

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.04

DOI: 10.21822/2073-6185-2024-51-4-236-248



Оригинальная статья /Original article

Расчетные модели балок с односторонними связями

А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Р.И. Вишталов

Дагестанский государственный технический университет,
367015, г. Махачкала, пр. И.Шамиля,70, Россия

Резюме. Цель. В статье рассматриваются особенности работы балочных конструкций, обладающих односторонними связями. **Метод.** Путём исследования особенностей работы опор балочных конструкций выводятся аналитические и графические зависимости между перемещениями балок и реакциями их опор. Используются свойства обобщённых функций, которые позволяют описывать нелинейности, проявляющиеся при деформациях конструкций. Приводятся дифференциальные уравнения поперечного изгиба балок, учитывающие нелинейности и методы их решения. **Результат.** Разработаны конструктивные и расчётные схемы, учитывающие работу опор балочных конструкций, позволяющие получать на этом основании более точные значения прогибов и внутренних усилий сечений, что обеспечивает необходимую надёжность работы конструкции. Результаты даются в виде аналитических выражений графиков и таблиц. **Вывод.** Расчётные модели балок с односторонними связями могут найти широкое применение при проектировании балочных конструкций, имеющих опоры с односторонними связями.

Ключевые слова: балки, опоры, односторонние связи, нелинейности, обобщённые функции, включающиеся и выключающиеся связи, дифференциальные уравнения, поперечный изгиб, внутренние усилия, прогибы, перемещения

Для цитирования: А.К. Юсупов, Х.М. Муселемов, Р.И. Вишталов. Расчётные модели балок с односторонними связями. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(4): 236-248. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-236-248

Calculation models of beams with one-way connections

A.K. Yusupov, Kh.M. Muselemov, R.I. Vishtalov

Daghestan State Technical University,
70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367015, Russia

Abstract. Objective. The article considers the operational features of beam structures with one-way ties. **Method.** By studying the operational features of beam structure supports, analytical and graphical dependencies between beam displacements and their support reactions are derived. The properties of generalized functions are used to describe the nonlinearities that occur during structural deformations. Differential equations for transverse bending of beams are presented, taking into account nonlinearities and methods for their solution. **Result.** Design and calculation schemes have been developed that take into account the operation of beam structure supports, allowing us to obtain precise values of deflections and internal forces of sections on this basis, which ensures the necessary reliability of the structure. The results are given in the form of analytical expressions, graphs, and tables. **Conclusion.** Calculation models of beams with one-way connections can find wide application in the design of beam structures with supports with one-way connections.

Keywords: beams, supports, one-way connections, nonlinearities, generalized functions, switching on and off connections, differential equations, transverse bending, internal forces, deflections, displacements

For citation: A.K. Yusupov, Kh.M. Muselemov, R.I. Vishtalov. Calculation models of beams with one-way connections. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024;51(4): 236-248. DOI:10.21822 /2073-6185-2024-51-4-236-248

Введение. В практике проектирования и строительства встречаются сложные ситуации, в которых связь между реакциями опор и прогибами балки описываются нелинейными функциями [1, 2]. Причем, опора вступает в работу не сразу, а только при достижении прогибами определённого их значения. При этом некоторые опоры на определенном уровне напряженного состояния разрушаются и выходят из строя, то есть связь отключается, и балка теряет опору [3-6]. При этом расчетная схема балки существенно меняется. Учет влияния особенностей работы односторонних связей на работу балочных конструкций дает существенную поправку в величинах перемещений и внутренних усилий (изгибающих моментов, поперечных сил, осевых усилий, крутящих моментов в сечениях балок) [7, 8]. На рис. 1 приведена конструктивная схема балочной фермы, лежащая на промежуточной опоре, которая работает при положительных прогибах конструкции.



Рис.1. Конструктивная схема

Fig. 1. Structural diagram

На рис. 2 приводятся конструктивные схемы шпренгельной балки с одной стойкой. Поскольку растяжки шпренгельной балки – гибкие, то при отрицательных перемещениях горизонтальной переключины, вертикальная стойка шпренгельной балки не оказывает сопротивления прогибам. Это стойка работает только при положительных прогибах. Другими словами, горизонтальная переключина шпренгельной балки в середине пролета имеет одностороннюю связь.

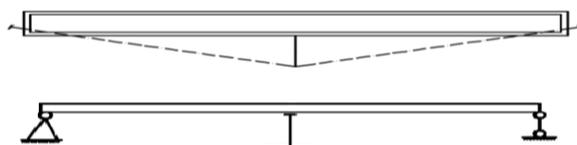


Рис. 2. Конструктивная и расчётная схемы

Fig. 2. Design and calculation schemes

На рис. 3 дается конструктивная схема неразрезного балочного моста вблизи Монтабаре (ФРГ). Промежуточные опоры работают, когда пролетное строение моста получает положительные перемещения по вертикали (прогибы). При отрицательных прогибах промежуточные колонны не оказывают сопротивления прогибам, то есть опоры обладают односторонними связями [1, 2].

