

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.04

DOI: 10.21822/2073-6185-2025-51-4-242- 250



Оригинальная статья /Original article

**Вариационно-разностный подход в расчете трехслойной балки
с учетом ползучести среднего слоя**

Б.М. Языев¹, С.В. Литвинов¹, Е.В. Виноградова², М.А. Магомедов³

¹Донской государственный технический университет,

¹344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1, Россия,

²Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы,

²115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, Россия,

³Дагестанский государственный технический университет,

³367015, г. Махачкала, проспект И. Шамиля, 70, Россия

Резюме. Цель. В статье приводится методика расчета трехслойной балки с легким заполнителем с учетом ползучести среднего слоя. Представлено существенное развитие деформаций с течением времени под действием постоянной нагрузки. **Метод.** Исследуется шарнирно опертая по концам балка под действием равномерно распределенной нагрузки, решение осуществляется при помощи вариационно-разностного метода. В качестве закона ползучести используется линейное уравнение Максвелла-Томпсона. Для вычисления скорости роста высокоэластических деформаций использовался метод Эйлера и Рунге-Кутты. **Результат.** Проведен графический анализ изменения во времени напряжений и деформаций. Установлено, что соотношение упругой и деформации ползучести в разные моменты времени существенно различно. Разработана программа для расчета в пакете MATLAB с возможностью вариации исходных данных и выводом графика зависимости перемещений, изгибающего момента от времени. Представлено сравнение максимальной величины прогиба в упругой стадии (в начальный момент времени) с решением в программном комплексе ЛИРА САПР. Отмечено, что напряжения практически не меняются в процессе ползучести. **Вывод.** Предложенный подход может быть применен к анализу напряженно-деформированного состояния и несущей способности для сэндвич панелей произвольного сечения. Ограничений по граничным условиям и вида нагружения нет, а материалом несущих слоев балки может быть не только металл, но и другой материал, в частности, композит.

Ключевые слова: ползучесть, относительная деформация, уравнение состояния, изгибающие моменты, переменная жесткость, слоистые балки, вариационно-разностный метод, перемещения угловые; многослойные элементы конструкции; теория вязкоупругости; механика полимеров

Для цитирования: Б.М. Языев, С.В. Литвинов, Е.В. Виноградова, М.А. Магомедов. Вариационно-разностный подход в расчете трехслойной балки с учетом ползучести среднего слоя. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(1):242-250. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-1-242-250

**Variational-difference Approach to calculation of a Three-layer beam taking into account
the creep of the middle layer**

B.M. Yazyev¹, S.V. Litvinov¹, E.V. Vinogradova², M.A. Magomedov³

¹Don State Technical University,

¹1 Gagarin Square, Rostov-on-Don 344003, Russia,

²P.Lumumba Peoples' Friendship University of Russia,

²3 Ordzhonikidze St., Moscow 115419, Russia,

³Daghestan State Technical University,

³70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367015, Russia

Abstract. Objective. This article presents a calculation method for a three-layer beam with lightweight filler taking into account the creep of the middle layer. A significant development of deformations over time under a constant load is presented. **Method.** A beam hinged at the ends is investigated under a uniformly distributed load; the solution is carried out using the variational-difference method. The linear Maxwell-Thompson equation is used as the creep law. The Euler and Runge-Kutta methods are used to calculate the growth rate of highly elastic deformations. **Result.** A graphical analysis of changes in stresses and deformations over time is presented. It is found that the ratio of elastic and creep deformations at different points in time varies significantly. A program has been developed for calculations in the MATLAB package with the ability to vary the initial data and output a graph of the dependence of displacements and bending moment on time. A comparison of the maximum deflection in the elastic stage (at the initial moment of time) with the solution in the LIRA SAPR software package is presented. It is noted that the stresses remain virtually unchanged during creep. **Conclusion.** The proposed approach can be applied to the analysis of the stress-strain state and bearing capacity for any sandwich panels of arbitrary cross-section. There are no restrictions on the boundary conditions and type of loading, and the material of the beam's bearing layers can be not only metal, but also any other material, in particular, composite.

