

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
INFORMATION TECHNOLOGY AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 621.396



DOI: 10.21822/2073-6185-2025-52-1-67-76

Оригинальная статья /Original article

Моделирование рассеивания электромагнитных волн на полых структурах с эллиптическим поперечным сечением

В.В. Гарбузов¹, А.П. Преображенский²

¹Кадетский корпус (инженерная школа),

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,

¹394003, г. Воронеж, ул. Краснознаменная, 153, Россия,

²Воронежский институт высоких технологий,

²394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 73А, Россия

Резюме. Целью исследования является решение задачи, направленной на оценку характеристик рассеяния электромагнитных волн на полых структурах, размеры которых относятся к резонансной области. **Метод.** Размеры полых структур, имеющих максимальные характеристики рассеяния, определялись на основе комбинации метода интегральных уравнений и метода оптимизации. Учтено рассеяние на краях апертуры полых структур. Для определения характеристик течения предлагается использовать уравнение Матье. Приводятся основные этапы алгоритма расчета функций Матье, которые были использованы в ходе реализации компьютерной программы. Применяется равенство Парсевалья для интегрального преобразования. **Результат.** Создана математическая модель и алгоритм численного анализа особенностей рассеяния плоских радиоволн на полых структурах, которые являются компонентами объектов сложной формы, антенно-фидерных линий и антенных устройств. Получены результаты тестовых расчетов. Предложена структура подсистемы анализа полых структур сложной формы. **Вывод.** Получены априорные оценки решения краевой задачи в полосе эллиптических уравнений высшего порядка, вырождающихся к кубическому уравнению по одной из переменных. Показаны условия, при которых априорные оценки могут быть достигнуты, для этого, в том числе, введены дополнительные пространства. Соответствующая задача изучается в весовых пространствах типа С.Л. Соболева. Рассмотрены две теоремы, имеющие отношение к краевой задаче в полосе для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, проведен анализ возможностей получения априорной оценки. Весовые пространства дают априорную оценку решения краевой задачи в полосе для эллиптического уравнения высшего порядка, вырождающегося к кубическому уравнению на одной из границ полосы по одной из переменных.

Ключевые слова: физико-математическое и численное моделирование, дифракция электромагнитных волн, полая структура, интегральное уравнение, эффективная площадь рассеяния

Для цитирования: В.В. Гарбузов, А.П. Преображенский. Моделирование рассеивания электромагнитных волн на полых структурах с эллиптическим поперечным сечением. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025; 52(1):67-76. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-1-67-76

Simulation of electromagnetic wave scattering on hollow structures with elliptical cross section

V.V. Garbuzov¹, A.P. Preobrazhensky²

¹Cadet Corps (Engineering School), Military Educational and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin",

¹153 Krasnoznamennaya St., Voronezh 1394003, Russia,

²Voronezh Institute of High Technologies,

²73A Lenin St., Voronezh 394043, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to solve a problem aimed at assessing the characteristics of electromagnetic wave scattering on hollow structures whose dimensions belong to the resonant region. **Method.** The dimensions of the hollow structures with maximum scattering characteristics were determined by a combination of the integral equation method and the optimization method. Scattering at the edges of the aperture of the hollow structure is taken into account. It is proposed to use the Mathieu equation to determine the flow characteristics. The stages of the algorithm for calculating the Mathieu functions are given, which were used during the implementation of the computer program. Parseval's equality is used for the integral transformation. **Result.** A mathematical model and an algorithm for numerical analysis of the scattering features of plane radio waves on hollow structures that are components of complex-shaped objects, antenna-feeder lines, and antenna devices have been created. The results of test calculations have been obtained. The structure of the subsystem for analyzing complex-shaped hollow structures has been proposed. **Conclusion.** A priori estimates are obtained for the solution of a boundary value problem in a strip of higher-order elliptic equations degenerating to a cubic equation in one variable. Conditions for achieving a priori estimates are shown; additional spaces are introduced for this purpose. The problem is studied in weighted spaces of the S.L. Sobolev type. Two theorems related to the boundary value problem in a strip for one class of degenerate elliptic equations of high order are considered, and an analysis of the possibilities of obtaining an a priori estimate is carried out. Weighted spaces give an a priori estimate for the solution of a boundary value problem in a strip for a higher-order elliptic equation degenerating to a cubic equation on one of the boundaries of the strip in one of the variables.