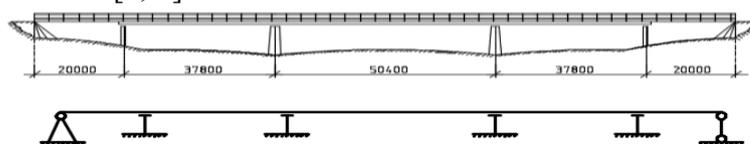


Рис. 3. Конструктивная и расчётная схемы

Fig. 3. Design and calculation schemes

Постановка задачи. Как обычно, при расчёте и компоновке балочных конструкций их опоры рассматриваются как линейные системы. И для описания особенностей работы этих опор пользуются моделью Винклера. Как уже было показано в предыдущих примерах, работа опор балочных конструкций далеко не всегда подчиняется линейным зависимостям: эти зависимости существенно нелинейны и для их описания необходимо пользоваться обобщёнными функциями, которые позволяют учитывать дискретность опор

и скачкообразные изменения их реакций. Обычные функции не позволяют проделать эти процедуры. В данной статье разработаны алгоритмы с использованием обобщённых функций, что позволяет вводить в дифференциальные уравнения поперечного изгиба балок соответствующие звенья.

Таким образом, уравнения приспособляются к особенностям работы опор балок с односторонними связями. Всё это позволяет путём решения этих дифференциальных уравнений получать значения перемещений и внутренних усилий в сечениях балок с учётом особенностей работы опор.

Методы исследования. В инженерной практике нередко встречаются конструкции, имеющие односторонние связи. К таким односторонним связям можно отнести опоры, которые допускают перемещения или только вверх или только вниз.

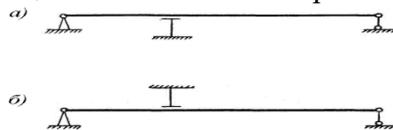


Рис.4. Расчётные схемы балки с односторонней связью
Fig.4. Calculation schemes of a beam with a one-way connection

На рис.4а показана балка со средней опорой, представляющей собой одностороннюю связь. На средней опоре балка может перемещаться только вверх. На схеме «б» рис. 4 приведена другая ситуация: здесь средняя опора допускает прогибы балки только вниз.

На рис.5 показаны связи (опоры), которые включаются в работу не сразу (не с нуля), а прежде допускают возрастание перемещения балки на опоре до определенного уровня u_1 . Только после достижения перемещениями этого уровня связь включается в работу.

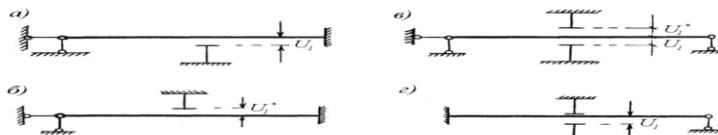


Рис. 5. Расчётные схемы балки с включающимися связями
Fig. 5. Calculation schemes of a beam with included connections

Связи с такими свойствами обычно называют включающимися. Этот термин вполне соответствует их особенности: связь включается в работу при достижении перемещениями определенного уровня u . Варианты односторонних связей показаны на рис. 5.

Рассмотрим балки, с так называемыми, выключающимися связями. Эти связи занимают противоположный полюс по отношению к рассмотренным выше. Включающиеся связи начинают препятствовать перемещениям балки не с самого начала развития прогибов, а вовлекаются в работу только при достижении перемещениями определенного уровня u , и наоборот, выключающиеся связи участвуют в работе балки с самого начала, с самых малых перемещений и выключаются из работы при достижении перемещениями или напряжениями, или внутренними усилиями определенного обобщенного уровня R . Однако и включающиеся, и выключающиеся связи служат для одной и той же цели: изменению структуры системы (в нашем случае балочной системы). Причем подбирая уровни u и R , о которых говорилось выше, можно [1] заранее «запрограммировать» режим изменения структуры (жесткости) балочной конструкции таким образом, чтобы приспособить работу балки к изменениям внешних сил $q(x)$. При этом обычно исходят из каких-то дополнительных требований, накладываемых на конструкцию условиями эксплуатации. Связи включающиеся и выключающиеся, и их комбинации находят широкое применение при проектировании различных систем, в частности, при проектировании сейсмостойких конструкций, то есть при разработке адаптирующихся (приспосабливающихся) систем.

На рис. 6 приведены схемы выключающихся связей. На рис. 6а средняя опора – выключающаяся. Она показана пунктирной линией. Когда реакция этой опоры X дости-

гает величины R ($X = R$), опора выключается (разрушается), и балка приобретает новую структуру: балка работает по рис. 6б.

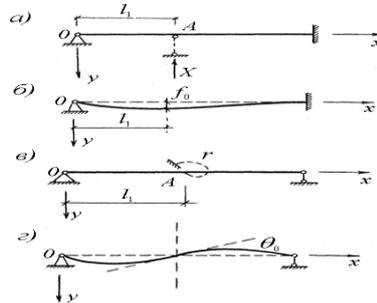


Рис. 6. Расчётные схемы балки с выключающимися связями
Fig. 6. Calculation schemes of a beam with switching connections

На рис. 6в пунктиром показана выключающаяся связь, которая перестает препятствовать повороту балки тогда, когда возникающий в ее сечении ($x = l_1$) изгибающий момент $M(l_1) = -EJ \cdot y''(l_1)$ становится равным R . После выключения этой связи балка начинает работать по другой схеме, приведенной на рис. 6г.

Далее условимся: выключающиеся связи, как и здесь, показывать пунктирной линией, а включающиеся и обычные связи – сплошной. Рассмотрим алгоритм построения функции прогибов $y(x)$ и внутренних усилий $M(x)$, $Q(x)$ в сечениях балки (рис. 7а). Запишем дифференциальное уравнение поперечного изгиба балки (рис. 7б) под воздействием внешней поперечной нагрузки $q(x)$. Это уравнение имеет вид [3, 6]

$$EJ y^{IV}(x) = q(x) - X_l \cdot \delta(x - l_l), \quad (1)$$

где EJ – жесткость поперечного сечения балки, $y(x)$ – функция прогибов, X_l – реактивная сила на средней опоре.

