

**СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА**  
**BUILDING AND ARCHITECTURE**

УДК 624.04

DOI: 10.21822/2073-6185-2025-52-1-227- 241



Оригинальная статья /Original article

**Расчетные модели плит с односторонними связями**

**А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Р.И. Вишталов**

Дагестанский государственный технический университет,  
367015, г. Махачкала, пр. И.Шамиля,70, Россия

**Резюме. Цель.** Целью исследования является определение особенности работы пластинчатых конструкций, обладающих односторонними связями. Рассматриваются вопросы, которые позволяют строить расчетные модели плит на дискретных опорах и сплошных массивах с односторонними связями, а также приводятся алгоритмы, которые позволяют анализировать работу пластинчатых конструкций (двумерных конструкций в плане). **Метод.** Построены аналитические и графические зависимости между перемещениями плит и реакциями их опор. Используются свойства обобщённых функций, которые позволяют описывать нелинейности, проявляющиеся при деформациях конструкций. Приведены дифференциальные уравнения поперечного изгиба плит, учитывающие указанные выше особенности работы опор. Излагаются методы решения этих уравнений. **Результат.** Представленные конструктивные и расчётные схемы позволяют правильно учитывать работу опор пластинчатых конструкций, получать на этом основании более точные значения прогибов и внутренних усилий в сечениях, что обеспечивает необходимую надёжность работы конструкции. Результаты приводятся в виде аналитических выражений, графиков и таблиц. **Вывод.** Разработаны конструктивные и расчётные схемы пластинчатых конструкций, обладающих особенностями работы опор с односторонними связями. Сформулированы рекомендации, которые могут быть использованы при проектировании реальных пластинчатых конструкций с односторонними связями.

**Ключевые слова:** плиты, опоры, односторонние связи, нелинейности, обобщённые функции, включающиеся и выключающиеся связи, дифференциальные уравнения, поперечный изгиб, внутренние усилия, прогибы, перемещения

**Для цитирования:** А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Р.И. Вишталов. Расчетные модели плит с односторонними связями. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(1):227-241. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-1-227-241

**Calculation models of slabs with one-way connections**

**A.K. Yusupov, Kh.M. Muselemov, R.I. Vishtalov**

Daghestan State Technical University,  
70 I. Shamil Ave., Makhachkala 367015, Russia

**Abstract. Objective.** The aim of the study is to determine the performance characteristics of plate structures with one-sided connections. The paper considers issues that allow constructing calculation models of slabs on discrete supports and solid arrays with one-sided connections, and provides algorithms that allow analyzing the performance of plate structures (two-dimensional structures in plan). **Method.** Analytical and graphical dependencies between slab displacements and their support reactions are constructed. Properties of generalized functions are used to describe nonlinearities that occur during structural deformations. Differential equations for transverse bending of slabs are presented, taking into account the above-mentioned performance characteristics of supports. Methods for solving these equations are presented. **Result.**

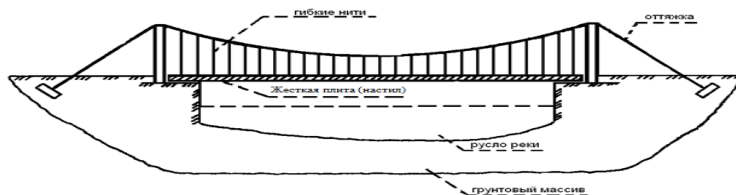
The presented design and calculation schemes allow correctly taking into account the performance of plate structure supports, and obtaining more accurate values of deflections and internal forces in sections on this basis, which ensures the required reliability of the structure. The results are presented in the form of analytical expressions, graphs, and tables. **Conclusion.** Design and calculation schemes of plate structures with the features of the work of supports with one-sided connections have been developed. Recommendations have been formulated that can be used in the design of real plate structures with one-sided connections.

**Keywords:** slabs, supports, one-sided connections, nonlinearities, generalized functions, switching on and off connections, differential equations, transverse bending, internal forces, deflections, displacements

**For citation:** A.K. Yusupov, Kh.M. Muselemov, R.I. Vishtalov. Calculation models of slabs with one-way connections. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(1): 227-241. (In Russ) DOI:10.21822 /2073-6185-2025-52-1-227-241

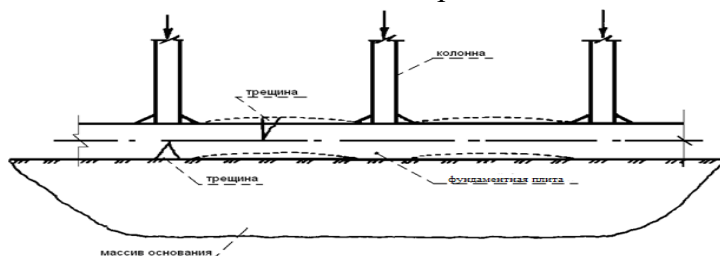
**Введение.** Модели плит на дискретных опорах и сплошных основаниях используются не только при наличии подстилающей конструкции массива, но даже, когда такого массива вообще нет. В этом случае плиты принимаются за модель, которая позволяет проводить исследования работы реальной конструкции и прогнозировать поведение проектируемого объекта в процессе его эксплуатации.

На рис.1 показана конструктивная схема висячего моста. Жесткая плита (настил) подвешена на гибких нитях. При этом работа жесткой плиты может быть смоделирована плитой на упругом основании. Упругим основанием для плиты здесь служат вертикальные гибкие нити.



**Рис. 1 - Конструктивная схема висячего моста**  
**Fig. 1 - Structural diagram of a suspension bridge**

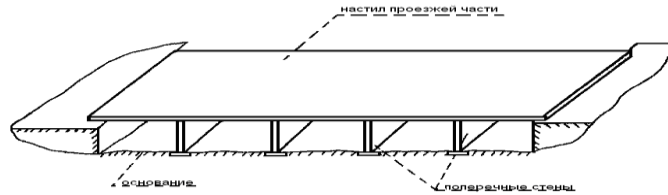
Вертикальные гибкие нити оказывают сопротивление прогибам настила моста, когда прогибы положительны, при отрицательных прогибах настила (прогибы вверх) гибкие нити не работают. Таким образом система вертикальных гибких нитей обладает свойством односторонних связей. На рис. 2 дана конструктивная схема разреза фундаментной плиты, лежащей на упругом основании. Здесь, когда прогибы плиты направлены вверх, упругий подстилающий массив не оказывает сопротивления перемещениям. Упругий массив работает исключительно, когда прогибы плиты направлены вниз. Другими словами, здесь упругий массив обладает свойством односторонних связей.



