

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
INFORMATION TECHNOLOGY AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 681.511.26



DOI: 10.21822/2073-6185-2025-52-1-49-56

Оригинальная статья/ Original article

**Моделирование движения линейных объектов управления
к внешней функциональной траектории**

В.В. Афонин

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарёва,

430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является моделирование поведения динамических объектов управления. Рассматриваются объекты управления, математическая модель которых соответствует описанию типовых динамических звеньев, например, колебательные, инерционные. **Метод.** Применяются подходы, свойственные линейной задаче быстрого действия и краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения определяются программным путем с помощью традиционных вычислительных пакетов. **Результат.** Экспериментально-моделируемые результаты показывают возможность перевода заданного объекта управления из нулевого состояния в расчетную точку внешней траектории движения чего-либо. **Вывод.** На основе модельных примеров показана возможность решения краевой задачи для объектов управления, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми по их полюсам.

Ключевые слова: моделирование, типовые динамические звенья, внешняя траектория, скачкообразное управление, маркеры цели, движение объекта управления, программирование

Для цитирования: В.В. Афонин. Моделирование движения линейных объектов управления к внешней функциональной траектории. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(1):49-56. DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-1-49-56

Modeling the motion of linear control objects to an external functional trajectory

V.V. Afonin

N.P. Ogarev National Research Mordovia State University,
68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to model the behavior of dynamic control objects. The control objects are considered, the mathematical model of which corresponds to the description of typical dynamic links, for example, oscillatory, inertial. **Method.** Approaches inherent to the linear problem of speed and the boundary value problem for ordinary differential equations are used. Solutions are determined programmatically using traditional computing packages. **Result.** The results show the possibility of transferring a given control object from the zero state to the calculated point of the external trajectory of movement. **Conclusion.** The possibility of solving a boundary value problem for control objects that can be both stable and unstable at their poles is shown.

Keywords: modeling, typical dynamic links, external trajectory, jump-like control, target markers, movement of the control object, programming.

For citation: V.V. Afonin. Modeling the motion of linear control objects to an external functional trajectory. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2025; 52(1):49-56. (In Russ) DOI:10.21822/2073-6185-2025-52-1-49-56

Введение. В теории автоматического управления и оптимального управления принято выделять звенья и объекты по характеру дифференциальных уравнений, описывающих звенья и объекты [1, 2, 3]. Если звено описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами не выше второго порядка, то такое звено принято называть типовым или элементарным [3].

Типовое динамическое звено – это математическая модель элемента системы автоматического управления (САУ), отражающая определенные динамические свойства элемента вне зависимости от физической природы протекающих в нем процессов. Именно эта абстракция позволяет проводить широкие исследования, как на аналитическом, так и на математико-программном уровне. В качестве базовой математической модели исследуемых объектов управления приняты такие, которые состоят из колебательных и апериодических (инерционных) звеньев первого порядка. Для таких объектов ставится задача их перевода из нулевого состояния в некоторую точку цели внешней траектории чего-либо. Например, внешние траектории могут отображать движение летательных и беспилотных летательных аппаратов [4, 5, 6].

Постановка задачи. Перевод объекта управления из одного состояния в некоторое заданное другое рассматривается с помощью методов теории оптимального управления [1, 7, 8, 9], а также с помощью методов решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений [10–12]. При решении задач управления с краевыми условиями принято использовать методы оптимального управления, например, методы оптимального по быстродействию управления динамическими объектами [1, 13, 14]. При рассмотрении задач оптимального управления учитываются особенности структурных схем объектов управления, представленных в виде некоторой совокупности отдельных звеньев [15, 16].

Далее рассматриваются объекты управления, представленные в виде параллельного соединения типовых звеньев – двух колебательных звеньев и одного апериодического звена первого порядка. На модельной внешней траектории движения чего-либо (возможно дрона) фиксируются маркеры цели, к которым необходимо сформировать движение объекта управления, находящегося в нулевом исходном состоянии. Предполагается, что рассмотрение движения осуществляется в прямоугольной декартовой системе координат.

