия на каждую из функций w и φ . Заметим, что краевые условия, зависящие от прогиба оболочки, имеют точно такой же вид, что и для жестких пластин [9–12].

Так, для жестко защемленной кромки оболочки, параллельной координатной линии y (для точек этой кромки при $x = a, x = 0$ – рис.2), справедливы условия

$$w = 0|_{x=0, x=a}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0|_{x=0, x=a} \quad (16)$$

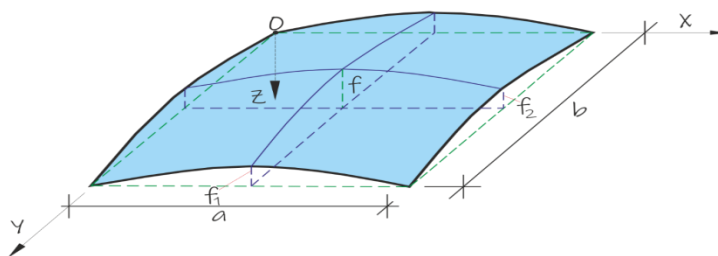


Рис. 2 - Тонкая полая оболочка

Fig. 2 - Thin shallow shell

Для шарнирно закрепленной кромки $x = a, x = 0$ аналогичные условия, которые накладываются на функцию Ω . Для кромки $x = a, x = 0$, которая может свободно перемещаться в направлении оси x ,

$$\sigma_x = 0|_{x=0, x=a}; \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0|_{x=0, x=a} \quad (17)$$

Для кромки $x = \pm a$, свободно смещаемой в направлении оси y ,

$$\tau_{yx} = 0|_{x=0, x=a}; \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = 0|_{x=0, x=a} \quad (18)$$

При решении практических задач могут встретиться различные комбинации перечисленных условий. Например, для жестко защемленной кромки $x = a, x = 0$, где исключаются перемещения в направлении осей x, y и z , следует положить

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0|_{x=0, x=a} \quad (19)$$

При свободном опирании кромок оболочки на торцевые диафрагмы (рис.3), абсолютно жесткие по отношению к деформациям в своей плоскости и гибкие из нее, граничные условия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= 0|_{x=0, x=a} \\ u = w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= 0|_{x=0, x=a}; \end{aligned} \quad (20)$$

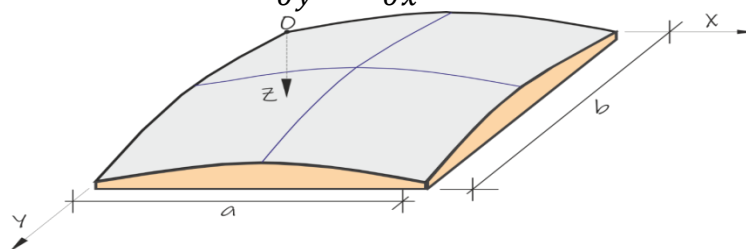


Рис. 3 - Опирание оболочки на диафрагмы

Fig. 3 - Support of the shell on the diaphragms

При расчете принимаем, что на контуре оболочки функция напряжений $\Omega = 0$, тогда на кромках $x = 0$ и $x = a$ автоматически обращается в нуль производная $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$, а на кромках $y = 0$, $y = b$ – производная $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$. Потребуем также, чтобы при $x = 0$ и $x = a$ обращалась в нуль производная $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$, а на кромках $y = 0$, $y = b$ – производная $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$. Тогда для кромок $x = 0$ и $x = a$ будем иметь:

$$\varepsilon_y^0 = \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x + N_y^{cr} - \nu N_x^{cr}) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + N_y^{cr} - \nu N_x^{cr} \right) \equiv 0. \quad (21)$$

Из (21) следует, что на указанных кромках перемещение v должно быть тождественно равно константе, которую можно принять равной нулю, следовательно последнее условие в (21) выполняется. Аналогично для кромок $y = 0$ и $y = b$:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y + N_x^{cr} - \nu N_y^{cr}) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + N_x^{cr} - \nu N_y^{cr} \right) \equiv 0. \quad (22)$$

Из (22) следует, что перемещение u при $y = 0$ и $y = b$ может быть равно нулю.