**Рис. 2 - Конструктивная схема разреза фундаментной плиты**  
**Fig. 2 - Structural diagram of the foundation slab section**

На рис.3 изображена конструктивная схема настила проезжей части моста. Настил представляет собой плиту, свободно лежащую на поперечных стенах. При этом поперечные стены работают, когда настил получает перемещения вниз. А при перемещениях

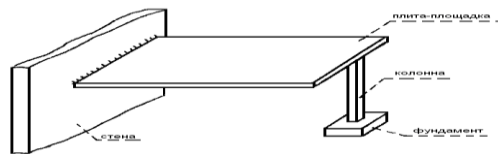
вверх стены не работают. То есть, стеновые опоры обладают свойством односторонних связей.



**Рис. 3 - Конструктивная схема настила проезжей части моста**

**Fig. 3 - Structural diagram of the decking of the roadway of the bridge**

На рис.4 приведена конструктивная схема плиты площадки, которая опирается одной стороной на стену, а другой на отдельно стоящую колонну. Колонна оказывает сопротивление прогибам плиты, когда плита получает перемещения вниз. А в случае перемещений, направленных вверх, колонна не работает. Опора обладает свойствами односторонних связей.



**Рис. 4 - Конструктивная схема плиты площадки**

**Fig. 4 - Structural diagram of the platform slab**

Приведенные здесь примеры свидетельствуют о том, что плиты на дискретных опорах или сплошных массивах, в первую очередь, следует рассматривать как расчетные модели, которые могут быть использованы для исследования работы контактных систем [7, 8].

**Постановка задачи.** При расчёте и компоновке пластинчатых конструкций их опоры рассматриваются как линейные системы. Для описания особенностей работы этих опор пользуются моделью Винклера. Работа опор пластинчатых конструкций далеко не всегда подчиняется линейным зависимостям: эти зависимости существенно нелинейны и для их описания необходимо пользоваться свойствами обобщённых функций, которые позволяют учитывать дискретность опор и скачкообразные изменения их реакций. Обычные функции не позволяют проделать эти процедуры.

В статье приведены алгоритмы с использованием обобщённых функций, что позволяет вводить в дифференциальные уравнения поперечного изгиба плит соответствующие звенья. При этом, уравнения приспособляются к особенностям работы опор плит с односторонними связями. Всё это даёт возможность построить решения дифференциальных уравнений, определить значения перемещений и внутренних усилий в сечениях плит с учётом особенностей работы их опор, о которых говорилось выше.

**Методы исследования.** Воспользуемся уравнением поперечного изгиба ортотропной плиты [3,6,7].

$$\tilde{L} W_3 = q_3 + r_3, \quad (1)$$

которое в развернутом виде запишется так:

$$\begin{aligned} T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \\ - \sum_j \left[ \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} \cdot d_{1j} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2} \cdot d_{2j} - W_3 \cdot r_{3j} \right] \times \\ \times \delta(x_1 - \xi_j) \cdot \delta(x_2 - \eta_j) = q_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:  $j = 1, 2, 3, \dots$  пробегает по всем дискретным опорам;  $d_{1j}, d_{2j}, r_{3j}$  – коэффициенты жесткости  $j$ -ой опоры,  $\delta$  дельта-функция;

$\xi_j, \eta_j$  – координаты в плане  $j$ -ой – дискретной опоры  $\xi_j$  – по оси  $x_1$ ,  $\eta_j$  по оси  $x_2$ ;  $W_3 = W_3(x_1, x_2)$  – функция прогибов;  $T_1^0, T_2^0$  – параметры жесткости ортотропной плиты (определение этих коэффициентов дано в [3];  $q_3(x_1, x_2)$  – функция распределения поперечной нагрузки по площади плиты.

Если реакции дискретных опор нелинейно зависят от функции перемещений или ее производных, то уравнение (2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \\ - \sum_j \left[ f_{1j} \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} \right) + f_{2j} \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2} \right) - \right. \\ \left. - f_{3j}(W_3) \right] \cdot \delta(x_1 - \xi_j) \cdot \delta(x_2 - \eta_j) = q_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь:  $f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}$  нелинейные функции, описывающие связь между реакциями и перемещениями (или их производными)  $j$ -ой опоры; причем  $f_{1j}$  – при поворотах сечения плиты в направлении оси  $x_1$  (то есть в вертикальной плоскости, проходящей по оси  $x_1$ );  $f_{2j}$  – при поворотах сечения плиты в направлении оси  $x_2$ ;  $f_{3j}$  при перемещениях плиты по оси  $x_3$  (при поперечных перемещениях).

Таким образом, (в общем случае) каждая  $j$ -ая дискретная опора имеет свою нелинейность, которая выражается тремя функциями  $f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}$  [16].

Этими функциями могут описываться выпуклые, вогнутые, ломанные, скачкообразные нелинейности, а также особенности работы опор с односторонними, включающимися, выключающимися связями [1]. В частности, когда  $f_{1j} = f_{2j} = 0$ , а по вертикальной оси опоры плиты обладают свойством односторонних связей:

$$f_{3j} = C_j \cdot e[w(x_1, x_2)], \quad (3,a)$$

где  $C_j$  – коэффициент жесткости  $j$ -ой опоры,  $e$  – единичная функция (функция - скачка).

Теперь уравнение (3) в случае опор с односторонними связями, с учетом равенства (3,a), записывается так:

$$\begin{aligned} T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ + \sum_j C_j \cdot e[w(x_1, x_2)] \cdot \delta(x_1 - \xi_j) \cdot \delta(x_2 - \eta_j) = q_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3,b)$$

**Обсуждение результатов.** Уравнение (3,б) записано для случая опорной плиты, когда параметры ее жесткости  $T_1^0, T_2^0$  считаются постоянными, не зависящими от координат  $x_1, x_2$ . При развитии пластических деформаций, раскрытии трещин, нерегулярном по площади армировании параметры  $T_1^0, T_2^0$  будут зависеть от координат  $x_1, x_2$ , то есть будут функциями переменных  $x_1, x_2$ . В этом случае параметры жесткости обозначаются так:  $\bar{T}_1 = \bar{T}_1(x_1, x_2), \bar{T}_2 = \bar{T}_2(x_1, x_2)$ .