Keywords: physical, mathematical and numerical modeling, diffraction of electromagnetic waves, hollow structure, integral equation, effective scattering area

For citation: V.V. Garbuzov, A.P. Preobrazhensky. Simulation of electromagnetic wave scattering on hollow structures with elliptical cross section. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025;52(1):67-76. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-1-67-76

Введение. Рассеиватели радиолокационных сигналов и преобразователи энергии электромагнитных волн, как правило, характеризуются большими электрическими размерами, сложной геометрией, наличием поглощающих и нелинейных элементов. Анализ и синтез вышеупомянутых электродинамических объектов на основе грубого представления о протекающих в них физических процессах несут в себе опасность появления существенных и трудно контролируемых погрешностей оценки их основных характеристик, которые, как правило, очень быстро изменяются при изменении частоты, вида поляризации и угла падения ЭМВ. Измерение основных характеристик РЦ в широкой полосе частот и обширном угловом секторе требует наличия либо аттестованного специально оборудованного антенного полигона, либо аттестованной безэховой камеры, а также больших затрат времени и материальных средств. Развитие электродинамических систем автоматизированного проектирования позволяет решать, как совершенно новые задачи в области антенно-фидерной техники, теории дифракции электромагнитных волн на структурах сложной формы, требующие значительных вычислительных затрат, так и практически реализовать многие научные разработки, высокая степень сложности которых тормозила их практическое воплощение.

Постановка задачи. Рассмотрим основные этапы алгоритма расчета рассеянного электромагнитного поля через полую конструкцию эллиптического сечения. Рассмотрим полую структуру эллиптического поперечного сечения с размером полуосей a и b и длиной L (рис. 1). Пусть на апертуру полости падает плоская ЭМВ (множитель $\exp(j\omega t)$ в дальнейшем будем опускать):

$$\vec{E}^i = (\hat{\theta}^i I_{\theta} + \hat{\phi}^i I_{\phi}) \exp(j\vec{k}^i \vec{r}), \quad (1)$$

где $\vec{k}^i = k[(\hat{x} \cos \varphi^i + \hat{y} \sin \varphi^i) \sin \theta^i + \hat{z} \cos \theta^i]$ - волновой вектор падающей волны, $k=2\pi/\lambda$ - волновое число свободного пространства; I_{θ} , I_{ϕ} - амплитуды, соответствующие E- и H-поляризациям падающей плоской ЭМВ.

Методы исследования. Алгоритм расчета поля рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих полых структурах круглого поперечного сечения сложной формы. На основе модального метода алгоритм расчета эффективной площади рассеяния полой конструкции эллиптического сечения состоит из следующих основных этапов [1]:

1. Тангенциальные составляющие электрического и магнитного поля, возбуждаемого падающей плоской ЭМВ (1) на апертуре полости ($z=0$) представляются в виде разложений по модам эллиптического волновода с соответствующими модальными коэффициентами. Заметим, модальные коэффициенты $\{G_{mn}, D_{mn}\}$ относятся к ТЕ-модам (поперечно-электрические волны), а модальные коэффициенты $\{\bar{G}_{mn}, \bar{D}_{mn}\}$ - к ТМ-модам. Помимо этого, модальные коэффициенты $\{G_{mn}, \bar{G}_{mn}\}$ (рис. 1) соответствуют выходящим (в направлении $+z$) из полости модам, а $\{D_{mn}, \bar{D}_{mn}\}$ соответствуют модам, входящим (в направлении $-z$) в полость.

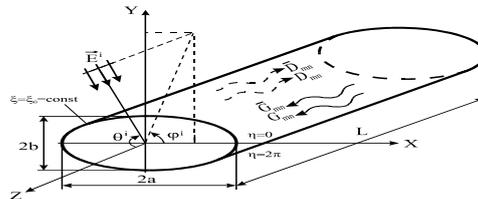


Рис. 1- Рассеяние электромагнитных волн на полой структуре эллиптического поперечного сечения

Fig. 1 - Scattering of electromagnetic waves on a hollow structure of elliptical cross-section

В зависимости от условий возбуждения генерируются поперечные магнитные волны и поперечные радиоволны в эллиптическом поперечном резонаторе. Секции далее делятся на четные и нечетные. Четность или нечетность вала определяют относительно большей оси эллипса поперечного сечения полости. Пусть при изменении знака координаты η эллиптической системы координат близко к нулю (относительно большей оси) продольная составляющая поля E_z, H_z не меняет знака, то волна называется четной, в обратном случае - нечетной. (Координаты ξ и η эллиптической системы координат [2] связаны с координатами x, y прямоугольной системы координат следующими соотношениями: $x = hch\xi\cos\eta, y = hsh\xi\sin\eta$, где h - фокальная полуось.) Тангенциальные составляющие полей на апертуре полости (при $z=0$) выражаются с помощью моды эллиптического волновода в случае четных волн следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tan}(z=0^-) = & \bar{\xi} \sum_m \sum_n [(G_{mn} + D_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_1} Ce'_m(\xi, q_{mn}) C_m(\eta, q_{mn}) + \\ & + (\bar{G}_{mn} - \bar{D}_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_1} Ce'_m(\xi, q_{mn}) C_m(\eta, q_{mn})] + \\ & + \bar{\eta} \sum_m \sum_n [(G_{mn} + D_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_2} Ce_m(\xi, q_{mn}) C'_m(\eta, q_{mn}) + \\ & + (\bar{G}_{mn} - \bar{D}_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_2} Ce_m(\xi, q_{mn}) C'_m(\eta, q_{mn})] \quad (2) \\ \vec{H}_{tan}(z=0^-) = & \bar{\xi} \sum_m \sum_n [(G_{mn} - D_{mn}) \frac{\omega \epsilon_0}{k^2 \ell_2} Ce_m(\xi, q_{mn}) C'_m(\eta, q_{mn}) + \\ & + (\bar{G}_{mn} + \bar{D}_{mn}) \frac{\omega \epsilon_0}{k^2 \ell_2} Ce_m(\xi, q_{mn}) C'_m(\eta, q_{mn})] + \\ & + \bar{\eta} \sum_m \sum_n [(G_{mn} - D_{mn}) \frac{\omega \epsilon_0}{k^2 \ell_1} Ce'_m(\xi, q_{mn}) C_m(\eta, q_{mn}) + \\ & + (\bar{G}_{mn} + \bar{D}_{mn}) \frac{\omega \epsilon_0}{k^2 \ell_1} Ce'_m(\xi, q_{mn}) C_m(\eta, q_{mn})] \end{aligned}$$