Keywords: creep, relative deformation, equation of state, bending moments, variable stiffness, layered beams, variational-difference method, angular displacements; multilayer structural elements; viscoelasticity theory; polymer mechanics

For citation: B.M. Yazyev, S.V. Litvinov, E.V. Vinogradova, M.A. Magomedov. Variational-difference Approach to calculation of a Three-layer beam taking into account the creep of the middle layer. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(1): 242-250. (In Russ) DOI:10.21822 /2073-6185-2025-52-1-242-250

Введение. Классические методики расчета таких конструкций часто направлены на определение несущей способности только одного слоя, выполненного из металла, дерева, железобетона или композиционного материала. Различные конструктивные решения многослойных элементов рассматривают возможность влияния слоя утеплителя на несущую способность конструкции в целом [1-7]. При этом слой утеплителя рассматривается внутри «сэндвича». На сегодняшний день вопрос расчета многослойных конструкций актуален, так как в рамках повышения энергосбережения зданий такие элементы используются как в вертикальных, так и горизонтальных конструкциях. Изделия, в состав которых входят полимеры, в большей степени, чем многие другие строительные материалы, подвержены ползучести. Поскольку средний слой трехслойных панелей часто изготавливается из пенопластов, указанное свойство необходимо учитывать при проектировании. Учет ползучести сопряжен с решением сложных систем интегро-дифференциальных уравнений [8-10], что значительно препятствует использованию аппарата теории ползучести в практике инженерных расчетов.

Постановка задачи. В настоящей статье приводится сравнительно простой метод расчета трехслойной балки с учетом ползучести ВРМ, который может быть применен в инженерной практике. Идея ВРМ [11-13] состоит в замене вариационной задачи ее дискретным аналогом в сеточной области — т. е. искомая непрерывная функция, входящая в выражение полной потенциальной энергии системы, определяется дискретно, на некотором множестве узлов. При формировании системы алгебраических уравнений исходный функционал энергии, записанный для всей области, заменяется некоторой конечной суммой, а входящие в него производные — конечными разностями. Матрица коэффициентов системы разрешающих уравнений ВРМ получается симметричной, хорошо обусловленной и имеет ленточную структуру.

Рассмотрим трехслойную балку с полимерным заполнением среднего слоя шарнирно-опертую по концам. Балка, подверженная действию равномерно распределенной

нагрузкой q (рис.1). Сечение вдоль балки до деформации приведен на (рис. 2). Обозначим толщину внешних несущих слоев через δ , а толщину заполнителя через $(h - \delta)$. При построении теории будем пользоваться следующими гипотезами [16]:

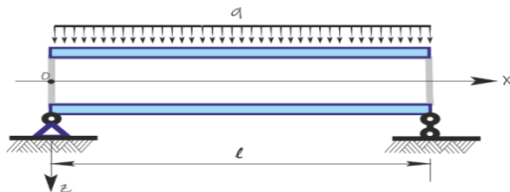


Рис. 1 - Расчетная схема трехслойной балки.
Fig.1 - Calculation scheme of a three-layer beam.

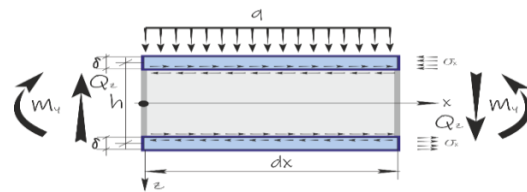


Рис. 2 - Сечение вдоль трехслойной балки до деформации
Fig. 2 - Cross-section along a three-layer beam before deformation

Изгибающий момент $M_y(x)$ воспринимается верхним и нижним упругим слоем, а также вязкоупругим слоем заполнителя (рис.3).

Толщина заполнителя намного больше толщины несущих слоев, т.е. $(h - \delta) > 2\delta$. Модули упругости заполнителя значительно меньше модулей упругости несущих слоев, вследствие чего обычно пренебрегают нормальными напряжениями, возникающими в заполнителе, но мы делать этого не будем. Перерезывающие силы воспринимаются только заполнителем.

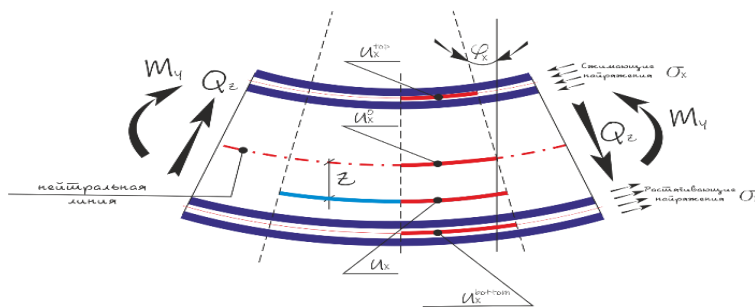


Рис. 3 - Сечение трехслойной пластины после деформации
Fig. 3 - Section of a three-layer plate after deformation