Методы исследования. Математическое описание звеньев объекта управления задаются в виде следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$T_1^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \alpha_1 u(t); \quad (1)$$

$$T_2^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \alpha_2 u(t); \quad (2)$$

$$T_3 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \alpha_3 u(t); \quad (3)$$

$$T_1^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 2\xi T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \alpha_1 u(t); \quad (4)$$

$$T_2^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 2\xi T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \alpha_2 u(t); \quad (5)$$

$$T_3 \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = \alpha_3 u(t), \quad (6)$$

где $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ – постоянные времени звеньев колебательных звеньев (1), (2), (4), (5) и одного инерционного звена с постоянной времени $T_3 > 0$, $0 < \xi < 1$ – коэффициент демпфирования колебательных звеньев, α_i – статические коэффициенты передачи, $i = 1, 2, 3$.

Для статических коэффициентов передачи принято условие в соответствии с примерами из [17]:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1. \quad (7)$$

Уравнения (4), (5), (6) описывают неустойчивые звенья [2, 18]. Структурная схема исследования объектов управления представляет собой параллельное соединение типовых звеньев с заданными параметрами, как показано на рис. 1.

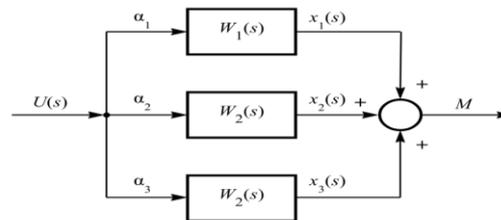


Рис. 1 - Структурная схема объектов управления
 Fig. 1- Structural diagram of control objects

На рис. 1 представлены передаточные функции, отвечающие соответствующим дифференциальным уравнениям (1), (2), (3) или (4), (5), (6). Вид таких передаточных функций хорошо известен [2, 3]. В случае решения линейной задачи быстрогодействия может быть применена теорема об n -интервалов Фельдбаума А.А. для объектов управления, чьи полюса являются вещественными отрицательными или нулевыми, а управление допустимо максимально с возможным изменением знаков за период управления [15, 17].

Следуя [18], сумматор на рис. 1 реализует следующую операцию:

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = M, \quad (8)$$

где: M – константа на гиперплоскости в соответствии с уравнением (8).

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$, переменные состояния объекта управления должны быть нулевыми: $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$. Для схемы объекта управления, представленного на рис. 1, требуется один интервал максимально-допустимого управления (положительного или отрицательного). При заданной величине M задача сводится к определению момента окончания управляющего воздействия [17]. Для снятия точек с внешней траектории принимаются следующие функциональные зависимости, моделирующие внешние траектории движения чего-либо:

$$f_1(x) = 153 \cdot |0,4 \cos(0,015x) - 0,035| \cdot (x^{-0,0015x}) + e^{-0,053x} + 5,3; \quad (9)$$

$$f_2(x) = -\sqrt{\frac{2x^3 - 42x^2 + 240x}{125}} + 35; \quad (10)$$

$$f_3(x) = 953 \frac{\sin(0,153 \cdot x)}{x}. \quad (11)$$

Уравнения (9), (10), (11) сформированы на основе [19, 20]. В частности, уравнение траектории (10) без слагаемого 35 в соответствии с [20] называется «Кривая рыбака» в случае знака \pm перед корнем квадратным. Некоторые подходы к программированию задач аналитической геометрии даны в [21], которые были использованы при разработке предлагаемой методике вывода объекта управления в точку модельной внешней траектории.

Обсуждение результатов. Приведенные дифференциальные уравнения (1) – (6) формально могут быть записаны относительно независимой переменной x , как это принято в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [22]. Опираясь на изложенный материал, предлагается производить решение дифференциальных уравнений (1) – (6),

интегрируя сначала относительно входного постоянного управления при заданной координате M внешней траектории движения чего-либо. А потом, подставляя найденное постоянное управление в исходные дифференциальные уравнения, найти общее уравнение движения объекта управления (ОУ). Схема предлагаемого алгоритма решения рассматриваемой задачи показана на рис. 2.