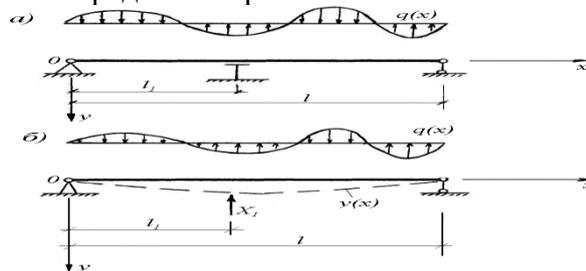


Рис. 7. Расчётные схемы балки с включающейся связью
Fig. 7. Calculation schemes of a beam with a switching connection

От заданной системы (рис. 7а) перейдем к основной (рис. 7б). Поскольку крайние опоры заданной балки шарнирные, то функция Грина должна отвечать шарнирным граничным условиям на концах балки. Поэтому достаточно вместо средней односторонней опоры в основную систему ввести реактивную силу X_l , сохранив при этом крайние опоры без изменения.

Для определения силы X_l необходимо иметь условие совместности деформаций на опоре. Заметим, что средняя опора (см. рис. 7а) – односторонняя, связь препятствует перемещению балки «вниз» и допускает свободные перемещения «вверх». Очевидно при $y(l) \geq 0$ в основной системе (рис. 7б) к балке прикладывается сила X_l , а когда перемещение $y(l) \leq 0$ реакция опоры X_l обращается в нуль. Такие избирательные свойства односторонней связи можно моделировать с помощью единичной функции. Поэтому условие совместности деформаций, вернее условие совместности прогибов, на средней опоре запишем виде:

$$y(l) = y(l) - y(l) \cdot e[y(l)]. \quad (2)$$

$e(x)$ – единичная функция

Здесь: $y(l)$ – перемещение балки в точке $x = l$ (см. рис. 7). Из условия (2) следует:

$$1. \text{ при } y(l_1) \geq 0: \quad y(l_1) = y(l_1) - y(l_1) \cdot 1$$

$$\text{или } y(l_1) = 0 \quad (3)$$

$$2. \text{ при } y(l_1) < 0: \quad y(l_1) = y(l_1) - y(l_1) \cdot 0$$

$$\text{или } y(l_1) \equiv y(l_1). \quad (4)$$

Таким образом, в зависимости от знака прогиба $y(l_1)$ условие (2) вырождается в уравнение (3) или в тождество (4)

Рассматриваемый пример – простейший: балка содержит только одну одностороннюю связь (рис. 7а). Поэтому неизвестную X_1 , входящую в уравнение (1), можно определить, как обычно, пользуясь уравнением совместности деформаций (3). Однако, мы здесь поступим иначе: на примере рассматриваемой простейшей задачи изложим алгоритм, пригодный и для сложных систем, когда число односторонних связей велико, а характер работы отдельных связей – различный.

Решение уравнения (1) представим в интегральной форме:

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) \cdot [q(\xi) - X_1 \cdot \delta(\xi - l_1)] d\xi.$$

$$\text{или} \quad y(x) = y_0(x) - X_1 \cdot G(x, l_1), \quad (5)$$

$$\text{где введено обозначение} \quad y_0(x) = \int_0^l G(x, \xi) \cdot q(\xi) d\xi. \quad (6)$$

$G(x, \xi)$ – функция Грина.

Для определения неизвестной реакции X_1 воспользуемся условием совместности деформаций (прогибов) на опоре (2). Поскольку выражение (2) содержит единичную функцию, то условие совместности деформаций (3.2) представляет собой нелинейное уравнение. Находить решение нелинейных уравнений обычными способами не удастся. Единственный и универсальный метод, «работающий» при построении решения нелинейных уравнений, – это метод последовательных приближений (итераций) в различных его модификациях. Поэтому условие (3.2) представим в итерационном режиме:

$$y_{n+1}(l_1) = y_n(l_1) - y_n(l_1) \cdot e [y_n(l_1)], \quad (7)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – шаг итераций. Из функции прогибов (5) найдем

$$y_n(x) = y_0(x) - X_1^{(n)} \cdot G(x, l_1), \quad (8)$$

$$y_{n+1}(x) = y_0(x) - X_1^{(n+1)} \cdot G(x, l_1). \quad (9)$$

Теперь, подставляя выражения (8) и (9) в итерационное уравнение (7), имеем

$$y_0(l_1) - X_1^{(n+1)} \cdot G(l_1, l_1) = y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) -$$

$$- [y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1)] \cdot e [y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1)],$$

или

$$X_1^{(n+1)} \cdot G(l_1, l_1) = X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) +$$

$$+ [y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1)] \cdot e [y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1)], \quad (10)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – шаг итераций.

Величину прогиба $y_0(l_1)$ легко вычислить с помощью интеграла (6):

$$y_0(l_1) = \int_0^l G(l_1, \xi) \cdot q(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Таким образом, мы получили процедуру (10), которая позволяет последовательными приближениями находить значения неизвестного X_1 .

При $n = 0$ примем $X_1^{(0)} = 0$. Тогда уравнение (10) записывается так:

$$X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) = y_0(l_1) \cdot e[y_0(l_1)] .$$

Отсюда
$$X_1^{(1)} = y_0(l_1) \cdot e[y_0(l_1)] / G(l_1, l_1) . \quad (12)$$

Мы нашли (12) значение неизвестного X_l в первом приближении (на первом шаге интеграций). Второй шаг:

$$n = 1, \quad X_1^{(1)} = y_0(l_1) \cdot e[y_0(l_1)] / G(l_1, l_1) . \quad (13)$$

Подставляя параметры (13) в итерационное уравнение (10), получаем:

$$X_1^{(2)} \cdot G(l_1, l_1) = X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) + \\ + [y_0(l_1) - X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1)] \cdot e[y_0(l_1) - X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1)] . \quad (14)$$

Из найденного значения $X_1^{(1)}$ (формула 13) следует, что

$$y_0(l_1) - X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) = 0$$

при $y_0(l_1) \geq 0$.