Методы исследования. Разрешающие уравнения будут получены, исходя из вариационного принципа Лагранжа. Полная энергия W состоит из потенциальной энергии U деформации тела (потенциала внутренних сил) за вычетом энергии (потенциала) A_q внешних сил:

$$W = U - A_q. \quad (1)$$

Потенциальная энергия деформации трехслойной пластины с учетом ползучести и работа внешних сил определяется следующим образом:

$$U = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma_{x,m}^{el} \cdot \varepsilon_{x,m}^{el} dV}_{\text{Изгиб металлической оболочки}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma_{x,poly}^{el} \cdot \varepsilon_{x,poly}^{el} dV}_{\text{Изгиб заполнителя}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \tau_{mid}^{el} \cdot \gamma_{mid}^{el} dV}_{\text{Сдвиг заполнителя с учетом ползучести}}; \quad (2)$$

Работа внешних сил:

$$A_q = \int_0^l q w dx. \quad (3)$$

Здесь: $\varepsilon_{x,m}^{el}$, $\sigma_{x,m}^{el}$ — относительная деформация и нормальное напряжение несущих слоев; $\varepsilon_{x,poly}^{el}$, $\sigma_{x,poly}^{el}$ — относительная деформация и нормальное напряжение среднего полимерного слоя; γ_{mid}^{el} , τ_{mid}^{el} — относительная угловая деформация и касательное напряжение среднего полимерного слоя.

Рассмотрим поэлементно, в случае постоянного сечения $dV = dx \cdot dA = dx \cdot b \cdot h$ (рис. 4):

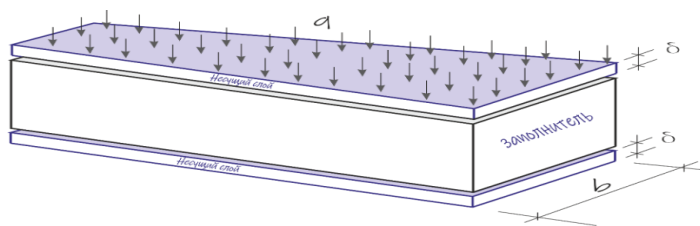


Рис. 4 - Сечение трехслойной пластины после деформации
Fig. 4 - Section of a three-layer plate after deformation

Первое слагаемое соотношения (2) *:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \int_V \sigma_{x,m}^{el} \cdot \varepsilon_{x,m}^{el} dV \right); \quad \sigma_{x,m}^{el} = \frac{M_y(x)}{I_{y,m}} z; \quad \varepsilon_{x,m}^{el} = \frac{\sigma_{x,m}^{el}}{E}. \\
 & 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \int_V \sigma_{x,m}^{el} \cdot \varepsilon_{x,m}^{el} dV \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_V \frac{(\sigma_{x,m}^{el})^2}{E} dV = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_y(x))^2}{E_m I_{y,m}^2} z^2 dx dA = \\
 & = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_y(x))^2}{E_m I_{y,m}^2} \underbrace{\left(\int_A z^2 dA \right)}_{I_{y,m}} dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_y(x))^2}{E_m I_{y,m}} dx \right); \\
 & \left(E I_{y,m} \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 = (M_y(x))^2 \rightarrow \text{тогда окончательно} \\
 & 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \int_V \sigma_{x,m}^{el} \cdot \varepsilon_{x,m}^{el} dV \right) = E I_{y,m} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx; \tag{4}
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое соотношения (2):

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} \int_V \sigma_{x,poly}^{el} \cdot \varepsilon_{x,poly}^{el} dV \right) &= E_{poly} I_{y,poly} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\overline{G_{poly}} \cdot 2(1+\nu) b h^3}{2 \cdot 12} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx; \\
 \left(\frac{1}{2} \int_V \sigma_{x,poly}^{el} \cdot \varepsilon_{x,poly}^{el} dV \right) &= k \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx; \tag{5}
 \end{aligned}$$

Третье слагаемое соотношения (2):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_V \tau_{poly}^{el} \cdot \gamma_{poly}^{el} dV; \quad \tau_{poly}^{el} = G_{poly} \cdot \gamma_{poly}^{el}; \quad \gamma_{poly}^{el} = \gamma_{poly} - \gamma_{poly}^{cr} \\
 & = \left(\frac{\partial u_x(z)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \gamma_{poly}^{cr}; \\
 & \frac{1}{2} \int_V G_{poly} \cdot (\gamma_{poly}^{el})^2 dV = \frac{G_{poly}}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u_x(z)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{poly}^{cr} \right)^2 dx \cdot b \cdot h = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^l G_{poly} b h \left(\frac{\partial u_x(z)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{poly}^{cr} \right)^2 dx \tag{6}
 \end{aligned}$$

Подставим (3), (4), (5) и (6) в (2) и перейдем к разностной схеме:

$$U = \left(\frac{E_m I_{y,m}}{2} + k \right) \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} G_{poly} b h \int_0^l \left(\frac{\partial u_x(z)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{mid}^{cr} \right)^2 dx - \int_0^l q w dx; \tag{7}$$

Схема для перехода к разностной аппроксимации функционала представлена на рис.5.