где ϵ_0 - электрическая постоянная; q_{mn} - n -й корень четной модифицированной периодической функции Матье порядка m [3]; $\beta_{mn} = \sqrt{(\frac{2\pi}{\lambda})^2 - \frac{4q_{mn}}{h^2}}$ - постоянная распро-

странения ЭМВ внутри полости эллиптического поперечного сечения;
 $\ell_1 = \ell_2 = \frac{h}{\sqrt{2}} (\text{ch} 2\xi - \cos 2\eta)$ - коэффициенты Ламэ для эллиптической системы координат.

В уравнениях (2) индекс c обозначаем четную волну; индекс m указывает порядок модифицированной функции Матье или ее первой производной; n - номер корня модифицированной функции Матье порядка m или ее первой производной; ${}_c C_m(\eta, {}_c q_{mn})$, ${}_c C'_m(\eta, {}_c q_{mn})$ - четная периодическая обычная функция Матье целого порядка с действительными собственными значениями v и q_{mn} и ее первая производная, ${}_c Ce_m(\xi, {}_c q_{mn})$, ${}_c Ce'_m(\xi, {}_c q_{mn})$ - четная модифицированная периодическая функция Матье порядка m и ее первая производная.

2. Модальный коэффициент $\{D_{mn}, \bar{D}_{mn}\}$, соответствующий моде, входящей в полость, рассчитываются по уравнению (3), полученному в с помощью теоремы взаимности:

$$\begin{bmatrix} D_{mn} \\ \bar{D}_{mn} \end{bmatrix} = \left(\frac{2\pi}{jk} \right) \frac{1}{W_0 Q_{mn}} \begin{bmatrix} M_{mn}(\theta^i, \varphi^i) & N_{mn}(\theta^i, \varphi^i) \\ -\bar{M}_{mn}(\theta^i, \varphi^i) & \bar{N}_{mn}(\theta^i, \varphi^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\theta \\ I_\varphi \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Уравнение (3) использует следующие обозначения: W_0 - импеданс свободного пространства; Q_{mn} - комплексная мощность, передаваемая в режиме ТЕ или ТМ модами. Для полой конструкции эллиптического поперечного сечения мощность Q_{mn} определяется как уравнение:

$$Q_{mn} = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} (E_\xi H_\eta - E_\eta H_\xi) d\eta d\xi, \quad (4)$$

где интегрировано по поперечному сечению полости (рис. 3).

Коэффициенты $N_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$, $\bar{N}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$, $M_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$, $\bar{M}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\beta_{mn}}{\omega \mu_0} \cos \theta \right) ((U_x)_{mn} \cos \varphi + (U_y)_{mn} \sin \varphi), \\ \bar{M}_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\omega \epsilon_0}{\beta_{mn}} \cos \theta \right) ((U_x)_{mn} \cos \varphi + (U_y)_{mn} \sin \varphi), \\ N_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left(\cos \theta + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\beta_{mn}}{\omega \mu_0} \cos \theta \right) ((U_x)_{mn} \sin \varphi - (U_y)_{mn} \cos \varphi), \\ \bar{N}_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left(\cos \theta + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\omega \epsilon_0}{\beta_{mn}} \cos \theta \right) ((U_x)_{mn} \sin \varphi - (U_y)_{mn} \cos \varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

где $(U_{x,y})_{mn} = \int_S (E_{x,y})_{mn} \exp[jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi)] dS$,

$(E_x)_{mn}, (E_y)_{mn}$ - тангенциальные составляющие $-i$ моды электрического поля на апертуре полости.