С учетом этого уравнения (14) представим в виде

$$X_1^{(2)} \cdot G(l_1, l_1) = X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) + 0 \cdot e(0) = \\ = X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) + 0 \cdot 1 = X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) . \quad (15)$$

Отсюда $X_1^{(2)} = X_1^{(1)}$

При $y_0(l_1) < 0$ из уравнений (13) и (14) также следует равенство (15). Значения неизвестного X_l , найденные в первом и втором приближениях совпали (15). Дальнейшие приближения никаких поправок в значение X_l не привнесут. Поэтому окончательно принимаем $X_1 = X_1^{(1)}$. Если на втором (рассматриваемом) шаге вместо условия (15) мы получили бы неравенство $X_1^{(2)} \neq X_1^{(1)}$, то нам пришлось бы продолжить последовательные приближения, то есть пойти на третий шаг (приняв $n = 2$, $X_1^{(n)} = X_1^{(2)}$ подставлять эти значения в уравнение (10)). Для получения окончательной функции прогибов, подставим в выражения (15) или (16) (поскольку $n = 1$, $X^{(2)} = X^{(1)}$) в формулу (13):

$$y(x) = y_1(x) = y_0(x) - \frac{y_0(l_1) \cdot e[y_0(l_1)]}{G(l_1, l_1)} \cdot G(x, l_1) . \quad (16)$$

Сравните выражения (11) и (16). Итерационный процесс (10) сходится достаточно быстро и в случае сложных задач, когда балка содержит много односторонних связей. При решении таких задач число «шагов» интеграций находится обычно в пределах 3; 4.

Теперь рассмотрим балку (рис. 8а), содержащую включающе-выключающуюся связь.

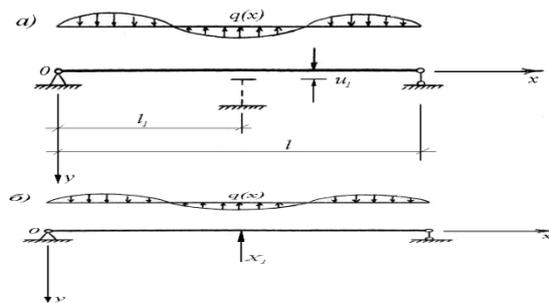


Рис. 8. Расчётные схемы балки
Fig. 8. Calculation schemes of the beam

Средняя опора включается в работу, $y(l_1) \geq u_1$, где $y(l_1)$ – прогиб балки на опоре. При достижении опорной реакцией X_l некоторого предельного уровня R_l конструкция средней опоры разрушается, то есть связь выключается. Суммируя сказанное, условие совместности деформации (прогибов) на средней опоре можно записать так:

$$y(l_1) = y(l_1) - [y(l_1) - u_1] \cdot e[y(l_1) - u_1] \cdot [e(X_1) - e(X_1 - R_1)], \quad (17)$$

где $R_l \geq 0$, $u_1 \geq 0$; e – единичная функция

Из условия (17) вытекают следующие ситуации:

1. $y(l_1) < u_1 \geq 0$;

$$y(l_1) = y(l_1) - [y(l_1) - u_1] \cdot 0 \cdot [e(X_1) - e(X_1 - R_1)] = y(l_1)$$

или $y(l_1) \equiv y(l_1)$ – тождество. (18)

При этом рис.8 а вырождается в рис. 9.

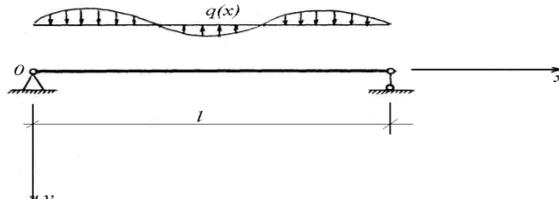


Рис. 9. Расчётная схема балки
 Fig. 9. Design diagram of the beam

2. $y(l_1) = u_1 \geq 0$. Здесь могут быть два случая. Первый случай:

а. Связь средней опоры еще не выключилась из работы $X_l < R_l$, то есть опорная реакция X_l не превысила предельного уровня R_l , при достижении которого средняя опора разрушается. Это значит в выражении (17) $e(X_1) - e(X_1 - R_1) = 1 - 0 = 1$. Тогда выражение (17) принимает вид

$$y(l_1) = y(l_1) - [y(l_1) - u_1] \cdot e[y(l_1) - u_1]$$

или

$$y(l_1) = y(l_1) - y(l_1) \cdot e[y(l_1) - u_1] + u_1 \cdot e[y(l_1) - u_1].$$

Поскольку $y(l_1) = u_1$,

$$\text{то } y(l_1) = y(l_1) - y(l_1) \cdot e(0) + u_1 \cdot e(0).$$

Отсюда

$$y(l_1) = y(l_1) - y(l_1) \cdot 1 + u_1 \cdot 1$$

или

$$y(l_1) = y(l_1) - y(l_1) + u_1.$$

Окончательно

$$y(l_1) = u_1. \quad (19)$$

При этом рис.8 а вырождается в рис.10.