Методы исследования. Рассмотрим пример расчета пологой прямоугольной в плане оболочки, срединная поверхность которой представляет эллиптический параболоид (рис.). Начало координат – в левом верхнем углу. Уравнение поверхности имеет вид:

$$z = f \left[\frac{f_1}{f} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \frac{f_2}{f} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^2 - 1 \right], \quad (23)$$

Главные кривизны рассматриваемой оболочки определяются следующим образом:

$$k_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{8f_1}{a^2}; \quad k_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{8f_2}{b^2}. \quad (24)$$

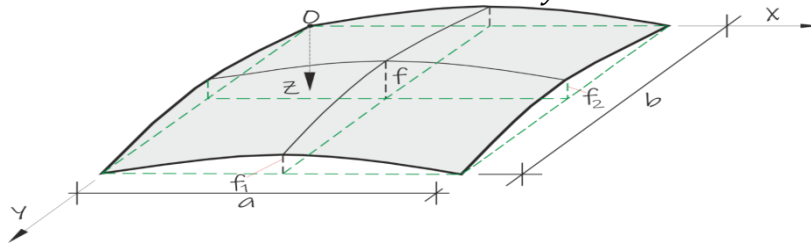


Рис. 4 - Пологая прямоугольная в плане оболочка

Fig. 4 - Flat rectangular shell

Решение системы разрешающих уравнений представляет большие трудности, поэтому целесообразно применять вариационные методы решения, например, как, метод Бубнова-Галеркина, в форме, разработанной для оболочек В.З. Власовым или Ритца-Тимошенко. Мы предлагаем решение численно-аналитическое. Будем искать решение уравнений в виде двойных тригонометрических рядов по синусам. С учетом (24) система разрешающих уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Omega + \frac{8f_1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{8f_2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= f^{cr}; \\ D \nabla^4 w - \frac{8f_1}{a^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \frac{8f_2}{b^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= q + q^{cr}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} f^{cr} &= \frac{1}{Eh} \left[2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S^{cr}}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 N_x^{cr}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y^{cr}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 N_x^{cr}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_y^{cr}}{\partial x^2} \right]; \\ q^{cr} &= - \left(\frac{\partial^2 M_x^{cr}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^{cr}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{cr}}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнений (25) в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \Omega(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (26)$$

Функции (26) удовлетворяют граничным условиям. Запишем функции $q(x, y)$, $q^{cr}(x, y)$ и $f^{cr}(x, y)$ в виде:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ q^{cr}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^{cr} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ f^{cr}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{cr} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (27)$$

Коэффициенты разложения q_{mn} , q_{mn}^{cr} и f_{mn}^{cr} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy; \\ q_{mn}^{cr} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q^*(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy; \\ f_{mn}^{cr} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f^{cr}(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \quad (28)$$

После подстановки (27) в (25), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi^4}{Eh} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \varphi_{mn} - \frac{8\pi^2}{a^2 b^2} [n^2 f_1 + m^2 f_2] w_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{cr} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 w_{mn} + \frac{8\pi^2}{a^2 b^2} [n^2 f_1 + m^2 f_2] \varphi_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (q_{mn} + q_{mn}^{cr}) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (29)$$

Два ряда равны между собой, если равны их коэффициенты. В итоге для каждой пары коэффициентов φ_{mn} и w_{mn} имеем систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{mn} \\ w_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{mn}^{cr} \\ q_{mn} + q_{mn}^{cr} \end{Bmatrix}; \quad \text{где} \quad (30)$$

$$a_{11} = \frac{\pi^4}{Eh} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2, \quad a_{12} = \frac{8\pi^2}{a^2 b^2} [n^2 f_1 + m^2 f_2]; \quad a_{22} = \pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

Из (30) коэффициенты φ_{mn} и w_{mn} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} &= \frac{f_{mn}^{cr} a_{22} + (q_{mn} + q_{mn}^{cr}) a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12}^2}; \\ w_{mn} &= \frac{a_{11} (q_{mn} + q_{mn}^{cr}) - a_{12} f_{mn}^{cr}}{a_{11} a_{22} + a_{12}^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