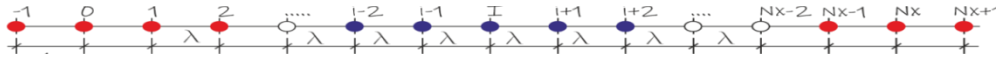


Рис. 5 - Сетка средней линии трехслойной балки
 Fig. 5 - The centerline mesh of a three-layer beam

Для точки «i»

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\lambda^2}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\lambda};$$

$$U = \left(\frac{1}{2} E_m I_{y,m} + k \right) \sum_{i=1}^n \left[\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\lambda^2} \right]^2 \cdot \lambda + \frac{G_{poly} b h}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\lambda} + \frac{\partial u_i}{\partial z} - \gamma_{poly}^{cr} \right]^2 \cdot \lambda - \sum_{i=1}^n q_i \cdot w_i \cdot \lambda;$$

Перепишем в развернутом виде:

$$U = \left(\frac{1}{2} E_m I_{y,m} + k \right) \left[\dots + \left(\frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{\lambda^2} \right)_{i-1}^2 + \left(\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\lambda^2} \right)_i^2 + \left(\frac{w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{\lambda^2} \right)_{i+1}^2 \dots \right] +$$

$$+ \frac{G_{poly} b h \lambda}{2} \left[\dots + \left(\frac{w_i - w_{i-2}}{2\lambda} + \frac{\partial u_{i-1}}{\partial z} - \gamma_{i-1}^{cr} \right)_{i-1}^2 + \left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\lambda} + \frac{\partial u_i}{\partial z} - \gamma_i^{cr} \right)_i^2 + \dots \right] + \left(\frac{w_{i+2} - w_i}{2\lambda} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z} - \gamma_{i+1}^{cr} \right)_{i+1}^2 + q_i \lambda (\dots + w_{i-1} + w_i + \dots);$$

Здесь нижний индекс у круглых скобок указывает, к каким узлам относятся производные, т. е. какие это части потенциальной энергии. Условие минимума полной потенциальной энергии по w_i :

$$\frac{\partial U}{\partial w_i} = \left(\frac{1}{2} E_m I_{y,m} + k \right) \left[2 \left(\frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{\lambda^2} \right) \frac{1}{\lambda^2} + 2 \left(\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\lambda^2} \right) \left(-\frac{2}{\lambda^2} \right) + 2 \left(\frac{w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{\lambda^2} \right) \frac{1}{\lambda^2} \right] +$$

$$+ \frac{G_{poly} b h}{2} \lambda \left[2 \left(\frac{w_i - w_{i-2}}{2\lambda} + \frac{\partial u_{i-1}}{\partial z} - \gamma_{i-1}^{cr} \right) \frac{1}{2\lambda} + 0 + 2 \left(\frac{w_{i+2} - w_i}{2\lambda} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z} - \gamma_{i+1}^{cr} \right) \left(-\frac{1}{2\lambda} \right) \right] + q_i \lambda = 0; \quad \left| \frac{1}{\lambda} \right|$$

$$\frac{\partial U}{\partial w_i} = \left(\frac{1}{2} E_m I_{y,m} + k \right) \cdot 2 \cdot \left[\frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{\lambda^4} \right] +$$

$$G_{mid} b h \frac{2}{2} \left[-\frac{w_{i-2} - 2w_i + w_{i+2}}{4\lambda^2} - \frac{\frac{\partial u_{i-1}}{\partial z} - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z}}{2\lambda} + \frac{\gamma_{i+1}^{cr} - \gamma_{i-1}^{cr}}{2\lambda} \right] - q_i = 0$$

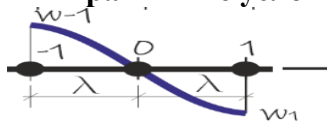
Введём замену $E_m I_{y,m} + 2k = \xi$. Окончательно:

$$w_{i-2} \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly} b h}{4\lambda^2} \right] + w_{i-1} \left(-\frac{4\xi}{\lambda^4} \right) + w_i \left[6 \frac{\xi}{\lambda^4} + \frac{2G_{poly} b h}{4\lambda^2} \right] +$$