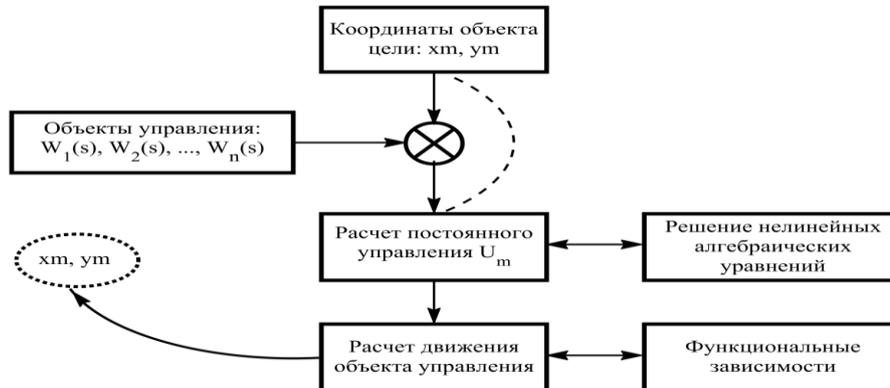


Рис. 2 - Схема вывода объекта управления в точку внешней траектории
 Fig. 2 - Scheme of output of the control object to the point of the external trajectory

Приведем параметры звеньев (устойчивых и неустойчивых) исследуемых объектов управления: $T_1 = 2,3$ (усл. ед.); $T_2 = 1,15$ (усл. ед.); $T_3 = 1,53$ (усл. ед.); $\alpha_1 = 0,2$ (усл. ед.); $\alpha_2 = 0,3$ (усл. ед.); $\alpha_3 = 0,5$ (усл. ед.); $\xi = 0,05$ (относительный коэффициент демпфирования колебательных звеньев). Программная реализация схемы рис. 2 была выполнена как в MATLAB, так и с помощью Питона (Python). Результаты проведенного моделирования для внешней траектории (9) и заданных дифференциальных уравнений (1) – (6) с учетом параметров звеньев сведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты вывода объектов управления на траекторию (9)
 Table 1. Results of outputting control objects to the trajectory (9)

№ п/п	Управление неустойчивым объектом управления, усл. ед. Control of an unstable control object, conventional units	Управление устойчивым объектом управления, усл. ед. Control of a stable control object, conventional units	X-координата, усл. ед. X-coordinate, conventional units	Y-координата, усл. ед. Y-coordinate, conventional units
1	1.53100200795961	64.9564479108299	6.68896321070234	60.4897625144916
2	9.0148892049463e-08	43.6230794939201	31.7725752508361	47.0607205991632
3	4.9642144393488e-22	15.2256901061837	80.2675585284281	15.0999645088432
4	1.06749564218036e-27	5.33852298274691	98.6622073578595	5.40580588952096
5	1.48294106494829e-32	12.7860368524329	117.056856187291	12.5022209883224
6	8.49073835885867e-43	19.7011612309200	153.846153846154	19.8402264343567
7	3.02501233902200e-53	19.5582585892736	190.635451505017	19.5914329882999
8	8.58127195073736e-64	15.3664588150038	227.424749163880	15.4038260110179
9	4.80012583229948e-85	6.61791215076245	301.003344481605	6.61919742072604
10	1.60426094171674e-95	6.13092394842988	337.792642140468	6.13148413071638
11	7.52764965741246e-127	6.12599015585984	448.160535117057	6.12581189078810
12	2.48878154910767e-137	5.61344581458496	484.949832775920	5.61343790540170

В табл. 1 символ «e» определяет собой экспоненциальную форму представления в данном случае малого числа. Графическая интерпретация результатов табл. 1 показана на рис. 3 и на рис. 4. Из рис. 4 по сравнению с рис. 3 можно сделать заключение, что неустойчивый объект в определенной степени «выпрямляет» траектории движения объекта управления.