Тангенциальные составляющие электрического поля [4] в эллиптической и прямоугольной системах координат связаны следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = [\Psi] \begin{bmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$[\Psi] = \frac{(\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}}{\text{ch}^2 \xi \sin^2 \eta + \text{sh}^2 \xi \cos^2 \eta} \begin{bmatrix} \text{sh} \xi \cos \eta & -\text{ch} \xi \sin \eta \\ -\text{ch} \xi \sin \eta & \text{sh} \xi \cos \eta \end{bmatrix}.$$

3. Модальные коэффициенты $\{G_{mn}, \bar{G}_{mn}\}$, соответствующие модам, выходящим из полой конструкции, определяются по обобщенным известным формулам матрицы рассеяния R_{mn} полости (в данном случае полости эллиптического поперечного сечения). На апертуре полости (при $z=0$) входящие и выходящие моды связаны известным соотношением:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{mn} \\ \overline{\mathbf{G}}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{mn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{R}}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{mn} \\ \overline{\mathbf{D}}_{mn} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Матричные коэффициенты (7) для нанесения постоянной толщины радиопоглощающего материала на заднюю стенку резонатора, метод разложения очевиден:

$$\mathbf{R}_{mn}, \overline{\mathbf{R}}_{mn} = \pm \exp(-2j(\beta_{mn} L + \beta_{mn}^1 L_1)),$$

где L - длина участка полой структуры без радиопоглощающего материала, L_1 - толщина участка радиопоглощающего материала внутри полости, $\beta_{mn} = \sqrt{(\frac{2\pi}{\lambda})^2 - \frac{4q_{mn}}{h^2}}$,

$\beta_{mn}^1 = \sqrt{(\frac{2\pi}{\lambda})^2 \varepsilon_r \mu_r - \frac{4q_{mn}}{h^2}}$, где ε_r, μ_r - диэлектрическая и магнитная проницаемость радиопоглощающего материала. При расчете разнообразных волноводных устройств, содержащих диэлектрические вставки, исполуют метод декомпозиции. Выполнен расчет ЭПР полой структуры эллиптического поперечного сечения проводится нами в рамках модели волновода. В этом случае применяются разработанные для волноводов [5] методы определения поля внутри резонатора, в том числе и методы декомпозиции.

4. Вторичное рассеянное полой структуры эллиптического поперечного сечения, обусловленное выходящими из апертуры модами, рассчитано с использованием закона взаимности в приближении Стрэттона-Чу. Выходящие из полости резонатора моды связаны с рассеянным электромагнитным полем следующим образом:

$$\vec{\mathbf{E}}^s = \frac{\exp(-j\mathbf{kr})}{r} (\hat{\theta}\mathbf{F}_\theta + \hat{\phi}\mathbf{F}_\phi), \quad \text{kr} \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\theta \\ \overline{\mathbf{F}}_\phi \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mn}(\theta^i, \phi^i) & \overline{\mathbf{M}}_{mn}(\theta^i, \phi^i) \\ \mathbf{N}_{mn}(\theta^i, \phi^i) & \overline{\mathbf{N}}_{mn}(\theta^i, \phi^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{mn} \\ \overline{\mathbf{G}}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, рассеянное электромагнитное поле связано с падающей плоской ЭМВ следующими соотношениями:

$$\vec{\mathbf{E}}^s = \frac{\exp(-j\mathbf{kr})}{r} (\hat{\theta}\mathbf{S}_\theta + \hat{\phi}\mathbf{S}_\phi), \quad \text{kr} \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_\theta \\ \mathbf{S}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\theta\theta} & \mathbf{S}_{\theta\phi} \\ \mathbf{S}_{\phi\theta} & \mathbf{S}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\theta \\ \mathbf{I}_\phi \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В (10) матричные элементы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\theta\theta} &= \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{\mathbf{W}_\theta \mathbf{Q}_{mn}} [\mathbf{R}_{mn} \mathbf{M}_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{M}_{mn}(\theta^i, \phi^i) - \\ &\quad - \overline{\mathbf{R}}_{mn} \overline{\mathbf{M}}_{mn}(\theta, \phi) \overline{\mathbf{M}}_{mn}(\theta^i, \phi^i)], \\ \mathbf{S}_{\theta\phi} &= \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{\mathbf{W}_\theta \mathbf{Q}_{mn}} [\mathbf{R}_{mn} \mathbf{M}_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{N}_{mn}(\theta^i, \phi^i) - \\ &\quad - \overline{\mathbf{R}}_{mn} \overline{\mathbf{M}}_{mn}(\theta, \phi) \overline{\mathbf{N}}_{mn}(\theta^i, \phi^i)], \\ \mathbf{S}_{\phi\theta} &= \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{\mathbf{W}_\phi \mathbf{Q}_{mn}} [\mathbf{R}_{mn} \mathbf{N}_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{M}_{mn}(\theta^i, \phi^i) - \\ &\quad - \overline{\mathbf{R}}_{mn} \overline{\mathbf{N}}_{mn}(\theta, \phi) \overline{\mathbf{M}}_{mn}(\theta^i, \phi^i)], \\ \mathbf{S}_{\phi\phi} &= \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{\mathbf{W}_\phi \mathbf{Q}_{mn}} [\mathbf{R}_{mn} \mathbf{N}_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{N}_{mn}(\theta^i, \phi^i) + \\ &\quad + \overline{\mathbf{R}}_{mn} \overline{\mathbf{N}}_{mn}(\theta, \phi) \overline{\mathbf{N}}_{mn}(\theta^i, \phi^i)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Особенность формул (11) состоит в том, что в общем случае $\mathbf{S}_{\theta\phi} \neq 0$ и $\mathbf{S}_{\phi\theta} \neq 0$, это связано с несимметрией эллипса для определенных углов падения ЭМВ. В (11) для коэффициентов $\mathbf{N}_{mn}, \overline{\mathbf{N}}_{mn}, \mathbf{M}_{mn}, \overline{\mathbf{M}}_{mn}$ суммирование для четных волн проводится по индексам $m=0,1,2,\dots; n=1,2,3,\dots$, а для нечетных волн $m,n=1,2,3,\dots$. При определении $\theta\theta$ -компоненты бистатической ЭПР расчет проводится по следующей формуле:

$$\sigma_{\theta\theta} = 4\pi |\mathbf{S}_{\theta\theta}|^2. \quad (12)$$

Аналогичные выражения записываются для других компонент ЭПР полости. Полагая в формулах (1) $(\theta, \varphi) = (\theta^i, \varphi^i)$, мы можем определить моностатическую ЭПР полой структуры.

Обсуждение результатов. На основе разработанного алгоритма можно выполнить анализ рассеяния электромагнитных волн, поскольку полая конструкция круглого сечения является частным случаем полой конструкции эллиптического сечения. Для проверки алгоритма авторы данного исследования провели тестовые расчеты на полой конструкции круглого сечения. Это соответствовало данным, известным из литературы.

Расчет ЭПР целевой структуры на основе приведенного выше алгоритма производится без учета дифракции электромагнитных волн на краях полости и ее внешней поверхности, что приводит к снижению точности расчета. ЭПР полости при увеличении угла наблюдения. При решении задачи о рассеянии электромагнитных волн на полой конструкции модальным методом необходимо определить поле внутри полости. Для определения структуры всего поля достаточно знать продольные составляющие электрического и магнитного полей, на основе которых можно определить поперечные составляющие электрического и магнитного полей. Для определения продольной составляющей необходимо решить дифференциальное уравнение в соответствующей системе координат (цилиндрической, эллиптической и т. д.). Это позволяет найти собственные функции конкретного волновода, через который проходит поперечная компонента поля. В случае круглого волновода собственными функциями являются, например, функции Бесселя или тригонометрические функции. Напомним, что собственной функцией волновода эллиптического сечения является функция Матье. Эти функции являются решениями уравнения Матье. Зная собственные функции, можно определить поперечную составляющую электромагнитного поля в полости эллиптического сечения. Получены априорные оценки решения краевой задачи в полосе эллиптических уравнений высшего порядка, вырождающихся к кубическому уравнению по одной из переменных с границей $t=0$. Рассмотрим в полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ – некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t) \quad (13)$$

$$\text{где } A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - b\partial_t^3 v$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

где b, a_{ri} – комплексные числа, тогда

$$\text{Im} \bar{b} a_{02m} = 0, D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$D_x^\tau = (i)^\tau \frac{\partial^{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}}}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_{n-1}^{\tau_{n-1}}}.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия:

$$B_j(D_x)v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1} v|_{t=0} = G_j(x), \quad (14)$$

Где $j = 1, 2, \dots, l$, с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе полосы $t = d$ задаются следующие условия:

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0 \quad (15)$$

Предположим выполнение следующих условий:

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n, \eta \in R^1$ справедливо следующее неравенство $\text{Re} \bar{b} L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η) .

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + \max_{j=1,2,\dots,l} (m_1, m_2)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s-1}[0; d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0, \alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $b_j(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Для того, чтобы изучить решение задач (13) – (15) следует ввести определенные пространства. Рассмотрим интегральное преобразование F_α . На функциях $v(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ данное преобразование можно записать следующим образом:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$$

В. П. Глушко в своей работе показывает, что для данного преобразования можно также построить обратное интегральное преобразование F_α^{-1} , которое можно записать следующим образом: $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\tau)]|_{\tau=\phi(t)}$

где $F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье, которое выглядит следующим образом

$$F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\xi$$

Также в работе В. П. Глушко об априорных оценках решений краевых задач для любого класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка можно обнаружить аналог равенства Парсевала для интегрального преобразования F_α .

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(R_+^1)},$$

Аналогичное равенство Парсевала для интегрального преобразования F_α позволяет расширить преобразование (13) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R_+^1)$, а также определить преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Также из определения преобразования F_α следует следующее свойство. Свойство. Если $u(t) \in C^s[0, d]$ и удовлетворяет следующим условиям

$$u(d) = \partial_t u(d) = \dots = \partial_t^{s-1} u(d) = 0,$$

то справедливо равенство

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u(t)](\eta) = \eta^j F_\alpha[u(t)](\eta) \quad \text{при всех } j = 0, 1, 2, \dots, s.$$

Задача (13) – (15) изучается в весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева. Для дальнейшего рассмотрения данного вопроса введем следующие определения.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ (где $s \geq 0$ – целое число), состоит из трех функций $v(x, t) \in L_2(R_d^n)$ для которых конечна следующая норма:

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} = \left\{ \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{3s}{2m} \rfloor} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}(s - \frac{2m}{3}l)} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [\partial_t^l v(x, t)] \right] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

Здесь $F_{x \rightarrow \xi}$ – преобразование Фурье, $F_{\xi \rightarrow x}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье.