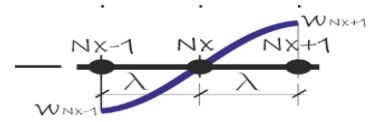
$$+ w_{i+1} \left[-4 \frac{\xi}{\lambda^4} \right] + w_{i+2} \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly} b h}{4\lambda^2} \right] = \underbrace{G_{poly} b h \frac{M_y}{E_m I} + q_i - G_{poly} b h \frac{\partial \gamma_i^{cr}}{\partial x}}_F, \quad (8)$$

где $E_m I_{y,m} = E_m \cdot b \cdot \delta^3 / 12$ - собственная жесткость обшивки, работающей по балочной схеме; $E_m I = E_m \cdot b \cdot \delta \cdot h^2 / 2$ - жесткость обшивки относительно общего центра тяжести сечения; k - переменная, связанная со сдвиговой жесткостью заполнителя, определяемая согласно (5).

Граничные условия. Шарнирное раскрепление



$$w_1 = -w_1, -N_{x-1} = N_{x+1}$$



Запишем для $i = 1$

$$-w_{-1} \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] + w_0 \left(-\frac{4\xi}{\lambda^4} \right) + w_1 \left[6\frac{\xi}{\lambda^4} + \frac{2G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] + w_2 \left[-4\frac{\xi}{\lambda^4} \right] + w_3 \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] = F.$$

Приведем коэффициенты при w_1 :

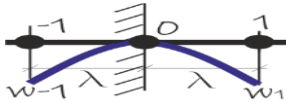
$$-\left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] + \left[6\frac{\xi}{\lambda^4} + \frac{2G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] = \left[5\frac{\xi}{\lambda^4} + \frac{3G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right].$$

Окончательно:

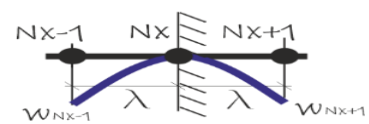
$$w_0 \left(-\frac{4\xi}{\lambda^4} \right) + w_1 \left[5\frac{\xi}{\lambda^4} + \frac{3G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] + w_2 \left[-4\frac{\xi}{\lambda^4} \right] + w_3 \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] = F.$$

Аналогично записывается и для N_{x-1}

Жесткая заделка



$$w_1 = w_1, N_{x-1} = N_{x+1}$$



Запишем для N_{x-1}

$$w_{-1} \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] + w_0 \left(-\frac{4\xi}{\lambda^4} \right) + w_1 \left[6\frac{\xi}{\lambda^4} + \frac{2G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] + w_2 \left[-4\frac{\xi}{\lambda^4} \right] + w_3 \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] = F.$$

Окончательно:

$$w_0 \left(-\frac{4\xi}{\lambda^4} \right) + w_1 \left[7\frac{\xi}{\lambda^4} + \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] + w_2 \left[-4\frac{\xi}{\lambda^4} \right] + w_3 \left[\frac{\xi}{\lambda^4} - \frac{G_{poly}bh}{4\lambda^2} \right] = F.$$

Изгибающий момент и поперечная сила для рассматриваемой балки определяются следующим образом:

$$Q(x) = \frac{ql}{2} - qx; \quad M_y(x) = \frac{qx}{2}(l - x). \quad (9)$$

Уравнение (8) решается численно методом конечных разностей [14-15]. Если закон ползучести задан в дифференциальной форме, то зная деформацию ползучести и напряжение в текущий момент времени, можно определить скорость роста деформации ползучести и ее величину в момент времени $t + \Delta t$:

$$\gamma_i^{cr}(t + \Delta t) = \gamma_i^{cr}(t) + \frac{\partial \gamma_i^{cr}}{\partial t} \Delta t.$$

В уравнении (8) нагрузка q считается положительной, если она направлена вверх. В рассматриваемом случае нагрузка направлена вниз, поэтому перед первым слагаемым в скобках (8) знак “-”. В качестве уравнения состояния принят закон Максвелла-Томсона:

$$\frac{\partial \gamma_{mid}^{cr}}{\partial t} = \frac{1}{\underbrace{nG_{poly}}_K} \left[\left(1 - \frac{H}{G_{poly}} \right) \tau - H\gamma_{mid}^{cr} \right]$$

где n – время релаксации, $K = n \cdot G_{poly}$

Обсуждение результатов. Расчет был выполнен в программном комплексе MATLAB. Из приведенной зависимости (рис. 3) видно, что деформации резко возрастают в период времени от 0 до 80 суток, а затем приходят к конечному значению. Авторами рассмотрена задача при следующих данных: $q = 0,6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $l = 1,5 \text{ м}$; $\delta = 0,001 \text{ м}$; $h = 0,06 \text{ м}$; $b = 0,1 \text{ м}$; $E_m = 0,71 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$; $G_{poly} = 4,85 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$; $H = 3,17 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$; $n = 230,62 \text{ ч}$.