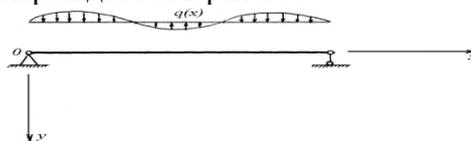


Рис. 10. Расчётная схема балки
 Fig. 10. Design diagram of the beam

Второй случай.

б. Связь средней опоры уже выключилась $X_l \geq R_l$ ($X_l \geq 0$, $R_l \geq 0$).

Тогда в выражении (17) единичная функция

$$e(X_1) - e(X_1 - R_1) = 1 - 1 = 0.$$

Теперь условие (17) записывается в виде тождества

$$y(l_1) \equiv y(l_1) \quad (20)$$

При этом рис. 8 преобразуется в рис.11.

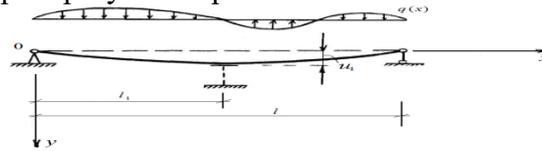


Рис. 11. Преобразованные расчётные схемы балки
Fig. 11. Transformed beam design schemes

Заметим: каждый раз, когда условие совместности деформаций (прогибов) возникает в тождество, в расчетной схеме «исчезает» соответствующая опора (связь), то есть $X_l = 0$. другими словами, балка деформируется беспрепятственно (сравните рис. 9 и 11, и тождества 18 и 20).

Таким образом, условие совместности деформаций (прогибов), записанное в виде выражения (17), учитывает все возможные изменения структуры балки: изгиб балки по схеме рис. 9, до включения в работу средней опоры (тождество 3.18); изгиб балки по схеме рисунка 10, после включения в работу средней опоры (уравнение 19);

В дальнейшем мы не будем так подробно пояснять работу односторонних связей и соответствующих им условий совместности деформаций типа (17). Как обычно, заменив среднюю опору ее реакцией X_l , получим основную систему (рис. 8б). Поскольку опоры балки в основной системе – шарнирные, то можем использовать функцию Грина $G(x, \xi)$ непосредственно без расширения области балки. Дифференциальное уравнение балки (рис. 8б) запишем в виде

$$EJ \cdot y^{IV}(x) = q(x) - X_1 \cdot \delta(x - l_1) \quad (21)$$

а его решение в интегральной форме :

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) [q(\xi) - X_1 \cdot \delta(\xi - l_1)] d\xi \quad (22)$$

или
$$y(x) = y_0(x) - X_1 \cdot G(x, l_1) \quad (22)$$

где введено обозначение

$$y_0(x) = \int_0^l G(x, \xi) \cdot q(\xi) d\xi \quad (23)$$

Для нахождения неизвестной силы X_l воспользуемся условием совместности деформаций (прогибов) (17), которое запишем в итерационном режиме:

$$y_{n+1}(l_1) = y_n(l_1) - [y_n(l_1) - u_1] \times \times e \cdot [y_n(l_1) - u_1] \cdot [e(X_1^{(n)}) - e(X_1^{(n)} - R_1)] \quad (24)$$

$n = 0, 1, 2, 3 \dots$ – шаг итераций.

Из функции прогибов (22) найдем:

$$y_n(x) = y_0(x) - X_1^{(n)} \cdot G(x, l_1) \quad (25)$$

$$y_{n+1}(x) = y_0(x) - X_1^{(n+1)} \cdot G(x, l_1) \quad (26)$$

Подставляя выражения (25) и (26) в уравнение (24), получаем

$$\begin{aligned} y_0(l_1) - X_1^{(n+1)} \cdot G(l_1, l_1) &= y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) - \\ &- [y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1] \times \\ &\times e [y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1] \times \\ &\times [e(X_1^{(n)}) - e(X_1^{(n)} - R_1)] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 X_1^{(n+1)} \cdot G(l_1, l_1) &= X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) + \\
 &+ [y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1] \times \\
 &\times e[y_0(l_1) - X_1^{(n)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1] \times \\
 &\times [e(X_1^{(n)}) - e(X_1^{(n)} - R_1)].
 \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь: $R_1 \geq 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – шаг последовательных приближений; значение функции $y(l_1)$ вычисляется с помощью интеграла (23)

$$y_0(l_1) = \int_0^{l_1} G(l_1, \xi) \cdot q(\xi) d\xi. \tag{28}$$

Далее принимая $n = 0$, $X_1^{(0)} = 0$, из итерационного уравнения (27) находим

$$X_1^1 \cdot G(l_1, l_1) = [y_0(l_1) - u_1] \cdot e[y_0(l_1) - u_1] \cdot [1 - 0]$$

$$\text{или } X_1^{(1)} \cdot \frac{1}{G(l_1, l_1)} \cdot [y_0(l_1) - u_1] \cdot e[y_0(l_1) - u_1]. \tag{28 a}$$

Переходим ко второму шагу. Принимая $n = 1$, $X_1^{(n)} = X_1^{(1)}$,

Из уравнения (27) находим

$$\begin{aligned}
 X_1^{(2)} \cdot G(l_1, l_1) &= X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) + [y_0(l_1) - X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1] \times \\
 &\times e[y_0(l_1) - X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1] \cdot [e(X_1^{(1)} - R_1)].
 \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь могут быть различные ситуации. Первая ситуация: средняя опора еще не включилась, то есть $X_1 < R_1$ ($X_1 \leq 0$, $R_1 \geq 0$). Тогда уравнение (29) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 X_1^{(2)} \cdot G(l_1, l_1) &= X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) + [y_0(l_1) - X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1] \times \\
 &\times e[y_0(l_1) - X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1) - u_1].
 \end{aligned} \tag{30}$$

Если $y_0(l_1) \geq u_1$, то из выражений (28) и (30) следует:

$$X_1^{(2)} \cdot G(l_1, l_1) = X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1)$$

$X_1^{(2)} = X_1^{(1)}$ – итерационный процесс сошелся при $n = 1$.