Соответствующее дифференциальное уравнение поперечного изгиба плиты на дискретных опорах с односторонними связями можно представить в виде:

$$L^*W_3 + \sum_j C_j \cdot e[w(x_1, x_2)] \cdot \delta(x_1 - \xi_j) \cdot \delta(x_2 - \eta_j) = q_3(x_1, x_2) \quad (4)$$

Здесь:  $W_3 = W_3(x_1, x_2)$ ;  $L^*W_3$  – оператор, который определяется с учетом того, что жесткости плиты – переменные по координатам. Этот оператор имеет сложный вид[6,19]. В статье этот оператор не приводим.

При  $T_i = T_i^0 = const$ ,  $B_i = B_i^0 = const$ , оператор, входящий в уравнение (3,б), становится бигармоническим.

При  $|T_1^0 - T_2^0| \leq 2$ ,  $T_1^0 + T_2^0 \approx \sqrt{2} \cdot \sqrt{T_1^0 \cdot T_2^0}$  Этот оператор принимает вид оператора Губера [3, 7]. Рассмотрим плиты, показанные на рис. 5-7. Дискретные опоры поместим в плане звездочками, а координаты  $j$ -ой опоры обозначим через  $\xi_j, \eta_j$  (рис. 5а, 6а, 7а). На рис.5а плита оперта по прямоугольному контуру, то есть имеет отверстие в виде треугольника; опирание может быть как по внешнему, так и по внутреннему контуру, или по одному из контуров.

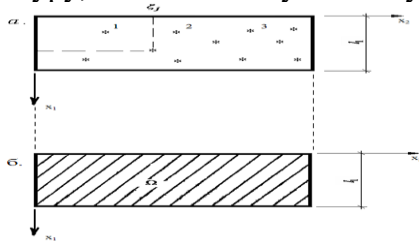


Рис. 5 - Схема плиты в заданной и основной системах

Fig. 5 - Scheme of the plate in the given and main systems

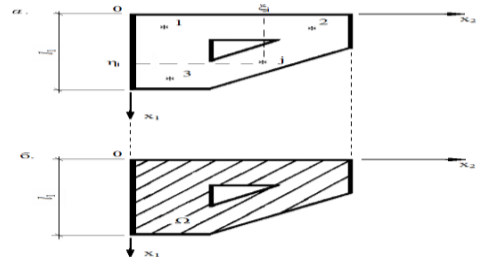


Рис. 6 - Схема плиты в заданной и основной системах

Fig. 6 - Scheme of the plate in the given and main systems

На рис. 7а плита имеет криволинейный контур; опирание по контуру – произвольное. На эти плиты действует поперечная нагрузка  $q(x_1, x_2)$ . С целью построения алгоритма, позволяющего исследовать напряженно-деформированное состояние рассматриваемых плит, перейдем от заданных систем к основным. При этом заданными системами будем считать рассматриваемые плиты (рис. 5а, 6а, 7а), для которых указаны нагрузки  $q(x_1, x_2)$ ; даны координаты  $\xi_j, \eta_j$  опоры с номером  $j$ ; определены соответствующие коэффициенты жесткости опор  $d_{1j}, d_{2j}, r_{3j}$ ; известны условия крепления плиты по контуру (по внешнему и внутреннему); вычислены параметры жесткости плиты  $T_1^0, T_2^0$ . Соответствующие основные системы показаны на рис. 5б, 6б, 7б. Основная система отличается от заданной только тем, что здесь отсутствуют дискретные опоры, а все остальные условия остаются без изменения.

Для решения приведенных выше дифференциальных уравнений можно воспользоваться функцией Грина. Функцию Грина для плит в основной системе (где уже нет дискретных опор), далее мы предполагаем известной. Функция  $G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2,)$  для плиты в основной системе считается известной. Это значит, что функция Грина  $G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2,)$  удовлетворяет уравнению (при  $G \equiv W_3$ ):

$$T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \delta(x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2).$$

и условиям крепления на внешнем контуре плиты. Если это так, то дифференциальное уравнение (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 & W_3(x_1, x_2) + \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \times \\
 & \times \sum_j \left[ - \frac{\partial^2 W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_1^2} \cdot d_{1j} - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_2^2} \cdot d_{2j} + W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right] \times \\
 & \times \delta(\bar{x}_1 - \xi_j) \cdot \delta(\bar{x}_2 - \eta_j) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = \\
 & = \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega$  — область плиты в основной системе (на рисунках область  $\Omega$  заштрихована). Пользуясь фильтрующими свойствами дельта-функции, уравнение (5) можно упростить:

$$\begin{aligned}
 & W_3(x_1, x_2) c + \sum_j G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot \left[ - \frac{\partial^2 W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_1^2} \cdot d_{1j} - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_2^2} \cdot d_{2j} + W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot r_{3j} \right]_{x_1 = \xi_j, x_2 = \eta_j} = W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad (6)
 \end{aligned}$$

где

$$W_3(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \quad (7)$$

Если ввести обозначения типа

$$\left. \frac{\partial^2 W_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_1^2} \right|_{x_1 = \xi_j, x_2 = \eta_j} = \frac{\partial^2 W_3(\xi_j, \eta_j)}{\partial x_1^2}, \quad (8)$$

то уравнение (6) можно представить так:

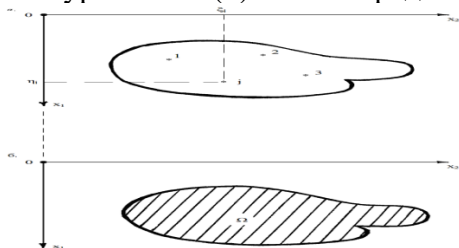


Рис. 7 - Схема плиты в заданной и основной системах

Fig. 7 - Scheme of the plate in the given and main systems

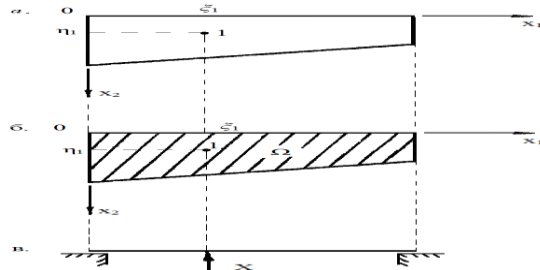


Рис. 8 - Схема плиты в заданной и основной системах

Fig. 8 - Scheme of the plate in the given and main systems

$$\begin{aligned}
 & W_3(x_1, x_2) + \sum_j G(x_1, \xi_j, x_2, \eta_j) \times \\
 & \times \left[ - \frac{\partial^2 W_3(\xi_j, \eta_j)}{\partial x_1^2} \cdot d_{1j} - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 W_3(\xi_j, \eta_j)}{\partial x_2^2} \cdot d_{2j} + W_3(\xi_j, \eta_j) \cdot r_{3j} \right] = \bar{W}_3(x_1, x_2), \quad (9)
 \end{aligned}$$

где  $\bar{W}_3(x_1, x_2)$  - функция (7).