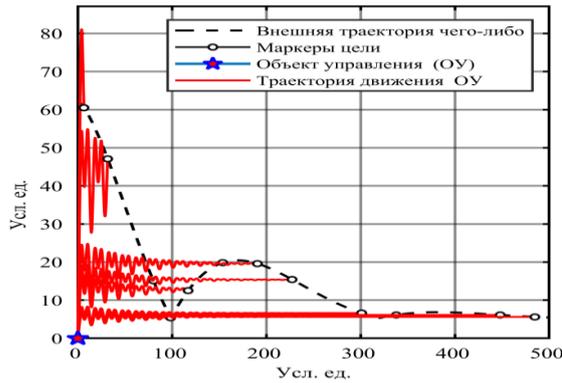


Рис. 3 - Вывод устойчивого объекта на внешнюю траекторию (9) чего-либо
Fig. 3 - Bringing a stable object to the external trajectory (9) of something

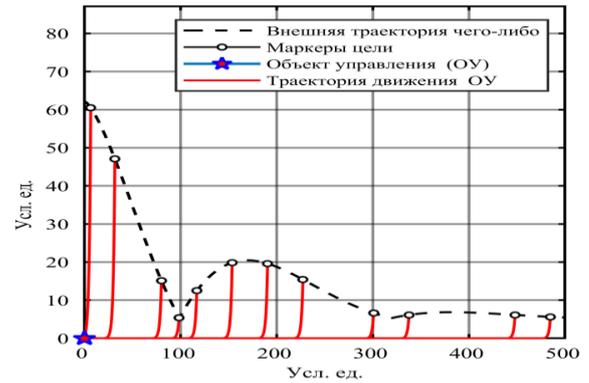


Рис. 4 - Вывод неустойчивого объекта на внешнюю траекторию (9) чего-либо
Fig. 4 - Bringing an unstable object to the external trajectory (9) of something

Результаты программно-численного моделирования для внешней траектории (10) чего-либо и заданных дифференциальных уравнений (1) – (6) с учетом параметров звеньев сведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты вывода объектов управления на траекторию (10)
Table 2. Results of outputting control objects to the trajectory (10)

№ п/п	Управление неустойчивым объектом управления, усл. ед. Control of an unstable control object, conventional units	Управление устойчивым объектом управления, усл. ед. Control of a stable control object, conventional units	X-координата, усл. ед. X-coordinate, conventional units	Y-координата, усл. ед. Y-coordinate, conventional units
1	104.934402778719	148.078569636877	0.655518394648829	33.9423036746312
2	0.828728192674316	35.9485074331404	6.71906354515050	33.3922034392907
3	0.00126181845065293	32.9731862743380	16.5518394648829	31.4955169333361
4	0.000138549379667714	26.8442409069638	19.8294314381271	29.4585102658880
5	1.49642680857725e-05	26.0856577563494	23.1070234113712	27.1028051905186
6	1.58682895418889e-06	23.1544475729942	26.3846153846154	24.4817167221387
7	1.64546552433915e-07	28.0449694865731	29.6622073578595	21.6248719771180
8	1.65722393199222e-08	16.1342854072826	32.9397993311037	18.5523516940490
9	1.60225436742973e-09	16.0051569375310	36.2173913043478	15.2792574174158
10	1.45481217225637e-10	10.3819207259786	39.4949832775920	11.8176390620524
11	7.40931032282361e-13	4.19731392596699	46.0501672240803	4.36724547430186
12	2.01443869267938e-13	2.52213541220598	47.3612040133779	2.79721003832015

Графическая интерпретация результатов табл. 2 показана на рис. 5 и на рис. 6.