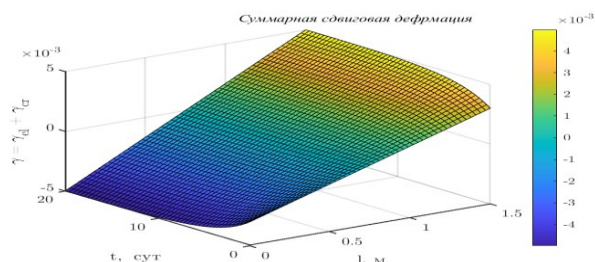


Рис. 6 - График изменения суммарной сдвиговой деформации во времени. Схема «шарнир-шарнир»
Fig. 6 - Graph of change in total shear deformation over time. Hinge-hinge scheme

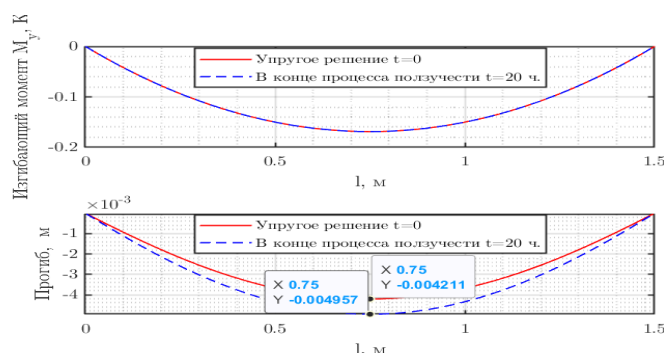


Рис. 7 - График изменения изгибающего момента и прогиба по длине балки: 1 – распределение изгибающего момента по длине балки в начале и конце процесса ползучести; 2 – распределение прогиба по длине балки в начале и в конце процесса ползучести. Схема «Шарнир-Шарнир»

Fig. 7 - Graph of the change in bending moment and deflection along the length of the beam: 1 – distribution of bending moment along the beam length at the beginning and end of the creep process; 2 – distribution of deflection along the beam length at the beginning and end of the creep process. Scheme “Hinge-Hinge”

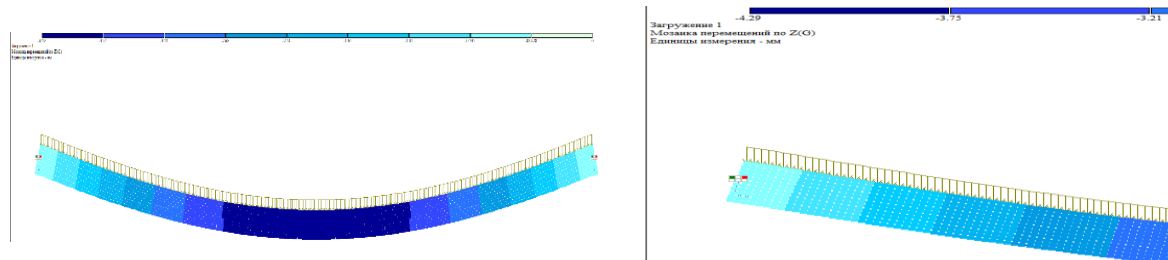


Рис. 8 - Распределение прогиба по длине балки и фрагмент мозаики в начале процесса ползучести. Схема «Шарнир-Шарнир». Расчет ПК ЛИРА САПР (Упругое решение)

Fig. 8 - Distribution of deflection along the beam length and a fragment of the mosaic at the beginning of the creep process. Scheme “Hinge-Hinge”. Calculation by PC LIRA SAPR (Elastic solution)

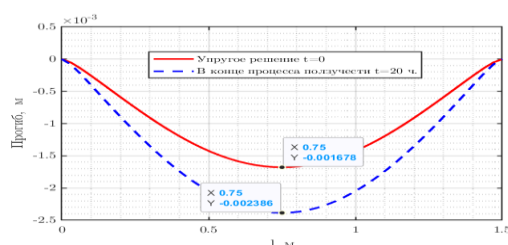


Рис. 9 - Распределение прогиба по длине балки в начале и в конце процесса ползучести.