Записывая последнее уравнение в итерационном режиме, имеем:

$$W_3^{(v+1)}(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2) + \sum_j G(x_1, \xi_j, x_2, \eta_j) \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial^2 W_3^{(\nu)}(\xi_j, \eta_j)}{\partial x_1^2} \cdot d_{1j} + \frac{\partial^2 W_3^{(\nu)}(\xi_j, \eta_j)}{\partial x_2^2} \cdot d_{2j} - W_3^{(\nu)}(\xi_j, \eta_j) \cdot r_{3j} \right], \quad (10)$$

где  $\nu = 0, 1, 2, 3 \dots$  - шаг последовательных приближений.

Нулевой шаг: при  $\nu = 0$  можно принять  $W_3^{(0)} = 0$ . Тогда из (10)

$$\text{следует, что} \quad W_3^{(1)}(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2), \quad (11)$$

где  $\bar{W}_3$  - функция (7) - функция прогибов плиты в основной системе.

Первый шаг: при  $\nu = 1$  из равенства (10) находим:

$$W_3^{(2)}(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2) + \sum_j G(x_1, \xi_j, x_2, \eta_j) \times \left[ \frac{\partial^2 W_3^{(1)}(\xi_j, \eta_j)}{\partial x_1^2} \cdot d_{1j} + \frac{\partial^2 W_3^{(1)}(\xi_j, \eta_j)}{\partial x_2^2} \cdot d_{2j} - W_3^{(1)}(\xi_j, \eta_j) \cdot r_{3j} \right]. \quad (12)$$

Здесь значения производных функций прогибов вычисляются с учетом обозначений типа (8) при известной функции (11).

Следующий шаг итераций:  $\nu = 2$ . Располагая функцией прогибов  $W_3^{(2)}$  (12), вычисленной в предыдущем приближении, из выражения (10) можно найти прогибы  $W_3^{(3)}(x_1, x_2)$ . Продолжая последовательные приближения нетрудно обеспечить любую необходимую точность. Итерационный процесс сходится очень быстро. Для практических расчетов можно ограничиться функцией прогибов

$$W_3(x_1, x_2) \approx W_3^{(3)}(x_1, x_2).$$

Внутренние усилия вычисляются по формулам [6,10,12,19]:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\bar{T}_1 \cdot \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} + \mu_\delta \cdot \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2} \right); \\ M_2 &= -\bar{T}_2 \cdot \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2} + \mu_\delta \cdot \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} \right); \\ M_{21} &= -M_{12} = \frac{1-\mu_\delta}{2} \cdot (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) \cdot \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ Q_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \bar{T}_1 \cdot \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} + \mu_\delta \cdot \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2} \right) \right] - \frac{1-\mu_\delta}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) \cdot \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right]; \\ Q_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \bar{T}_2 \cdot \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2} + \mu_\delta \cdot \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} \right) \right] - \frac{1-\mu_\delta}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) \cdot \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right]; \\ N_1 &= \bar{B}_1 \cdot \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \mu_\delta \cdot \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right); \\ N_2 &= \bar{B}_2 \cdot \left( \frac{\partial W_2}{\partial x_2} + \mu_\delta \cdot \frac{\partial W_1}{\partial x_1} \right); \\ T_{21} &= T_{12} = \frac{1-\mu_\delta}{2} \cdot \left( \bar{B}_1 \cdot \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \bar{B}_2 \cdot \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (12 \text{ a})$$

Эту же задачу можно решить и иначе. Итерационный процесс (10), хотя и обеспечивают любую необходимую для расчетов точность, все же считается приближенным. Рассмотрим метод, который часто применяется при исследовании напряженно-деформированного состояния балок. Рассмотрим плиту (рис.8 а), опертую по трапециевидному контуру. Поперечную нагрузку обозначим через  $q(x_1, x_2)$ . Плита имеет только одну дискретную упруго-податливую опору с коэффициентом жесткости

$$d_{11} = d_{21} = 0, \quad \tau_{31} = 0.$$

Перейдем к основной системе (рис.8 б), в которой дискретная опора уже отсутствует. Заменяем реакцию опоры неизвестной  $X_1$  (рис.8 в – разрез плиты). Тогда дифференциальное уравнение (2) в основной системе (рис.8 б, 8 в) запишем в виде

$$T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} =$$

$$= q(x_1, x_2) - X_1 \cdot \delta(x_1 - \xi_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_1),$$

где  $\xi_1, \eta_1$  - координаты опоры в основной системе.

Как и ранее, функцию Грина  $G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$  для плиты в основной системе считаем известной: она строится, с учетом граничных условий плиты на контуре, по известным алгоритмам, [2,4]. Тогда предыдущее уравнение можем представить так:

$$W_3(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \times$$

$$\times [q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - X_1 \cdot \delta(\bar{x}_1 - \xi_1) \cdot \delta(\bar{x}_2 - \eta_1)] d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \quad (13)$$

$$\text{или} \quad W_3(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2) - X_1 \cdot G(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1), \quad (14)$$

$$\text{где} \quad \bar{W}_3(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \quad (15)$$

Для определения неизвестного  $X_1$ , входящего в выражение (14), запишем условие работы дискретной опоры:  $W_3(\xi_1, \eta_1) = \frac{X_1}{r_{31}}. \quad (16)$

Подставляя в последнее равенство функцию (14), получаем

$$W_3(\xi_1, \eta_1) - X_1 \cdot G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1) = \frac{X_1}{r_{31}}. \quad (17)$$

Отсюда

$$X_1 = \frac{W_3(\xi_1, \eta_1)}{G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1) + \frac{1}{r_{31}}}. \quad (18)$$

Внося найденное значение неизвестного (18) в правую часть равенства (14), окончательно получаем

$$W_3(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2) -$$

$$- \frac{W_3(\xi_1, \eta_1)}{G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1) + \frac{1}{r_{31}}} \cdot G(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1).$$

где  $\xi_1, \eta_1$  - координаты дискретной опоры в основной системе (рис.8 б).