При $q(x, y) = \text{const}$ первый интеграл в (28) записывается в виде:

$$q_{mn} = \frac{4q}{ab} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{4q}{mn\pi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \Big|_0^a \cos \frac{n\pi y}{b} \Big|_0^b =$$

$$= \begin{cases} \frac{16q}{mn\pi^2}, & \text{если } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2p + 1 \\ 0, & \text{если } m \text{ или } n - \text{четное} \end{cases} \quad (32)$$

Последние 2 интеграла в (28) вычисляются численно. Для этого вводится равномерная сетка $\Delta x \times \Delta y$. Вычисление выполняется по формуле:

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy = \sum f(x_i, y_i) \Delta x \Delta y \omega_i, \quad (33)$$

где ω_i – весовой коэффициент, для внутренних узлов сетки равный 1, для узлов на контуре кроме углов $\omega_i = 0.5$, для угловых точек $\omega_i = 0.25$.

При $q(x, y) = \text{const}$ функции $q^{cr}(x, y)$ и $f^{cr}(x, y)$ следует раскладывать только по нечетным m и n . При помощи описанного подхода была решена задача, представленная в работе [1,2]. Количество интервалов по x, y, z и по времени принималось равным 100.

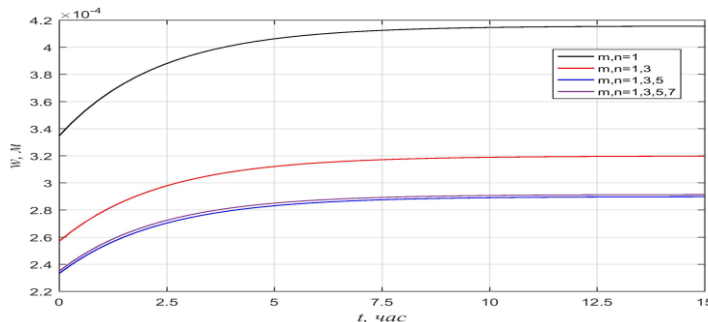
Обсуждение результатов. Расчет был выполнен в программном комплексе MATLAB. Для верификации правильности решения воспользуемся данными из [1]. Был выполнен расчет полимерного резервуара из вторичного ПВХ $h = 0.01$ м, $a = b = 1$ м, $f_1 = f_2 = 0.05$ м, материал оболочки – вторичный ПВХ, $E = 1480$ МПа, $E_\infty = 5990$ МПа, $m^{cr} = 12.6$ МПа, $\eta_0^{cr} = 9.06 \cdot 10^5$ МПа · мин, $\nu = 0.3$. На оболочку действует постоянная, равномерно распределенная по площади нагрузка $q = 0.5$ кПа. Приведены так же результаты, выполненные в [1,2] для верификации правильности решения. Сравнение наибольших величин прогиба в различные моменты времени, полученных методом конечных разностей (МКР) и численно-аналитически (ЧАМ) при $m, n = 1, 3, 5, 7$ приведено в табл.1. Результаты, полученные при девяти и шестнадцати членах ряда, практически совпадают. Совпадение результатов свидетельствует о их достоверности.

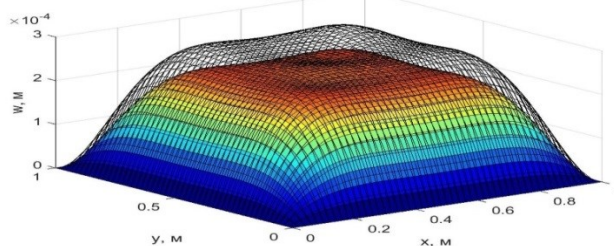
Таблица 1 – Сравнение наибольших перемещений в различные моменты времени, полученных МКР и численно-аналитического метода (ЧАМ)

Table 1 – Comparison of the largest displacements at different points in time obtained by the MKR and the numerical-analytical method (NAM)

t , час		1	2	3	4	5	6	7	8
w , мм	МКР	0.2547	0.2675	0.2759	0.2814	0.2850	0.2873	0.2889	0.2899
	ЧАМ	0.2547	0.2675	0.2759	0.2813	0.2849	0.2872	0.2887	0.2897

На рис. приведен график роста наибольшей величины прогиба при различном числе членов ряда.