Схема «Защемление - Защемление»

Fig. 9 - Distribution of deflection along the beam length at the beginning and end of the creep process.

"Clamping - Clamping" scheme

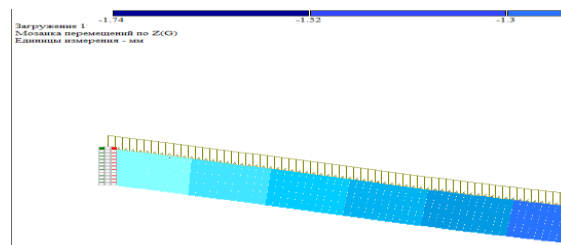


Рис. 10 - Распределение прогиба по длине балки и фрагмент мозаики в начале процесса ползучести. Схема «Защемление-Защемление».

Расчет ПК ЛИРА САПР (Упругое решение)

Fig. 10 - Distribution of deflection along the beam length and a fragment of the mosaic at the beginning of the creep process. Scheme – “Pinch-Pinch”. Calculation of PC LIRA SAPR (Elastic solution)

Вывод. Использование вариационно-разностного метода позволяет получить уточнённое решение, содержащее компоненты работы листов обшивки по балочной схеме, а также работу самого заполнителя на изгиб, что отсутствует в подходе, ориентированное на прямое использование метода конечных разностей [16]. Необходимо отметить, что в случае значительного отличия в значения модуля упругости металлической обшивки и полимерного заполнителя, приведённое уточнение весьма незначительно. Так, в схеме «шарнир-шарнир» учёт работы обшивки по балочной схеме и работы заполнителя на изгиб, снижают максимальные значения деформации с 4.226 мм до 4.211 мм.

Получение разрешающих дифференциальных уравнений 4 порядка позволяет использовать произвольные граничные условия, в том числе «защемление-защемление».

Для оценки достоверности полученных результатов в упругой постановке выполнено сравнение решения с программным комплексом Лира САПР. Расхождение в случае постановки граничных условий «шарнир-шарнир», полученного при решении в ПК Лира, с авторским решением, не превышает 0,4 %; в случае граничных условий «защемление-защемление» — расхождение не превышает 3,7 %. Разница объясняется тем, что моделирование в ПК Лира САПР было выполнено при помощи четырехугольных конечных элементов (балка «разбита» на 250 КЭ по длине и 10 КЭ по высоте), металлическая обшивка была представлена стержневыми конечными элементами.

Библиографический список:

1. Seydel E. Shear buckling of corrugated plates. *Jahrbuch die Deutschen Versuchsanstalt fur Luftfahrt*. 1931;9: 233–245.
2. Zheng Ye., Berdichevsky V.L., Wenbin Yu. An equivalent classical plate model of corrugated structures. *International Journal of Solids and Structures*. 2014;51: 2073–2083
3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1496. Лукин А.О. Определение прогибов балок с гофрированной стенкой с учетом сдвиговых деформаций//Инженерный вестник Дона, 2013, № 1
4. Турусов Р.А., Маневич Л.И. Метод контактного слоя в адгезионной механике. одномерные задачи. Сдвиг соединения внахлестку//Клеи, герметики. технологии.2009. № 6. С. 2-12.
5. Turusov R.A., Kuperman A., Andreev V.I. Determining the true strength of the material of fiberglass thick rings when stretched with half-disks. *Advanced materials research*.2015;1(102):155-159.
6. Языев Б.М., Андреев В.И., Турусов Р.А. Некоторые задачи и методы механики макронеоднородной упругой среды. ростов-н/д: РГСУ, 2009.
7. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.:Машиностроение, 1980. 375 с.
8. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. м.: Наука,1970. 482 с.
9. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с
10. Лапина, А.П. Совершенствование энергетического метода в расчетах балок на устойчивость плоской формы изгиба [Текст] / А.П. Лапина, А.С. Чепурненко, И.М. Зотов, Б.М. Языев // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2019. – № 4 (77). – С. 5-16.
11. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.
12. Юсупов А.К., Муселемов Х.М., Вишталов Р.И. Оптимизация параметров конструкций путем применения сталей различной прочности // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024;51(2):232-240.
13. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: Учеб. пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.
14. Метод конечных элементов в механике твердых тел/ А.С. Сахаров, В.Н. Кислооккий, В.В. Киричевский и др.; Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища шк., 1982. – 480 с. .
15. Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the mechanics and physics of solids*. 2008;56(12):3379-3391.
16. Чепурненко А.С., Чепурненко В.С., Савченко А.А. Расчет трехслойной балки с учетом ползучести среднего слоя // Молодой исследователь Дону. 2017. № 4(7). С. 102-106.