При  $r_{31} \rightarrow \infty$  упруго-податливая опора становится абсолютно жесткой, а функция (19) принимает вид

$$W_3(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2) -$$

$$- \frac{\bar{W}_3(\xi_1, \eta_1)}{G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1)} \cdot G(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1).$$

При  $r_{31} \rightarrow 0$  упруго-податливая опора «исчезает», то есть опора не оказывает сопротивления прогибам плиты. Для этого случая выражение (19) записывается так:

$$W_3(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2) - \lim_{r_{31} \rightarrow 0} \frac{\bar{W}_3(\xi_1, \eta_1)}{G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1)} \cdot G(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1) =$$

$$= \bar{W}_3(x_1, x_2) - \frac{\bar{W}_3(\xi_1, \eta_1)}{G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1) + \infty} \cdot G(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1) = \bar{W}_3(x_1, x_2). \quad (20)$$

Мы получили функцию прогибов (21) плиты в основной системе, когда отсутствует дискретная опора. Если в подынтегральном выражении (15) принять

$$q(x_1, x_2) = \delta(x_1 - \tilde{x}_1) \cdot \delta(x_2 - \tilde{x}_2),$$

то функция прогибов (19) «перейдет» в функцию Грина  $\overline{G}(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$  для плиты с дискретной опорой:

$$d_{11} = d_{21} = 0, \quad r_{31} \neq 0 - \text{предыдущая задача.}$$

В самом деле, заменив нагрузку  $q$  дельта-функцией, из (15) получим:

$$\begin{aligned} \overline{W}_3(x_1, x_2) &= \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot \delta(\tilde{x}_1 - \bar{x}_1) \cdot \delta(\tilde{x}_2 - \bar{x}_2) \times \\ &\times d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 = G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Подставив последнюю функцию в равенство (19), будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{W}_3(x_1, x_2) &= \overline{G}(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) = G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) - \\ &- \frac{G(\xi_1, \bar{x}_1, \eta_1, \bar{x}_2)}{G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1) + \frac{1}{r_{31}}} \cdot G(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Построенная функция Грина (22) соответствует плите с дискретной опорой:

$$d_{11} = d_{21} = 0, \quad r_{31} \neq 0.$$

Таким образом, мы получили новую функцию Грина  $\overline{G}$  на базе «старой»  $G$ . Последняя соответствует плите, опертой по контуру (в основной системе, рис. 8 б), когда отсутствует дискретная опора. Такой способ построения функции называется рекуррентным: от простого случая последовательно переходим к сложному.

Мы рассмотрели простейший случай. Усложним задачу. Введем дополнительно еще одну связь для дискретной опоры. Коэффициенты жесткости, следующие:  $d_{11} = d_{21} = 0$ ,  $r_{31} \neq 0$ . Координаты опоры:  $\xi_1, \eta_1$  (рис.8). Воспользуемся функцией Грина (22). Связи дискретной опоры заменим соответствующими реакциями. Тогда поперечная нагрузка

$$\begin{aligned} \bar{q}(x_1, x_2) &= q(x_1, x_2) - X_1 \cdot \delta(x_1 - \xi_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_1) + \\ &+ X_2 \cdot \delta(x_1 - \xi_1) \cdot \delta'_{x_2}(x_2 - \eta_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь:  $X_1$  – реакция дискретной опоры (сила) при прогибах плиты;  $X_2$  – реакция дискретной опоры (момент) при поворотах сечения плиты по оси  $x_2$  (на рис.8 в эта реакция не показана). Знаки при неизвестных  $X_1, X_2$  можно принять любые. Знаки  $X_1$  мы сохранили здесь как в предыдущей задаче. Теперь уравнение изгиба плиты можем записать так:

$$\begin{aligned} T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \cdot \frac{\partial^4 W_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ + X_1 \cdot \delta(x_1 - \xi_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_1) = \\ = q(x_1, x_2) + X_2 \cdot \delta(x_1 - \xi_1) \cdot \delta'_{x_2}(x_2 - \eta_1), \end{aligned} \quad (24)$$

где функция Грина  $\overline{G}$  для оператора, находящегося в левой части равенства, определена выражение (22).

Тогда

$$\begin{aligned} \overline{W}_3(x_1, x_2) &= \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \times \\ &\times [q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + X_2 \cdot \delta(\bar{x}_1 - \xi_1) \cdot \delta'_{x_2}(\bar{x}_2 - \eta_1)] d\bar{x}_1 d\bar{x}_2; \end{aligned} \quad (25)$$

или

$$W_3(x_1, x_2) = \tilde{W}_3(x_1, x_2) + X_2 \frac{G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_2} \bigg|_{\substack{\bar{x}_1 = \xi_1 \\ \bar{x}_2 = \eta_1}}, \quad (25 \text{ a})$$

$$\text{где } \tilde{W}_3(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} \bar{G}(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2.$$

Если ввести обозначения типа (8)

$$\frac{\partial \bar{G}(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_2} \bigg|_{\substack{\bar{x}_1 = \xi_1 \\ \bar{x}_2 = \eta_1}} = \frac{\partial \bar{G}(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1)}{\partial \bar{x}_2}, \quad (26)$$

то функцию прогибов (25) можно представить в виде

$$W_3(x_1, x_2) = \tilde{W}_3(x_1, x_2) + X_2 \cdot \frac{G(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1)}{\partial \bar{x}_2}. \quad (27)$$

Для определения неизвестного  $X_2$  запишем условие работы дискретной опоры при ее повороте по оси  $x_2$ :

$$\frac{\partial W_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{\bar{x}_1 = \xi_1 \\ \bar{x}_2 = \eta_1}} = \frac{X_2}{d_{21}}. \quad (28)$$

Подставляя функцию (27) в равенство (28), получаем уравнение

$$\frac{\partial \tilde{W}_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{\bar{x}_1 = \xi_1 \\ \bar{x}_2 = \eta_1}} + X_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{G}(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_2 \partial x_2} \bigg|_{\substack{\bar{x}_1 = \xi_1 \\ \bar{x}_2 = \eta_1 \\ x_2 = \eta_1 \\ x_1 = \xi_1}} = \frac{X_2}{d_{21}}.$$