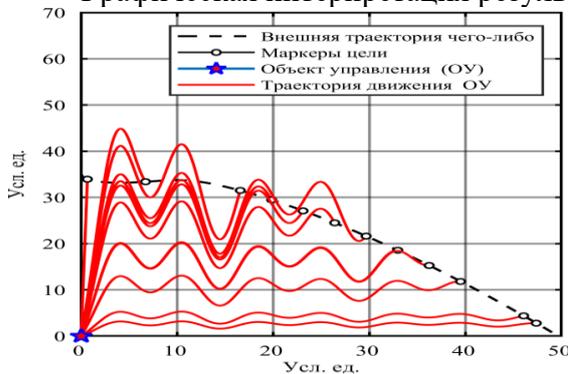


Рис. 5 - Вывод устойчивого объекта на внешнюю траекторию (10) чего-либо
Fig. 5 - Bringing a stable object to the external trajectory (10) of something

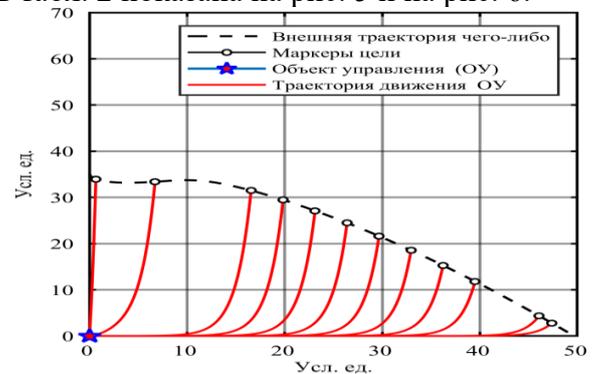


Рис. 6 - Вывод неустойчивого объекта на внешнюю траекторию (10) чего-либо
Fig. 6 - Bringing an unstable object to the external trajectory (10) of something

Результаты программно-численного моделирования для внешней траектории (11) чего-либо и заданных дифференциальных уравнений (1) – (6) с учетом параметров звеньев сведены в табл. 3. Графическая интерпретация результатов табл. 3 показана на рис. 7-8.

Таблица 3. Результаты вывода объектов управления на траекторию (11)

Table 3. Results of outputting control objects to the trajectory (11)

№ п/п	Управление неустойчивым объектом управления, усл. ед. Control of an unstable control object, conventional units	Управление устойчивым объектом управления, усл. ед. Control of a stable control object, conventional units	X-координата, усл. ед. X-coordinate, conventional units	Y-координата, усл. ед. Y-coordinate, conventional units
1	130.625456979984	253.057779173788	1.50501672240803	144.523869774739
2	0.566219838693314	93.0367379274073	9.03010033444816	103.652817285454
3	0.0117027081275775	87.2532642495650	14.0468227424749	56.8100296030409
4	0.000495041478246916	20.8373753553715	17.5585284280936	23.8588073590797
5	-5.3335872467448e-06	-18.3892927453447	24.3311036789298	-21.4999060138490
6	-2.02388867318283e-09	-18.9810927962086	36.1204013377926	-18.1145082605818
7	4.71529948191318e-12	12.6335854847770	44.6488294314381	11.1215602905579
8	2.76932727946069e-14	15.8148375128981	53.1772575250836	17.2126299918247
9	1.03738991924799e-16	4.75592417259797	59.6989966555184	4.57749204414243
10	-2.98410703318549e-18	-9.30891555748225	66.2207357859532	-9.34786854079103
11	-3.56377561351264e-19	-12.9555968936520	69.9832775919732	-13.0561711818071
12	-1.67968748206755e-20	-11.8365475217377	74.4983277591973	-11.7690852886874

Маркеры цели на графиках рис. 3, рис. 5, рис. 7, соответственно на рис. 4, рис. 6, рис. 8, «назначены» довольно произвольно с целью разметить характерные участки заданных внешних траекторий.