References:

1. Seydel E. Shear buckling of corrugated plates. *Jahrbuch die Deutschen Versuchsanstalt fur Luftfahrt*. 1931;9: 233–245.

2. Zheng Ye., Berdichevsky V.L., Wenbin Yu. An equivalent classical plate model of corrugated structures. *International Journal of Solids and Structures*. 2014;51: 2073–2083
3. URL:ivdon.ru/magazine/archive/nly2013/1496. Lukin A.O. Determination of deflections of beams with a corrugated wall taking into account shear deformations. *Engineering Bulletin of the Don*, 2013;1. (In Russ)
4. Turusov R.A., Manevich L.I. Contact layer method in adhesive mechanics. One-dimensional problems. Shear of overlap joint. *Adhesives. sealants. technologies*. 2009; 6: 2-12. (In Russ)
5. Turusov R.A., Kuperman A., Andreev V.I. Determining the true strength of the material of fiberglass thick rings when stretched with half-disks. *Advanced materials research*. 2015;1(102):155-159.
6. Yazyev B.M., Andreev V.I., Turusov R.A. Some problems and methods of mechanics of macroinhomogeneous elastic medium. Rostov-n/d: RSSU, 2009. (In Russ)
7. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayer structures. M.: Mashinostroyeniye, 1980:375(In Russ)
8. Rabinovich A.L. Introduction to the Mechanics of Reinforced Polymers. M.: Nauka, 1970: 482. (In Russ)
9. Rzhantsyn A.R. Creep Theory. - M.: Stroyizdat, 1968: 416. (In Russ)
10. Lapina, A.P. Improving the Energy Method in Calculating Beams for Stability of Plane Bending [Text] / A.P. Lapina, A.S. Chepurnenko, I.M. Zotov, B.M. Yazyev. *Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture*. 2019; 4 (77): 5-16. (In Russ)
11. Lukash P.A. Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Stroyizdat, 1978;208.
12. Yusupov A.K., Muselemov H.M., Vishtalov R.I. Optimization of Structural Parameters by Using Steels of Different Strengths. *Herald of the Daghestan State Technical University. Technical sciences*. 2024; 51(2):232-240. (In Russ)
13. Maslennikov A.M. Calculation of Building Structures by Numerical Methods: Textbook. manual. – Leningrad: Publishing House of Leningrad University, 1987:224. (In Russ)
14. Finite Element Method in Solid Mechanics. A.S. Sakharov, V.N. Kislooky, V.V. Kirichevsky et al.; Under the general editorship of A.S. Sakharov and I. Altenbach. Kyiv: Vishcha shk. 1982:480. (In Russ)
15. Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the mechanics and physics of solids*. 2008;56(12):3379-3391.
16. Chepurnenko A.S., Chepurnenko V.S., Savchenko A.A. Calculation of a three-layer beam taking into account the creep of the middle layer. *Young researcher Don*. 2017; 4(7):102-106. (In Russ)

Сведения об авторах:

Языев Батыр Меретович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительной механики и теории сооружений; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0002-5205-1446

Литвинов Степан Викторович, доцент, доцент кафедры строительной механики и теории сооружений; litvstev@yandex.ru; ORCID 0000-0001-5729-1425;

Виноградова Елена Владимировна, кандидат технических наук доцент, доцент кафедры технологии строительства и конструкционных материалов; alenkavv@yandex.ru;

Магомедов Марсель Айдемирович, аспирант кафедры строительной механики; marsmag05@ya.ru. ORCID 0000-0001-5517-919X

Information about authors:

Batyr M. Yazyev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0002-5205-1446

Stepan V. Litvinov, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; ps62@yandex.ru ; ORCID 0000-0001-5729-1425,

Elena V. Vinogradova, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department of Construction Technology and Structural Materials; alenkavv@yandex.ru,

Marcel A. Magomedov, Postgraduate, Department of Structural Mechanics; marsmag05@ya.ru; ORCID 0000-0001-5517-919X;

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 29.10.2024.

Одобрена после рецензирования/Revised 30.11.2024.

Принята в печать/Accepted for publication 16.01.2025.