Если ввести обозначения в виде (26), то предыдущее уравнение можно представить компактно:

$$\frac{\partial \tilde{W}_3(\xi_1, \eta_1)}{\partial x_2} + X_2 \cdot \frac{\partial^2 G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1)}{\partial \bar{x}_2 \partial x_2} = \frac{X_2}{d_{21}}. \quad (29)$$

Отсюда

$$X_2 = - \frac{\frac{\partial \tilde{W}_3(\xi_1, \eta_1)}{\partial x_2}}{\frac{\partial^2 G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1)}{\partial \bar{x}_2 \partial x_2} + \frac{1}{d_{21}}}.$$

Внося найденное значение неравенства в равенство (27), окончательно имеем

$$W_3(x_1, x_2) = \tilde{W}_3(x_1, x_2) - \quad (30)$$

$$- \frac{\frac{\partial \tilde{W}_3(\xi_1, \eta_1)}{\partial x_2}}{\frac{1}{d_{21}} - \frac{\partial^2 G(\xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_1)}{\partial \bar{x}_2 \partial x_2}} \cdot \frac{\partial \bar{G}(x_1, \xi_1, x_2, \eta_1)}{\partial \bar{x}_2}.$$

Здесь:  $\bar{G} = \bar{G}(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$  – функция (22); производные прогибов  $\tilde{W}_3$  определяются на основе интеграла, например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{W}_3(\xi_1, \eta_1)}{\partial x_2} &= \frac{\partial \tilde{W}_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{\bar{x}_1 = \xi_1 \\ \bar{x}_2 = \eta_1}} = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\partial \bar{G}(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{\bar{x}_1 = \xi_1 \\ \bar{x}_2 = \eta_1}} \cdot q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \end{aligned} \quad (30 \text{ a})$$

Мы получили функцию прогибов (30) (в основной системе, рис.8б) ортотропной плиты, когда дискретная опора имеет коэффициенты жесткости:

$$d_{11} = 0, \quad d_{21} \neq 0, \quad r_{31} \neq 0.$$

Если в подынтегральном выражении (25 а) распределенную нагрузку  $q$  заменить дельта-функцией, то равенством (30) определится функция Грина, соответствующая плите с дискретной опорой, у которой

$$d_{11} = 0, \quad d_{21} \neq 0, \quad r_{31} \neq 0.$$

На основе этой новой функции Грина нетрудно построить следующую функцию для случая дискретной опоры с  $d_{11} \neq 0, \quad d_{21} \neq 0, \quad r_{31} \neq 0$ ; или для случая двух опор. При рекуррентном способе построения функции Грина, нам бывает достаточно каждый раз решать уравнение только с одним неизвестным (см. уравнения 17, 29). При использовании современных компьютеров задача решается и «в лоб», то есть в два этапа. На первом этапе строится функция Грина для ортотропной плиты с учетом ее условий крепления по внешнему и внутреннему контуру, в предположении отсутствия дискретных опор. На втором этапе такая плита принимается за основную систему. Затем, в основной системе, на базе уже известной функции Грина, решается задача с учетом сразу всех дискретных опор.

**Обсуждение результатов.** Ортотропная плита, изображенную на рис. 9, имеет в плане прямоугольный контур. Кроме этого параллельно оси  $x_1$  (рис. 9) имеются опоры в виде стен или пилонов:  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  – координаты опор (на рисунке эти опоры показаны пунктиром). На плиту действует поперечная нагрузка  $q(x_1, x_2)$ .

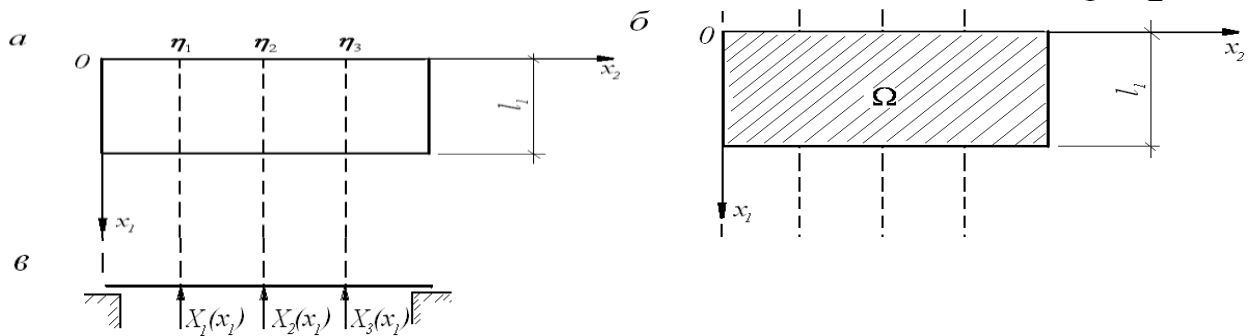


Рис. 9 - Плита на поперечных стенах с односторонними связями

Fig. 9 - Slab on transverse walls with one-sided ties

Дифференциальное уравнение поперечного изгиба ортотропной плиты записывается в виде:

$$\begin{aligned} T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 G^0}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 G^0}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \cdot \frac{\partial^4 G^0}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \\ = q(x_1, x_2) - X_1(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_1) - \\ - X_2(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_2) - X_3(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_3). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь  $X_1(x_1)$ ,  $X_2(x_1)$ ,  $X_3(x_1)$  – функции отпора, которые возникают вдоль пилонов. На рис. 9 б, 9 в приведена основная система (план и разрез плиты). В случае, когда поперечные стены обладают свойством односторонних связей, уравнение (31) принимает вид:

$$\begin{aligned} = q(x_1, x_2) - X_1(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_1) \cdot e[w(x_1, \eta_1)] - \\ - X_2(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_2) \cdot e[w(x_1, \eta_2)] - X_3(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_3) \cdot e[w(x_1, \eta_3)]. \end{aligned} \quad (31 \text{ а})$$

$$T_1^0 \cdot \frac{\partial^4 G^0}{\partial x_1^4} + T_2^0 \cdot \frac{\partial^4 G^0}{\partial x_2^4} + (T_1^0 + T_2^0) \cdot \frac{\partial^4 G^0}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} =$$

Далее введем функцию Грина  $G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$ , которая удовлетворяет условиям креп-

ления плиты по контуру в основной системе (где уже нет промежуточных стен, рис. 9 б). Тогда дифференциальное уравнение (31а) можем представить в интегральной форме:

$$W_3(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot [q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - [X_1(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_1) \cdot e[w(x_1, \eta_1)] + X_2(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_2) \cdot e[w(x_1, \eta_1)] + X_3(x_1) \cdot \delta(x_2 - \eta_3)] \cdot e[w(x_1, \eta_1)] d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \quad (32)$$

где  $\Omega$  — область плиты, рис. 9 б.