Если s – такое натуральное число, что число $\frac{2m}{3}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна:

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l \leq s} \|D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v\|_{L_2(R_d^n)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Будем говорить, что функция $g(x)$ принадлежит пространству $H_s(R^{n-1})$ (s – действительное), если для нее конечна норма $\|g\|_s = \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left\{ (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} F_{\xi \rightarrow x} [g(x)] \right\} \right\|_{L_2(R^{n-1})}$. Рассмотрим две теоремы, имеющих непосредственное отношение к краевой задаче в полосе для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка.

Теорема 1. Пусть $s > \max\{2m, \max(m_1, m_2 + \frac{2m}{3}) + \frac{m}{3}\}$ – целое число, $m \geq 3$ и выполнены условия (13) – (15). Тогда для любого решения $v(x, t)$ задачи (13) – (15), принадлежащего неравенству $H_{s, \alpha, \frac{2m}{3}}(R_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s, \alpha, m} \leq c \left(\|Av\|_{s-2m, \alpha, m} + \sum_{j=1}^2 \|B_j v|_{t=0}\|_{s-m_j - \frac{2m(j-1)}{3} - \frac{m}{3}} \right),$$

где константа $c > 0$, не зависящей от v . Здесь $\|\cdot\|_s$ – норма в пространстве Соболева-Слободецкого $H_s(R^{n-1})$, определенная следующим равенством

$$\|g\|_s = \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left[(1 + |\xi|)^s F_{x \rightarrow \xi} [g(x)] \right] \right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

В полосе R_d^n наряду с указанным уравнением рассмотрим уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha, t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t), \quad (16)$$

$$\text{где } A(D_x, D_{\alpha, t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha, t})v - b\partial_t^3 v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha, t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha, t}^j, \text{ комплексные числа, } \text{Im } \bar{b}a_{0, 2m} = 0.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается следующее условие:

$$B(D_x)v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leq k_j} b_\tau D_x^\tau v|_{t=0} = G(x) \quad (17)$$

с комплексными коэффициентами b_τ . На границе $t = d$ задаются условия вида:

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0 \quad (18)$$

Теорема 2. Пусть $s \geq \max\{2m, m_1 + \frac{m}{3}\}$ – целое число, $m \geq 3$ и выполнены условия (13) – (15). Тогда для любого решения $v(x, t)$ задачи (16) – (18), принадлежащего неравенству $H_{s, \alpha, \frac{2m}{3}}(R_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s, \alpha, m} \leq c \left(\|Av\|_{s-2m, \alpha, m} + \|Bv|_{t=0}\|_{s-m_1 - \frac{m}{3}} \right),$$

Где константа $c > 0$ не зависит от v . Таким образом, эти весовые пространства дают априорную оценку решения краевой задачи в полосе для эллиптического уравнения высшего порядка, вырождающегося к кубическому уравнению на одной из границ полосы по одной из переменных. Приведем выражение для поперечной компоненты поля в волноводе эллиптического сечения. Поперечно-магнитная четная волна ${}_c E_{mn}$:

$$\begin{aligned} {}_c E_\xi &= \sum_m \sum_n \left[G_{mn} \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_1} {}_c C e_m(\xi, {}_c q_{mn}) {}_c C_m(\eta, {}_c q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z) \right. \\ {}_c E_\eta &= \sum_m \sum_n \left[G_{mn} \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_2} {}_c C e_m(\xi, {}_c q_{mn}) {}_c C_m(\eta, {}_c q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z) \right. \\ {}_c H_\xi &= \frac{\omega \varepsilon}{\beta_{mn}} {}_c E_\eta; \quad {}_c H_\eta = \frac{\omega \varepsilon}{\beta_{mn}} {}_c E_\xi; \end{aligned} \quad (19)$$

Поперечно-магнитная нечетная волна ${}_s E_{mn}$:

$$\begin{aligned} {}_s E_\xi &= \sum_m \sum_n \left[G_{mn} \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_1} {}_s C e_m(\xi, {}_s q_{mn}) {}_s C_m(\eta, {}_s q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z) \right. \\ {}_s E_\eta &= \sum_m \sum_n \left[G_{mn} \frac{\beta_{mn}}{k^2 \ell_2} {}_s C e_m(\xi, {}_s q_{mn}) {}_s C_m(\eta, {}_s q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z) \right. \\ {}_s H_\xi &= \frac{\omega \varepsilon}{\beta_{mn}} {}_s E_\eta; \quad {}_s H_\eta = \frac{\omega \varepsilon}{\beta_{mn}} {}_s E_\xi; \end{aligned} \quad (20)$$