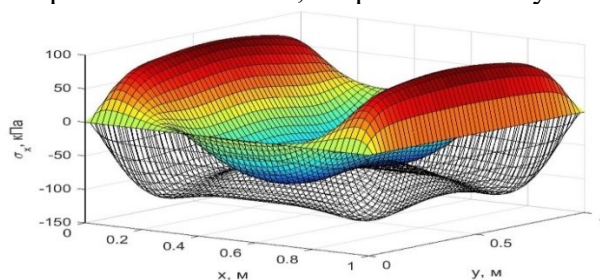




**Рис. 6 – Распределение перемещений w в зависимости от x и y :
 закрашенная поверхность – при $t = 0$; сетчатая поверхность при $t = 15$ ч**

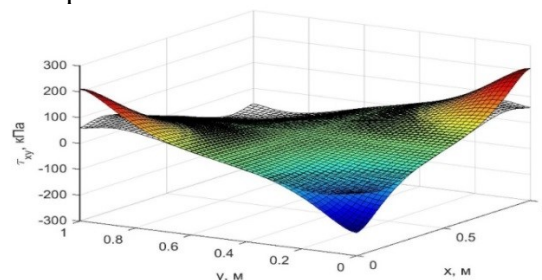
**Fig. 6 – Distribution of displacements w depending on x and y :
 shaded surface – at $t = 0$; mesh surface at $t = 15$ h.**

Распределение напряжений σ_x и τ_{xy} как функций от x и y при $t = 15$ час приведено соответственно на рис. и рис. . Сетчатым графикам соответствуют напряжения у верхней поверхности оболочки, закрашенным – у нижней поверхности.



**Рис. 7 – Распределение напряжений σ_x при $t = 15$ ч:
 сетчатая поверхность – $z = -h/2$, закрашенная поверхность – $z = h/2$**

Fig. 7 – Distribution of stresses σ_x at $t = 15$ h: mesh surface – $z = -h/2$, shaded surface – $z = h/2$



**Рис. 8 – Распределение напряжений τ_{xy} при $t = 15$ ч: сетчатая поверхность – $z = -h/2$,
 закрашенная поверхность – $z = h/2$**

Fig. 8 – Distribution of stresses τ_{xy} at $t = 15$ h: mesh surface – $z = -h/2$, shaded surface – $z = h/2$

Вывод. Получены разрешающие уравнения для расчета пологих изотропных и ортотропных оболочек с учетом ползучести. Задача свелась к системе из двух дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно прогиба и функции напряжений. Приведен пример расчета пологой оболочки из ПВХ в форме эллиптического параболоида. В результате расчета установлено, что напряжения и внутренние усилия в изотропной оболочке в процессе ползучести практически не меняются.

Приведено численно-аналитическое решение задачи с использованием двойных тригонометрических рядов. Для изотропной оболочки достаточным оказалось 9 членов ряда. Выполнено сравнение результатов с решением на основе метода конечных разностей. Таким образом, расчет оболочки только в упругой стадии приводит к заниженным значениям напряжений, и как следствие, возможному ее разрушению в процессе эксплуатации.

Библиографический список:

1. Чепурненко А.С., Сайбель А.В., Савченко А.А. Расчет круговой цилиндрической оболочки по моментной теории с учетом ползучести // Инженерный вестник Дона, 2015, №2. http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_126_chepurnenko_saibel.pdf_3a21b7b730.pdf
2. Mailyan L.R., Chepurnenko A.S., Yazyev S.B., Yazyev B.M. Calculation of shallow polymer shell taking the creep into account // MATEC Web of Conferences 106, 04010 SPbWOSCE-2016
3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. 264 с.
4. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. pp. 707-710.
5. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1004-1005. pp. 257-260.
6. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Козельская М.Ю. Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона // Научное обозрение. 2014. № 11. С. 759-763.