Если ввести обозначение

$$\bar{W}_3(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \cdot q(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \quad (33)$$

и раскрыть интегралы, то уравнение (32) можно записать в более удобном виде:

$$\begin{aligned} W_3(x_1, x_2) = \bar{W}_3(x_1, x_2) - \\ - \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \eta_1) \cdot X_1(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_1)] d\bar{x}_1 - \\ - \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \eta_2) \cdot X_2(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_2)] d\bar{x}_1 - \\ - \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \eta_3) \cdot X_3(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_3)] d\bar{x}_1. \end{aligned} \quad (33 \text{ а})$$

Здесь:  $G$  — функция Грина, которая для плиты в основной системе (рис. 9 б),  $l_1$  — размер плиты по оси  $x_1$ . Уравнение (33 а) решается методом итераций.

Далее запишем условия работы опор: предположим, что плита, опираясь на стены, может совершать повороты, но не может прогнуться на опорах. Поэтому вдоль стен (или пилонов) имеем

$$\left. \begin{aligned} W_3(x_1, \eta_1) &= 0, \\ W_3(x_1, \eta_2) &= 0, \\ W_3(x_1, \eta_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Подставляя в равенства (34) функцию прогибов (33 а), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_1, \eta_1) \cdot X_1(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_1)] d\bar{x}_1 + \\ + \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_1, \eta_2) \cdot X_2(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_2)] d\bar{x}_1 + \\ \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_1, \eta_3) \cdot X_3(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_3)] d\bar{x}_1 = \bar{W}_3(x_1, \eta_1); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_2, \eta_1) \cdot X_1(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_1)] d\bar{x}_1 + \\ + \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_2, \eta_2) \cdot X_2(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_2)] d\bar{x}_1 + \\ \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_2, \eta_3) \cdot X_3(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_3)] d\bar{x}_1 = \bar{W}_3(x_1, \eta_2); \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_3, \eta_1) \cdot X_1(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_1)] d\bar{x}_1 + \\ + \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_3, \eta_2) \cdot X_2(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_2)] d\bar{x}_1 + \\ \int_0^{l_1} G(x_1, \bar{x}_1, \eta_3, \eta_3) \cdot X_3(\bar{x}_1) e[W_3(\bar{x}_1, \eta_3)] d\bar{x}_1 = \bar{W}_3(x_1, \eta_3); \end{aligned} \quad (37)$$

Из системы трех линейных интегральных уравнений (35), (36), (37) определяются три неизвестные функции  $X_1(x_1)$ ,  $X_2(x_1)$ ,  $X_3(x_1)$ . Для решения этих уравнений можно применить различные методы. Если известна функция Грина

$G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$  или нетрудно ее представить в виде билинейного ряда, то удобно пользоваться методом вырожденных ядер. Когда функция Грина строится численными методами для плит, опертых по сложному контуру, то мы располагаем лишь массивом чисел в виде значений

$$G(z_i, z_j, y_i, y_j) = G(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2) \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = z_i \\ \bar{x}_1 = z_j \\ x_2 = y_i \\ \bar{x}_2 = y_j \end{array} \right. \quad (38)$$

где  $i, j = 1, 2, 3, 4 \dots$  - порядковые номера точек, которыми покрываются область плиты, включая контурные точки;  $z_i$  и  $y_i$  - координаты  $i$ -ой точки соответственно по оси  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 10).

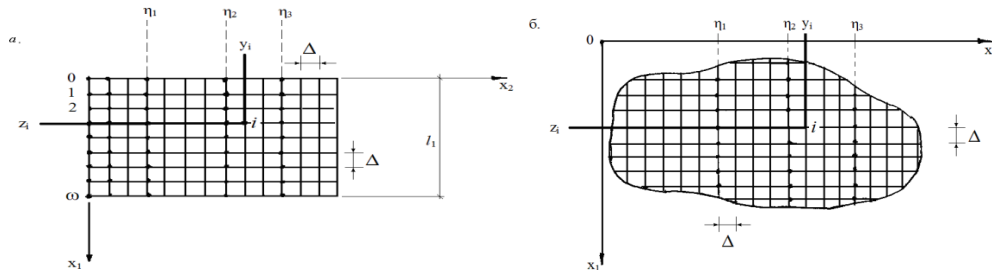


Рис. 10 - Координаты системы коллокаций  
 Fig. 10 - Coordinates of the collocation system

Воспользуемся методом коллокаций. В уравнениях (35), (36), (37) заменим знаки интегралов суммами, а дифференциал  $d\bar{x}_1$  - малым отрезком  $\Delta$  ( $\Delta$  - размер ячейки сетки; рис. 10). Тогда получим

$$\Delta \cdot \sum_j [G(z_i, z_j, \eta_1, \eta_1) \cdot X_1(z_j) + G(z_i, z_j, \eta_1, \eta_2) \cdot X_2(z_j) + G(z_i, z_j, \eta_1, \eta_3) \cdot X_3(z_j)] = \bar{W}_3(z_i, \eta_1); \quad (39)$$

$$\Delta \cdot \sum_j [G(z_i, z_j, \eta_2, \eta_1) \cdot X_1(z_j) + G(z_i, z_j, \eta_2, \eta_2) \cdot X_2(z_j) + G(z_i, z_j, \eta_2, \eta_3) \cdot X_3(z_j)] = \bar{W}_3(z_i, \eta_2); \quad (40)$$

$$\Delta \cdot \sum_j [G(z_i, z_j, \eta_3, \eta_1) \cdot X_1(z_j) + G(z_i, z_j, \eta_3, \eta_2) \cdot X_2(z_j) + G(z_i, z_j, \eta_3, \eta_3) \cdot X_3(z_j)] = \bar{W}_3(z_i, \eta_3). \quad (41)$$

Здесь  $j$  пробегает по всем точкам, соответствующим расположению пилонов. В случае прямоугольной плиты (рис.10 а) координаты  $z_j$  и число точек  $j$  по оси  $x_1$  - будут для всех пилонов одинаковыми. Поэтому знаки суммы, входящие в предыдущие уравнения, приняты общие для всех неизвестных; в случае плиты с криволинейным контуром (рис.10 б), нам пришлось бы записывать знаки суммы при каждом неизвестном  $X_k$  отдельно, поскольку пилоны (стены, параллельные оси  $x$ ) имели бы разную длину, соответственно разное число точек  $j$  и разные координаты  $z_j$ .