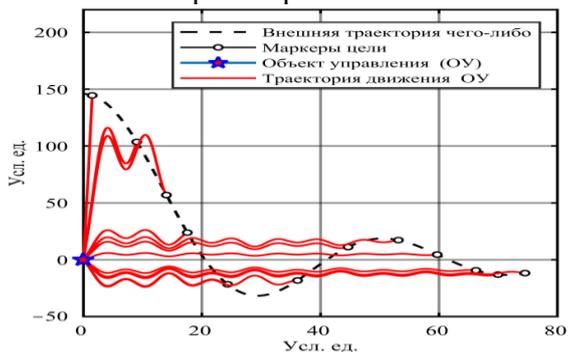


Рис. 7 - Вывод устойчивого объекта на внешнюю траекторию (11) чего-либо
Fig. 7- Bringing a stable object to the external trajectory (11) of something

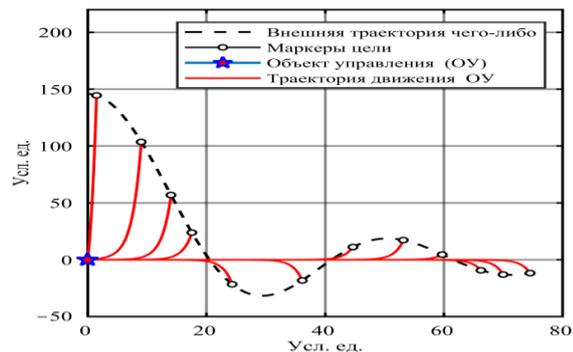


Рис. 8 - Вывод неустойчивого объекта на внешнюю траекторию (11) чего-либо
Fig. 8 -Bringing an unstable object to the external trajectory (10) of something

Исследованию динамических объектов управления посвящено достаточно много работ и публикаций. В частности, задачам оптимального управления как линейных, так и нелинейных объектов управления [9, 15, 23, 24]. В ряде случаев предлагаются эвристические решения [1]. Также здесь предлагается эвристическое решение моделирования двухточечной задачи управления. В отличие от классических краевых задач [12] можно предположить, что аппарат теории автоматического управления и оптимизации более восприимчив для конструктивного решения задач управления, включая необходимое программирование для получения численных результатов.

Вывод. Изложенные в статье результаты моделирования вывода объекта управления в точку внешней траектории движения чего-либо могут быть распространены на объекты управления с той или иной степенью астатизма. Кроме того, объекты могут состоять из последовательного соединения звеньев, когда на входе скалярное управление. Приведенные результаты моделирования могут быть распространены на реальные практические задачи управления с целью обоснования необходимой структуры даже в плане применения неустойчивых звеньев, составляющих объект управления.

Библиографический список:

1. Теория автоматического управления: учеб. для вузов / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев [и др.]; под ред. В.Б. Яковлева. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 2005. – 567 с.
2. Яковлева Д.А. Теория автоматического управления: учебное пособие. / Д.А. Яковлева, Е.Б. Биктеева. – М.: ИД Академии Жуковского, 2018. – 80 с.
3. Шамшина И.Г. Основы автоматического управления машиностроительными объектами и системами: учебное пособие для вузов / Политехнический институт ДВФУ. – Владивосток: Изд-во Дальневост. федерал. ун-та, 2024. – 128 с.
4. Методы оптимизации управления летательными аппаратами : учебное пособие / Соловьев В.А., Бетанов В.В., Корянов В.В. ; ред. Соловьев В. А.; МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т). – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022. – 194 с.
5. Соколов С.В., Охотников А.Л. Робастное позиционирование беспилотных объектов с использованием спутниковых измерений и данных цифровой модели пути // Мехатроника, автоматизация, управление. 2024; 25(7): С. 372–379. – <https://doi.org/10.17587/mau.25.372-379>
6. Деменков Н.П., Цзоу К. Метод прогнозирования траектории на основе графовой модели для беспилотного вождения // Автоматизация. Современные технологии. 2022. Т. 76. № 9. С. 408-413.
7. Ловчаков В.И., Шибякин О.А. Решение задачи быстродействия по выходной координате для линейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 9. С. 532-541.
8. Yang X.-S. Nature-Inspired Optimization Algorithms, 2nd Edition. – Academic Press, 2020. – 310 p.
9. Р.В. Гусейнов, М.Р. Гусейнова, К.А. Алиева. Некоторые вопросы многокритериальной оптимизации параметров сложных систем. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023; 50(2): 67-75. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-2-67-75
10. Shampine, L.F., and J. Kierzenka. "A BVP Solver based on residual control and the MATLAB PSE." ACM Trans. Math. Softw. Vol. 27, Number 3, 2001, pp. 299-316.
11. Shampine, L.F., and J. Kierzenka. "A BVP Solver that Controls Residual and Error." J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math. Vol. 3(1-2), 2008, pp. 27-41.
12. Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. – Томск: СТУ, 2016. – 44 с.
13. Ловчаков В. И., Ловчаков Е. В., Кретов Е. И. Синтез быстродействующих систем управления с использованием теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – Т. 17, № 2. – С. 84-93.
14. Ловчаков В.И., Шибякин О.А. Решение задачи быстродействия по выходной координате для линейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 9. С. 532-541.
15. Олейников В.А. Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности. – Л.: Недра, 1982. – 216 с.
16. Хорошавин В.С. Структурный синтез управляющих устройств оптимальных систем : [монография] / В.С. Хорошавин. – Киров: Вятский государственный университет, 2020. – 132 с.
17. Олейников В.А., Зотов Н.С., Пришвин А.М. Основы оптимального и экстремального управления: Учеб. пособие (гриф МО СССР). – М.: Высш. школа, 1969. – 296 с.
18. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1.Линейные системы . 2-е изд., испр. и доп. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 312 с.
19. Кривые на плоскости: учеб. пособие / Н.Ф. Попельшева, Т.В. Василькина, В.В. Афонин. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2014. – 256 с.
20. Мир математики: в 40 т. Т. 29: Жюзеппе Салес, Франсеск Баньюле. Таинственные кривые. Эллипсы, гиперболы и другие математические чудеса. / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.
21. Александров Э.Э. Программирование на языке С в Microsoft Visual Studio 2010 : учеб. пособие / Э.Э. Александров, В.В. Афонин. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2010. – 424 с.
22. Зайцев В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. В 2 частях. Ч. 1: справочник для вузов / В.Ф. Зайцев, А.Д. Поляник. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 385 с.
23. Сухинин Б. В., Сурков В. В. Аналитическое конструирование робастных оптимальных по быстродействию систем управления с бесконечно большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление, Том 21, № 8, 2020. С. 453-463. DOI: 10.17587/mau.21.453-463
24. Методы оптимизации управления летательными аппаратами : учебное пособие / Соловьев В.А., Бетанов В.В., Корянов В.В.; ред. Соловьев В.А.; МГТУ им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т). – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2022. – 194 с.

References:

1. Theory of automatic control: textbook. for universities. S.E. Dushin, N.S. Zotov, D.Kh. Imaev [etc.]; edited by V.B. Yakovleva. – 2nd ed., revised. M.: *Higher. school*, 2005:567. (In Russ)