Если $y_0(l_1) < u_1 \geq 0$, то из выражений (28) и (30) следует, что $X_1^{(1)} = 0$,

$$X_1^{(2)} \cdot G(l_1, l_1) = X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1),$$

$X_1^{(2)} = X_1^{(1)}$ – итерационный процесс сошелся при $n = 1$.

Итак, неизвестная реакция средней опоры X_l определяется так:

$$X_1 = X_1^{(1)} \text{ при } y_0(l_1) \geq u_1, \quad X_1 < R_1, \tag{31}$$

$X_1 = 0$ при $y_0(l_1) < u_1, \quad X_1 < R_1$,

где $u_1 \geq 0, R \geq 0$.

Вторая ситуация: Средняя опора уже выключилась, то есть $X_1 > R_1$ (здесь нужно иметь ввиду, что $R_1 \geq 0, X_1 \geq 0$). Для этого случая разность единичных функций, входящая в уравнение (29), равна нулю ($n = 1$):

$$e(X_1^{(1)}) - e(X_1^{(1)} - R_1) = 1 - 1 = 0. \tag{32}$$

Здесь учтено, что $X_1^{(1)} \geq 0, X_1^{(1)} \geq R_1 \geq 0$. С учетом равенства (32) уравнение (29) представим в виде $X_1^{(2)} \cdot G(l_1, l_1) = X_1^{(1)} \cdot G(l_1, l_1)$ или $X_1^{(2)} = X_1^{(1)}$ – итерационный процесс сошелся при $n = 1$. Чему же равно здесь $X_1^{(1)}$? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо принять $n = 0, X_1^{(0)} = 0$ и подставить эти

значения в уравнение (27). При $X_1^{(1)} \geq R_1$, где $X_1^{(1)}$ – определяется формулой (28), из уравнения (27) следует: $X_1^{(2)} = 0$. Суммируя все результаты, окончательно имеем

$$\begin{aligned} X_1 = X_1^{(1)} & \quad \text{при} & \quad \begin{cases} y_0(l_1) \geq u_1, \\ X_1^{(1)} < R_1; \end{cases} \\ X_1 = 0 & \quad \text{при} & \quad y_0(l_1) < u_1; \\ X_1 = 0 & \quad \text{при} & \quad \begin{cases} y_0(l_1) \geq u_1, \\ X_1^{(1)} > R_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $X_1^{(1)}$ – определяется формулой (28). Теперь функцию прогибов получим из выражения (25) при $n = 1$:

$$y(x) = y_1(x) = y_0(x) - X_1^{(1)} \cdot G(x, l_1), \quad (34)$$

где $X_1^{(1)}$ находится соотношениями (33)

Рассмотренная балка (рис.8 а) содержит одну одностороннюю связь (среднюю опору). Для этой балки можно было бы найти решение и без алгоритмов, поскольку из рис. 8а видно, что балка может принять три ситуации (рис. 9, 10, 11). Для этих трех ситуаций нетрудно сразу записать очевидное решение в виде (33). К сожалению, предугадать возможные структурные изменения в балке (все возможные ситуации) удастся только, когда число односторонних связей равно единице. А как же быть, если балка имеет 2, 3, 4, 5 односторонних связей? Здесь вряд ли можно заранее предугадать все возможные ситуации, все структурные изменения в системе «балка-опоры». Нужен четкий алгоритм, который позволил бы на компьютере получить окончательное решение.

В двух предыдущих простейших задачах мы привели этот алгоритм, который, кстати, пригоден и в сложных системах. Далее мы обобщим изложенный выше алгоритм на общий случай, когда балка имеет « n » односторонних связей.

Обсуждение результатов. Для определения неизвестной реакции X односторонней связи, нам было необходимо располагать условиями совместности деформаций (прогибов) балки (12), (17). Далее мы приведем схемы односторонних связей и соответствующие условия совместности деформаций. Работу односторонней связи будем моделировать с помощью единичной функции. Общий случай односторонней связи показан на рис. 12

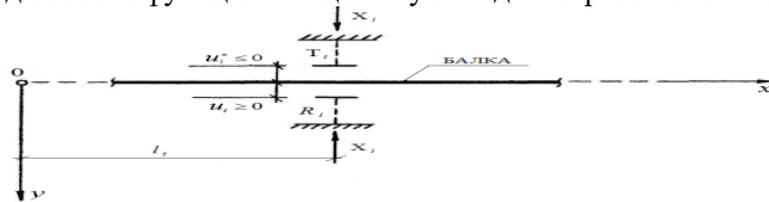


Рис. 12. Схема общего случая односторонней связи
 Fig. 12. Diagram of the general case of one-way communication

Здесь и далее (рис.12): пунктирные линии указывают на выключающиеся связи;

j – порядковый номер опоры в основной системе;

l_i – координата на оси « x » i -ой опоры в основной системе;

$u_i \geq 0$ – зазор между балкой и i -ой опорой при перемещениях балки вниз;

$u_i^* \leq 0$ – зазор между балкой и i -ой опорой при перемещении балки вверх;

R_i – предельное усилие (несущая способность связи), при котором разрушается конструкция нижней части опоры, нижняя связь опоры, (рис. 12),

T_i – предельное усилие, при котором разрушается конструкция верхней части опоры, верхняя связь i -ой опоры.