7. Монахов В.А. Теория пластин и оболочек. Пенза: ПГТУ, 2016. 252 с.
8. Chepurnenko A.S., Yazyev B.M., Savchenko A.A. Calculation for the circular plate on creep considering geometric nonlinearity // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. pp. 1680–1685.
9. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2008. Vol. 50. No. 3. Pp. 578–588.
10. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. М.: Академия наук СССР. 1931. 80 с.
11. Лалин В. В., Колосова Г. С. Численные методы в строительстве. СПб. Изд-во СПбГТУ, 2001. 71 с.
12. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams // *Structural engineering and mechanics*. 2010. v. 35. №5. P. 631–643.
13. Milind T. R., Date P. P. Analytical and finite element modeling of strain generated in equal channel angular extrusion // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012. V. 56. № 1. P. 26–34.

References:

1. Chepurnenko A.S., Saibel A.V., Savchenko A.A. Calculation of a circular cylindrical shell using the moment theory taking into account creep. *Engineering Bulletin of the Don*, 2015;2. http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_126_chepurnenko_saibel.pdf_3a21b7b730.pdf (In Russ)
2. Mailyan L.R., Chepurnenko A.S., Yazyev S.B., Yazyev B.M. Calculation of shallow polymer shell taking the creep into account // *MATEC Web of Conferences* 106, 04010 SPbWOSCE-2016
3. Samul V.I. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. Moscow: Vysshaya shkola, 1982;264 (In Russ)
4. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep. *Advanced Materials Research*. 2014; 900:707–710.
5. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep. *Advanced Materials Research*. 2014;1004–1005:257–260.
6. Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V., Kozelskaya M.Yu. Stress-strain state of prestressed reinforced concrete cylinder taking into account concrete creep. *Scientific Review*. 2014;11:759–763 (In Russ)
7. Monakhov V.A. Theory of plates and shells. Penza: PSUAS, 2016. 252 p. (In Russ)
8. Chepurnenko A.S., Yazyev B.M., Savchenko A.A. Calculation for the circular plate on creep considering geometric nonlinearity. *Procedia Engineering*. 2016; 150:1680–1685.
9. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2008; 50(3):578–588.
10. Krylov A.N. On the calculation of beams lying on an elastic foundation. Moscow: USSR Academy of Sciences. 1931.80 p. (In Russ)
11. Lalin V.V., Kolosova G.S. Numerical methods in construction. St. Petersburg. Publishing House of St. Petersburg State Technical University, 2001. 71 p. (In Russ)
12. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams. *Structural engineering and mechanics*. 2010;35(5):631–643.
13. Milind T. R., Date P. P. Analytical and finite element modeling of strain generated in equal channel angular extrusion. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012;56(1):26–34. (In Russ)

Сведения об авторах:

Марсель Айдемирович Магомедов, аспирант, кафедра «Строительная механика»; marismag05@ya.ru; ORCID 0000-0001-5517-919X;

Владимир Вячеславович Кузнецов, соискатель; ibm2225101@gmail.com; ORCID0009-0009-3688-4737

Батыр Меретович Языев, доктор технических наук, профессор, профессор, кафедра «Строительная механика и теория сооружений»; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0002-5205-1446

Степан Викторович Литвинов, кандидат технических наук, доцент, доцент, кафедра «Строительная механика и теория сооружений»; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0001-5729-1425.

Information about authors:

Marcel A. Magomedov, Postgraduatet, Department of Structural Mechanics; marismag05@ya.ru; ORCID 0000-0001-5517-919X;

Vladimir V. Kuznetsov, Applicant; ibm2225101@gmail.com. ORCID 0009-0009-3688-4737

Batyr M. Yazyev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0002-5205-1446

Stepan V. Litvinov, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0001-5729-1425

Конфликт интересов / Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 24.01.2025.

Одобрена после рецензирования / Revised 26.02.2025.

Принята в печать / Accepted for publication 20.05.2025.