Поперечно-магнитная четная волна ${}_c H_{mn}$:

$$\begin{aligned} {}_c E_\xi &= \sum_m \sum_n \left[G_{mn} \frac{\omega \mu}{k^2 \ell_1} {}_c C e_m(\xi, {}_c q_{mn}) {}_c C_m(\eta, {}_c q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z) \right. \\ {}_c E_\eta &= \sum_m \sum_n \left[G_{mn} \frac{-\mu \omega}{k^2 \ell_2} {}_c C e_m(\xi, {}_c q_{mn}) {}_c C_m(\eta, {}_c q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z) \right. \\ {}_c H_\xi &= -\frac{\beta_{mn}}{\mu \omega} {}_c E_\eta; \quad {}_c H_\eta = \frac{\beta_{mn}}{\mu \omega} {}_c E_\xi; \end{aligned} \quad (21)$$

Поперечно-магнитная нечетная волна ${}_c H_{mn}$:

$$\begin{aligned} E_{\xi} &= \sum_m \sum_n [G_{mn} \frac{\omega \mu}{k^2 \ell_1} C e_m(\xi, q_{mn}) C'_m(\eta, q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z)] ; \\ E_{\eta} &= \sum_m \sum_n [G_{mn} \frac{-\mu \omega}{k^2 \ell_2} C e'_m(\xi, q_{mn}) C_m(\eta, q_{mn}) \sin(\beta_{mn} z)] ; \\ H_{\xi} &= -\frac{\beta_{mn}}{\mu \omega} E_{\eta} ; \quad H_{\eta} = \frac{\beta_{mn}}{\mu \omega} E_{\xi} ; \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, мы рассмотрели основные этапы алгоритма расчета ЭПР поллой структуры эллиптического поперечного сечения, на внутреннюю заднюю стенку которой может быть нанесен металло-диэлектрический материал. Совокупность предложенных алгоритмов могут быть объединены в подсистему анализа, в ней есть расчетные блоки, блоки для анализа точности решения.

Вывод. Рассмотрено решение задачи, направленной на оценку характеристик рассеяния электромагнитных волн на полых структурах, их размеры относятся к резонансной области. Размеры полых структур, имеющих максимальные характеристики рассеяния, определялись на основе комбинации метода интегральных уравнений и метода оптимизации. Создана математическая модель и алгоритм численного анализа особенностей рассеяния плоских радиоволн на полых структурах, которые являются компонентами объектов сложной формы, антенно-фидерных линий и антенных устройств. Получены результаты тестовых расчётов. Предложена структура подсистемы анализа полых структур сложной формы.

Библиографический список:

1. Авдеев В.Б. Моделирование малогабаритных сверхширокополосных антенн: коллективная: Монография/В.Б. Авдеев, А.В. Ашихмин, А.В. Бердышев, С.В. Корочин, В.М. Некрылов, А.В. Останков, Ю.Г. Пастернак, И.В. Попов, А.П. Преображенский/Под ред. В.Б. Авдеева и А.В. Ашихмина. - Воронеж: ВГУ, 2005. - 223 с.
2. Аветисян Т.В. Исследование математических моделей для оценок характеристик рассеяния полых структур/ Аветисян Т.В., Львович Я.Е., Преображенский А.П., Преображенский Ю.П. // Прикладная физика. Воронеж. 2023. № 2. С. 10-14.
3. Аветисян Т.В. Сравнительный анализ моделей оценки характеристик рассеяния полых структур/ Аветисян Т.В., Львович Я.Е., Преображенский А.П.//Проблемы физики, математики и техники. Воронеж. 2023. № 2 (55). – С. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_7.
4. Ашихмин А. В. Анализ направленных свойств плоского бико-нического вибратора / А.В. Ашихмин, В.К. Маршаков, А.П. Преображенский // Вестник ВГУ. - 2005. - № 1. - С. 13-19.
5. Баев А.Д. Об одной краевой задаче в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка/ Баев А.Д., Вестн. Самарск. ун-та. Сер. естеств. науки. 3 (62), 27–39. 2008.
6. Балашов Ю.С., Преображенский А. П. Оценка радиофизических параметров поглощающих покрытий на поверхности объекта сложной формы. // Вестник ВГТУ. - 2005. -Т. 1.-№ 8.-С.76-78.
7. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя/ Бахвалов Н.С. // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–859.
8. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области/ Вишик М.И., Грушин В.В., Матем. сб. 80 (4) (112), 455–491 (1969).
9. Головин А.А. Разработка подсистемы САПР для анализа полых структур с поглощающими покрытиями/ Головин А.А., Мишин А.А. // Фундаментальные исследования. 2014. № 11-10. С. 2146-2149.
10. Глушак А.В. Априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами//Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №20(269).Выпуск 48: 50–57. 2017.
11. Мартынов Н.А., Мироненко Г.Н., Кирьянов О.Е. Оценка границ применимости импедансных граничных условий в задаче дифракции электромагнитной волны на проводящей кромке с покрытием // Радиотехника, 2000, № 6, с. 74-78.
12. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем//Москва: Наука, 1979.
13. Vinogradova, E.D. Rigorous Approach to Analysis of Backscattering from 2D Open-Ended S-shaped Cavities / E.D. Vinogradova, P.D. Smith // Microwave Mediterranean Symposium. – 2022. – P. 1–4.
14. Bozorgi, M.A generalized method for scattering from wide cavities with specified wave functions / M. Bozorgi // Microw Antennas Propag. – 2021. – Vol. 15. – P. 69–79.