При каждом фиксированном значении  $i$  из равенств (39), (40), (41) вытекает три строки, три уравнения. Очевидно, если дискретные точки  $j = 0, 1, 2, 3 \dots \omega$  ( $\Delta = l_1/\omega$ ,  $l_1$  - длина плиты по оси  $x_1$ ;  $j = 0$ ,  $j = \omega$  - точки, лежащие на контурах - рис. 12 а), то число уравнений в системе (39), (40), (41) будет равно  $3(\omega + 1)$ , столько же будет и число неизвестных  $X_1(z_j)$ ,  $X_2(z_j)$ ,  $X_3(z_j)$ . Таким образом, формируется система линейных

уравнений  $3(\omega + 1) - 20$  порядка. Из этой системы определяются неизвестные  $X_1(z_j)$ ,  $X_2(z_j)$ ,  $X_3(z_j)$ , то есть определяются функции  $X_1(x_1)$ ,  $X_2(x_1)$ ,  $X_3(x_1)$  в виде численных массивов. Функция прогибов неразрезной плиты вычисляется с помощью выражения (33 а). Заменяя интегралы суммами, функцию (33) представим так:

$$W_3(z_i, y_j) = \bar{W}_3(z_i, y_j) - \sum_{j=0}^{\omega} [G(z_i, z_j, y_i, \eta_1) \cdot X_1(z_j) + \\ + G(z_i, z_j, y_i, \eta_2) \cdot X_2(z_j) + \\ + G(z_i, z_j, y_i, \eta_3) \cdot X_3(z_j)]. \quad (42)$$

где:  $z_i, z_j$  – координаты по оси  $X_1$  соответственно точки  $i$  и точки  $j$ ;  $y_i$  – координаты по оси  $X$  точки  $i$ ;  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  – координаты по оси  $X_2$  пилонов (рис. 9 а, 10 а). На основе функции прогибов (42) по формулам (12а) (при  $\bar{T}_1 = T_1^0$ ,  $\bar{T}_2 = T_2^0$ ,  $W_1 = W_2 = 0$ ) вычисляются внутренние усилия рассматриваемой неразрезной плиты. Поступая аналогично, можно построить алгоритмы расчета неразрезных плит, когда промежуточные опоры (стены, колонны) имеют в плане произвольную конфигурацию.

**Вывод.** Рассмотрены конструктивные схемы плит с односторонними связями, которые находят широкое применение в практике строительства. Приведены дискретные опоры плит, обладающие свойством односторонних связей. Приведены соответствующие схемы, а также аналитические выражения, описывающие особенности работы односторонних связей. Приводятся расчетные модели плит, которые лежат на опорах с односторонними связями. Представлены соответствующие расчетные схемы, дифференциальные и интегральные уравнения поперечного изгиба плит на опорах с односторонними связями.

Разработаны алгоритмы решения дифференциальных и интегральных уравнений, которые описывают работу плит с односторонними связями. Для иллюстрации алгоритма решения рассматриваются различные частные примеры. Приведенные расчетные модели плит с односторонними связями могут найти широкое применение при проектировании пластинчатых конструкций, имеющих опоры с односторонними связями.

#### Библиографический список:

1. Айзенберг Я.М. Сооружения с выключающимися связями для сейсмических районов. Стройиздат. М. 1976 г.
2. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. «Наука». М., 1969 г.
3. Губер М.Т. Теория плит; Львов, 1922г.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Издательство «Наука», Москва, 1967г., 368 стр.
5. Доннель Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Издательство «Наука», Москва, 1982г., 567 стр.
6. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Издательство литературы по строительству; Москва, 1957г., с.40.
7. Тимашенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки Издательство «Наука», Москва, 1966г., 635 стр.
8. СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции». Свод правил – Москва, строойиздат, 2017г. – 126 с.
9. СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия». Свод правил – Москва, строойиздат, 2016. – 95 с.,
10. А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Р.И. Вишталов. Расчетные модели балок с односторонними связями. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(4): 236-248. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-236-248

#### References:

1. Ayzenberg Ya.M. Structures with switching connections for seismic regions. Stroyi Publishing House. Moscow, 1976(In Russ)

2. Weinberg M.M. Variational methods for studying nonlinear operators. "Science". Moscow, 1969
3. Guber M.T. Theoria Plyt; Lvov, 1922(In Russ)
4. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. Numerical methods of analysis. "Science" Publishing House, Moscow, 1967: 368. (In Russ)
5. Donnel L.G. Beams, plates and shells. "Science" Publishing House, Moscow, 1982:567. (In Russ)
6. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. Publishing house of literature on construction; Moscow, 1957:40 (In Russ)
7. Timashenko S.P., Voynovsky-Krieger S. Plates and shells Publishing house "Science", Moscow, 1966:635 (In Russ)
8. SP 16.13330.2017 "Steel structures". Code of rules - Moscow, Stroyizdat, 2017:126. (In Russ)
9. SP 20.13330.2016 "Loads and impacts". Code of rules - Moscow, Stroyizdat, 2016: 95 (In Russ)
10. A.K. Yusupov, Kh.M. Muselemov, R.I. Vishtalov. Calculation models of beams with one-way connections. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences.2024;51(4):236-248. DOI:10.21822 /2073-6185-2024-51-4-236-248 (In Russ)

**Сведения об авторах:**

Юсупов Абусупян Курашевич, доктор технических наук, профессор, кафедра «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Муселемов Хайрулла Магомедмурадович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Вишталов Раджаб Исабекович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

**Information about the authors:**

Abusupyan K.Yusupov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Department of Building Structures and Hydraulic Structures; hairulla213@mail.ru

Hairulla M.Muselemov, Dr. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Head of the Department of Building Structures and Hydraulic Structures; hairulla213@mail.ru

Rajab I. Vishtalov, Cand.Sci. (Eng.), Assoc. Prof. Department of Building Structures and Hydro-technical Structures; hairulla213@mail.ru

**Конфликт интересов/Conflict of interest.**

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.**

**Поступила в редакцию/Received 01.10.2024.**

**Одобрена после рецензирования/ Revised 30.11.2024.**

**Принята в печать/Accepted for publication 14.01. 2025.**