Параметры u_i , u_i^* , R_i , T_i будем называть характеристиками, причем характеристики R_i и T_i зависят от величины опорной реакции X_i (рис. 12), то есть

$$\left. \begin{aligned} R_i &= R_i(X_i) \\ T_i &= T_i(X_i) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Для опоры, показанной на рис. 12, условие совместности деформаций (прогибов) можно записать в следующей виде:

$$y(l_i) = y(l_i) - h_i[X_i, y(l_i)] \quad (36)$$

Здесь функция:

$$\begin{aligned} h_i[X_i, y(l_i)] &= [y(l_i) - u_i] \cdot e[y(l_i) - u_i] \cdot [e(X_i) - e(X_i - R_i)] + \\ &+ [y(l_i) - u_i^*] \cdot e[-y(l_i) - u_i^*] \cdot [e(-X_i) - e(-X_i - T_i)]; \end{aligned} \quad (37)$$

e – единичная функция, свойства которой хорошо описаны в книге [5], $y(l_i)$ – значение прогибов $y(x)$ в точке $x = l_i$, где l_i – координата i -ой опоры в основной системе (рис. 12). Все остальные параметры, входящие в выражения (36) и (37) были пояснены выше. Меняя характеристики опоры R_i, T_i, u_i, u_i^* , из рис. 12 и условий совместности деформаций (36) и (37) можно получать различные ситуации. Далее мы приведем частные случаи, вытекающие из рис.12 и выражения (37).

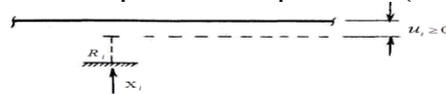


Рис. 13. Вариант схемы из рис. 12
 Fig. 13. Variant of the diagram from Fig. 12

При $u_i^* \rightarrow -\infty$ рис. 12 вырождается в рис. 13, а функция (37) принимает вид

$$\begin{aligned} h_i[X_i, y(l_i)] &= [y(l_i) - u_i] \cdot e[y(l_i) - u_i] \times \\ &\times [e(X_i) - e(X_i - R_i)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Если $u_i \rightarrow \infty$, то рис. 12 переходит в рис. 14, а выражение (37) записывается так:

$$\begin{aligned} h_i[X_i, y(l_i)] &= [y(l_i) - u_i^*] \cdot e[-y(l_i) - u_i^*] \times \\ &\times [e(-X_i) - e(-X_i - T_i)]. \end{aligned} \quad (39)$$

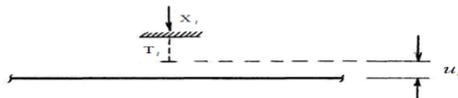


Рис. 14. Вариант схемы из рис. 12
 Fig. 14. Variant of the diagram from Fig. 12

Ниже приведены дифференциальные уравнения поперечного изгиба балки, а также алгоритм, пригодный для численного исследования на компьютере напряженно-деформированного состояния балки, показанной на рис. 15а.

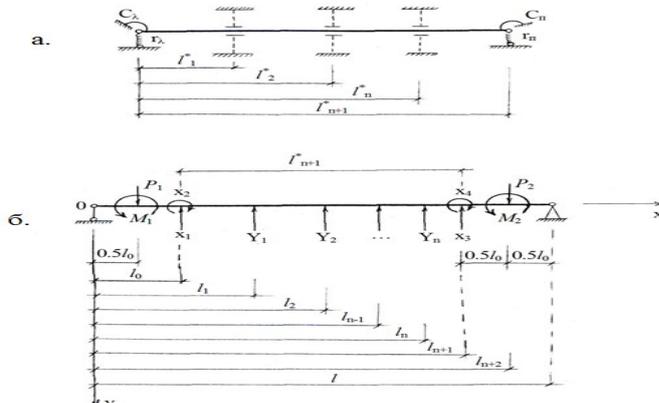


Рис. 15. Расчётные схемы многопролётной балки с односторонними связями
 Fig. 15. Calculation schemes of a multi-span beam with one-sided connections

Промежуточные опоры балки представляют собой включающее-выключающиеся связи, аналогичные показанной на рис. 12. Поэтому каждая промежуточная опора балки (рис. 15а) может принимать любое из частных состояний, которые были рассмотрены нами ранее. Число опор балки, не включая крайних, равно n ; $i = 1, 2 \dots n$. На рис. 15а $n = 3$. Балка имеет крайние опоры в виде упруго-податливых связей, характеризуемых коэффициентами жесткости r_l и C_l на левом и r_n и C_n – на правом концах балки.

С целью определения функции прогибов $y(x)$ балки введем, как обычно, основную систему (рис. 15б). Для этого расширим область балки слева и справа на величину

$$l_0 = \frac{1}{4} \cdot l_{n+1}^* \quad (l_{n+1}^* - \text{длина балки в заданной системе, рис. 15а});$$

отбросим все опоры и заменим их действие неизвестными, причем X_1, X_2, X_3, X_4 – реакции крайних опор, а Y_1, Y_2, \dots, Y_n – реакции промежуточных опор, аналогичных, показанному на рис. 12. Кроме этих введем силы P_1, P_2, M_1 и M_2 .

Если $q_0(x)$ – нагрузка в заданной системе (рис. 15а), то в основной системе (рис. 15б) $q(x) = q_0(x - l_0)$. На рис. 15б поперечная нагрузка $q(x)$, действующая на балку, (в основной системе) не показана.