References:

1. Ashikhmin A.V. Analysis of directional properties of a flat bionic vibrator. A.V. Ashikhmin, V.K. Marshakov, A. P. Preobrazhensky. *Bulletin of the VSU*. 2005; 1:13-19. (In Russ)
2. Avdeev V.B. Modeling of small-sized ultra-broadband antennas: V.B. Avdeev, A.V. Ashikhmin, A.V. Berdyshev, S.V. Korochin, V.M. Nekrylov, A.V. Ostankov, Yu.G. Pasternak, I.V. Popov, A.P. Preobrazhensky. Edited by V.B. Avdeev and A.V. Ashikhmin. - Voronezh: VSU, 2005:223. (In Russ)
3. Avetisyan T.V., Lvovich Ya.E., Preobrazhensky AP, Preobrazhensky Yu.P. Study of mathematical models for estimating scattering characteristics of hollow structures. *Applied Physics*. 2023;2:10-14. (In Russ)
4. Avetisyan T.V., Lvovich Ya.E., Preobrazhensky AP. Comparative analysis of models for estimating scattering characteristics of hollow structures. *Problems of Physics, Mathematics and Technology*. Voronezh. 2023;2 (55):7-10. DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_7. - EDN: CQTDWZ (In Russ)
5. Baev A.D. On a Boundary Value Problem in a Strip for a Degenerate Elliptic Equation of High Order. Baev A.D., *Vestn. Samara University. Ser. of Natural Sciences*. 2008;3 (62):27–39. (In Russ)
6. Bozorgi, M.A generalized method for scattering from wide cavities with specified wave functions. M. Bozorgi. *Microw Antennas Propag*. 2021;15:69–79. (In Russ)
7. Bakhvalov N.S. On Optimization of Methods for Solving Boundary Value Problems in the Presence of a Boundary Layer. Bakhvalov N.S. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Phys*. 1969; 9(4): 841–859. (In Russ)
8. Balashov Yu.S. Assessment of radiophysical parameters of absorbing coatings on the surface of an object of complex shape. Yu. S. Balashov, A. P. Preobrazhensky. *Vestnik VGTU*. 2005;1(8):76-78. (In Russ)
9. Golovin A.A. Development of a CAD subsystem for the analysis of hollow structures with absorbing coatings / Golovin A.A., Mishin A.A. *Fundamental research*. 2014;11-10:2146-2149. (In Russ)
10. Glushak A.V. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a high-order differential equation with two degenerate elliptic operators. Glushak A.V. *Scientific bulletin of Belgorod State University. Mathematics. Physics*, Belgorod. 2017; 20 (269). Issue 48: 50–57. (In Russ)
11. Marchuk G.I. Improving the accuracy of solutions of difference schemes. Marchuk G.I., Shaidurov V.V. — Moscow.: Nauka, 1979. (In Russ)
12. Martynov N.A., Mironenko G.N., Kiryanov. Assessment of the limits of applicability of impedance boundary conditions in the problem of diffraction of an electromagnetic wave on a conductive edge with a coating. O.E.. *Radio Engineering*, 2000; 6: 74-78. (In Russ)
13. Vishik M.I. Boundary Value Problems for Elliptic Equations Degenerating on the Boundary of a Domain. Vishik M.I., Grushin V.V., *Mat. Sb.*(1969;. 80 (4) (112):455–491 (In Russ)
14. Vinogradova, E.D. Rigorous Approach to Analysis of Backscattering from 2D Open-Ended S-shaped Cavities. E.D. Vinogradova, P.D. Smith. *Microwave Mediterranean Symposium*. 2022; 1–4.

Сведения об авторах:

Гарбузов Владислав Владимирович, преподаватель математики и ИКТ, преподаватель – исследователь; 9999vlad9999@mai.ru

Преображенский Андрей Петрович, доктор технических наук, профессор, руководитель студенческого научного клуба ВИБТ, заведующий кафедрой информационных систем и технологий; app@vivt.ru

Information about authors:

Vladislav V. Garbuzov, Teacher of Mathematics and ICT, Research teacher; 9999vlad9999@mai.ru

Andrey P. Preobrazhensky, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the VIVT Student Scientific Club, Head of the Department of Information Systems and Technologies; app@vivt.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 12.09.2024.

Одобрена после рецензирования/ Revised 09.11.2024.

Принята в печать/Accepted for publication 30.12.2024.