2. Yakovleva D.A., E.B. Bikteeva Automatic control theory: a tutorial. M.: Zhukovsky Academy ID, 2018: 80. (In Russ)
3. Shamshina I.G. Fundamentals of automatic control of mechanical engineering objects and systems: a textbook for universities. *Polytechnic Institute of FEFU. – Vladivostok: Publishing house of the Far Eastern Federal University*, 2024:128. (In Russ)
4. Methods of Optimization of Aircraft Control: a tutorial / Soloviev V.A., Betanov V.V., Koryanov V.V.; ed. Soloviev V.A.; Bauman Moscow State Technical University (National Research University). – Moscow: Publishing house of Bauman Moscow State Technical University, 2022:194. (In Russ)
5. Sokolov S.V., Okhotnikov A.L. Robust positioning of unmanned objects using satellite measurements and digital path model data. *Mechatronics, automation, control*. 2024;25(7):372–379. DOI.ORG/10.17587/mau.25.372-379 (In Russ)
6. Demenkov N.P., Zou K. Trajectory prediction method based on a graph model for unmanned driving // Automation. *Modern technologies*. 2022;76(9):408-413. (In Russ)
7. Lovchakov V.I., Shibyakin O.A. Solution of the problem of high-speed response by the output coordinate for linear dynamic systems. *Mechatronics, automation, control*. 2019;20(9): 532-541. (In Russ)
8. Yang X.-S. Nature-Inspired Optimization Algorithms, 2nd Edition. – *Academic Press*, 2020:310.
9. R.V. Guseynov, M.R. Guseynova, K.A. Alieva. Some issues of multicriterial optimization of parameters of complex systems. *Herald of the Daghestan State Technical University. Technical sciences*. 2023; 50(2): 67-75. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-2-67-75(In Russ)
10. Shampine, L.F., and J. Kierzenka. "A BVP Solver based on residual control and the MATLAB PSE." *ACM Trans. Math. Softw.* 2001; 27(3): 299-316.
11. Shampine, L.F., and J. Kierzenka. "A BVP Solver that Controls Residual and Error." *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.* 2008; 3(1-2): 27-41.
12. Kraynov A.Yu., Moiseeva K.M. Numerical methods for solving boundary value problems for ordinary differential equations: a tutorial. – Tomsk: STT, 2016:44. (In Russ)
13. Lovchakov V. I., Lovchakov E. V., Kretov E. I. Synthesis of high-speed control systems using the theory of analytical design of optimal controllers. *Mechatronics, automation, control*. 2016;17(2):84-93. (In Russ)
14. Lovchakov V.I., Shibyakin O.A. Solution of the problem of high-speed response by the output coordinate for linear dynamic systems. *Mechatronics, automation, control*. 2019;20(9):532-541. (In Russ)
15. Oleynikov V.A. Optimal control of technological processes in the oil and gas industry. L.: *Nedra*, 1982: 216. (In Russ)
16. Khoroshavin V.S. Structural synthesis of control devices of optimal systems. Kirov: Vyatka State University, 2020:132. (In Russ)
17. Oleynikov V.A., Zotov N.S., Prishvin A.M. Fundamentals of optimal and extreme control: Textbook (approved by the USSR Ministry of Defense). Moscow: *Higher School*, 1969:296. (In Russ)
18. Kim D.P. Theory of automatic control. V.1. Linear systems 2nd ed., corrected. and add. M.: FIZMATLIT, 2016:312. (In Russ)
19. Curves on a plane: a tutorial. N.F. Popelysheva, T.V. Vasil'kina, V.V. Afonin. – Saransk: Publishing house of Mordov. University, 2014: 256. (In Russ)
20. The World of Mathematics: in 40 volumes. Volume 29: Josep Sales, Francesc Banyule. Mysterious Curves. Ellipses, Hyperbolas, and Other Mathematical Wonders. *Translated from Spanish. – Moscow: De Agostini*, 2014:160. (In Russ)
21. Aleksandrov E.E. Programming in C in Microsoft Visual Studio 2010: tutorial. E.E. Aleksandrov, V.V. Afonin. – Saransk: Publishing house of Mordov. University, 2010: 424. (In Russ)
22. Zaitsev V.F. Ordinary Differential Equations. In 2 parts. Part 1: Handbook for Universities. V.F. Zaitsev, A.D. Polyanik. – 2nd ed., corrected. and additional. Moscow: *Yurait Publishing House*, 2024:385 (In Russ)
23. Sukhinin B.V., Surkov V.V. Analytical design of robust, speed-optimal control systems with an infinitely large gain. *Mechatronics, automation, control*. 2020;21(8):453-463. DOI:10.17587/mau.21.453-463(In Russ)
24. Methods of Optimization of Aircraft Control: a textbook / Soloviev V.A., Betanov V.V., Koryanov V.V.; ed. Soloviev V.A.; Bauman Moscow State Technical University (National Research University). Moscow: *Publishing house of Bauman Moscow State Technical University*, 2022: 194 (In Russ)

Сведение об авторе:

Афонин Виктор Васильевич, кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления; vvafonin53@yandex.ru.

Information about author:

Viktor V. Afonin, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department of Automated Information Processing Systems and Management; vvafonin53@yandex.ru.

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов/The author declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 08.08.2024.

Одобрена после/рецензирования Revised 30.09.2024.

Принята в печать/ Accepted for publication 17.01.2025.