Таким образом, на балку в основной системе (рис. 15б) действует $n + 8$ сосредоточенных сил и внешняя активно действующая нагрузка $q(x)$.

Дифференциальное уравнение балки (рис. 15б) запишем в виде [3, 4, 6]

$$\begin{aligned} EJ \cdot y^{IV}(x) = & q(x) + P_1 \cdot \delta(x + 0,5l_0) + M_1 \cdot \delta'(x + 0,5l_0) + \\ & + P_2 \cdot \delta(x - l_{n+2}) + M_2 \cdot \delta'(x - l_{n+2}) - \\ & - X_1 \cdot \delta(x - l_0) - X_2 \cdot \delta'(x - l_0) - \\ & - X_3 \cdot \delta(x - l_{n+1}) - X_4 \cdot \delta'(x - l_{n+1}) - \sum_{i=1}^n y_i \cdot \delta(x - l_i). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь: l_i – координаты сосредоточения опорных реакций в основной системе (рис. 15б);

$$\begin{aligned} l_0 = l_{n+1}^* / 4 \quad ; \quad l_1 = l_0 + l_1^* \quad ; \quad l_2 = l_0 + l_2^* \quad ; \\ l_n = l_0 + l_n^* \quad ; \quad l_{n+1} = l_0 + l_{n+1}^* \quad ; \quad l_{n+2} = l_{n+1} + 0,5l_0 \quad . \end{aligned}$$

Далее заметим: поскольку балка в основной системе (рис. 15б) обоими концами опирается шарнирно, то для рассматриваемой краевой задачи и для последующих задач нам будет необходима функция Грина $G(x, \xi)$. Функция Грина $G(x, \xi)$, которая была использована в этом примере, была нами дана в статье [9]

Вывод. В настоящей работе рассмотрены конструктивные схемы балок с односторонними связями, которые находят широкое применение в практике строительства.

Приведены дискретные опоры балок, обладающие свойством односторонних связей. При этом даются соответствующие схемы, а также аналитические выражения, описывающие особенности работы односторонних связей. Приводятся расчетные модели балок, которые лежат на опорах с односторонними связями. При этом даются соответствующие расчетные схемы и дифференциальные уравнения поперечного изгиба балок и плит на опорах с односторонними связями.

Разработаны алгоритмы решения дифференциальных уравнений, которые описывают работу балок с односторонними связями. Для иллюстрации алгоритма решения рассматриваются различные частные примеры.

Приведенные в работе расчетные модели балок с односторонними связями могут найти широкое применение при проектировании балочных конструкций, имеющих опоры с односторонними связями.

Библиографический список:

1. Айзенберг Я. М. Сооружения с выключающимися связями для сейсмических районов. Стройиздат. М. 1976 г.
2. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции /общий курс/. Издательство «Стройиздат», Москва, 1991г. 970 стр.
3. Беляева Н.М. Соппротивление материалов. Издательство «Наука», Москва, 1976г., 607 стр.
4. Доннель Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Издательство «Наука», Москва, 1982г., 567 стр.
5. Зельдович Я.Б. , Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. «Наука», М., 1965 г.
6. Кисилев В.А. Строительная механика и расчет сооружений. Стройиздат. М., 1986 г.
7. СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции». Свод правил – Москва, строойиздат, 2017г. – 126 с.
8. СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия». Свод правил – Москва, строойиздат, 2016. – 95 с.,
9. Юсупов А.К., Муселемов Х.М., Устарханов Т.О. Оптимизация параметров шпренгельной балки. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки, Том 47, No4, 2020 г.С.119-131.

References:

1. Ayzenberg Ya.M. Structures with switching ties for seismic regions. Stroyizdat. Moscow, 1976 (In Russ)
2. Baikov V.N., Sigalov E. E. Reinforced concrete structures /general course/. Stroyizdat Publishing House, Moscow, 1991;970 (In Russ)
3. Belyaeva N.M. Strength of materials. Nauka Publishing House, Moscow, 1976;607. (In Russ)
4. Donnel L.G. Beams, plates and shells. Nauka Publishing House, Moscow, 1982;567. (In Russ)
5. Zeldovich Ya. B., Myshkis A.D. Elements of applied mathematics. Nauka, Moscow, 1965(In Russ)
6. Kiselev V.A. Structural mechanics and calculation of structures. Stroyizdat. M., 1986. (In Russ)
7. SP 16.13330.2017 "Steel structures". Code of practice - Moscow, Stroyizdat, 2017; 126. (In Russ)
8. SP 20.13330.2016 "Loads and impacts". Code of practice - Moscow, Stroyizdat, 2016; 95 (In Russ)
9. Yusupov A.K., Muselemov H.M., Ustarkhanov T.O. Optimization of truss beam parameters. *Herald of the Dagestan State Technical University. Technical Sciences.* 2020; 47(4):119-131. (In Russ)

Сведения об авторах:

Юсупов Абусупян Курашевич, доктор технических наук, профессор, кафедра «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Муселемов Хайрулла Магомедмурадович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Вишталов Раджаб Исабекович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительные конструкции и гидротехнические сооружения»; hairulla213@mail.ru

Information about the authors:

Abusupyan K.Yusupov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Department of Building Structures and Hydraulic Structures; hairulla213@mail.ru

Hairulla M.Muselemov, Dr. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Head of the Department of Building Structures and Hydraulic Structures; hairulla213@mail.ru

Rajab I. Vishtalov, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof. Department of Building Structures and Hydrotechnical Structures; hairulla213@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 25.08.2024.

Одобрена после рецензирования/ Revided 15.09.2024.

Принята в печать/Accepted for publication 02.10. 2024.