

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.04

DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-209-216



Оригинальная статья / Original article

**Математическое моделирование процесса нелинейного деформирования
тонкостенных конструкций**

Г.М. Муртазалиев, М.М. Пайзулаев

Дагестанский государственный технический университет,
367015, г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является разработка единого метода решения общей нелинейной краевой задачи, связанной с разрывными явлениями, позволяющего выявить все характерные особенности поведения тонкостенных систем под нагрузкой. Рассматриваются вопросы нелинейного деформирования, потери устойчивости исходной равновесной формы и послекритического поведения на примере тонкой сферической оболочки, являющейся удачной моделью, на которой проявляются и изучаются все характерные особенности работы под нагрузкой тонкостенных систем, теряющих устойчивость. **Метод.** Задача решается численно-аналитическими методами, представляющими совокупность методов теории катастроф и метода конечных разностей повышенной точности. Основное внимание уделено математическим аспектам рассматриваемых явлений и методам их исследования. **Результат.** Определены параметры напряженно-деформированного состояния докритического, критического и послекритического деформирования на примере сферической оболочки. Получены соотношения между предельными и бифуркационными значениями параметров нагрузок, позволяющие определить группу предельного состояния достигнутого уровня напряженно-деформированного состояния конструкции. **Вывод.** Решение задачи позволяет получить полную и необходимую информацию для определения степени опасности состояний конструкций и обеспечения их надежности.

Ключевые слова: нелинейные задачи, особые точки, разрывные явления, теория катастроф, потеря устойчивости, послекритическое поведение

Для цитирования: Г.М. Муртазалиев, М.М. Пайзулаев. Математическое моделирование процесса нелинейного деформирования тонкостенных конструкций. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024;51(4):209-216. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-209-216

Mathematical modeling of the process of nonlinear deformation of thin-walled structures

G.M. Murtazaliev, M.M. Paizulaev

Daghestan State Technical University,
70 I. Shamil Ave., Makhachkala 367015, Russia

Abstract. Objective. The objective is to develop a unified method for solving a general nonlinear boundary value problem associated with discontinuous phenomena, which allows identifying all the characteristic features of the behavior of thin-walled systems under load. The issues of nonlinear deformation, loss of stability of the initial equilibrium shape and post-critical behavior are considered using the example of a thin spherical shell. **Method.** The problem is solved by numerical and analytical methods, representing a set of methods of catastrophe theory and the finite difference method of increased accuracy. The main attention is paid to the mathematical aspects of the phenomena under consideration. **Result.** The parameters of the stress-strain state of subcritical, critical and postcritical deformation are determined using a spherical shell as an example. The relationships between the limit and bifurcation values of the load

parameters are obtained, allowing us to determine the group of the limit state of the achieved level of the stress-strain state of the structure. **Conclusion.** The solution of the general problem allows us to obtain complete and necessary information to determine the degree of danger of the states of structures and ensure their reliability.

Keywords: nonlinear problems, singular points, discontinuous phenomena, catastrophe theory, loss of stability, post-critical behavior

For citation: G.M. Murtazaliev, M.M. Paizulaev. Mathematical modeling of the process of nonlinear deformation of thin-walled structures. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024;51(4):209-216. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-209-216

Введение. Несмотря на огромное число публикаций теоретического и экспериментального характера изучение процесса нелинейного деформирования тонкостенных систем остаётся сложной, актуальной и до конца ещё нерешённой как в теоретическом, так и практическом плане проблемой теории сооружений. Это видно и из последних изданий нормативных документов [1,2], в которых потеря устойчивости в [1] была отнесена к I, так и II группе предельных состояний, а в [2] она отнесена только к I группе. На наш взгляд, это является «шагом назад» в деле понимания сути происходящих явлений и выявления скрытых резервов надёжности, поскольку известны случаи, когда предельная нагрузка (несущая способность) конструкции выше бифуркационной на 25-30%.

Причиной огромного внимания остаётся и сохраняющееся расхождение между теоретическими и экспериментальными данными значений нагрузок для реальных конструкций [11-21]. Сложность изучения проблемы заключается в необходимости анализа разрывных явлений, происходящих при конкретных значениях внешних (управляющих) и внутренних (поведенческих) параметров, входящих в систему исходных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, описывающих поведение этих систем под нагрузкой. Эти явления хуже поддаются анализу и решению не только аналитическими, но и численными методами, что требует поиска новых и совершенствование существующих методов решения задач.

Постановка задачи. Для решения такой общей задачи выяснения всех особенностей и получения полной и необходимой информации поведения конструкций, в настоящее время, в их расчётах учитываются нелинейности, которые усложняют чисто математические и вычислительные аспекты доведения расчетов до конкретных численных значений. Точных аналитических методов решения получающихся при этом нелинейных краевых задач, связанных исчерпанием прочности, жесткости или устойчивости, пока не существуют. Математические основы задач изучаются в теории ветвления решений нелинейных уравнений, которая в свою очередь состоит из трёх частей (рис.1) [3,4,5].

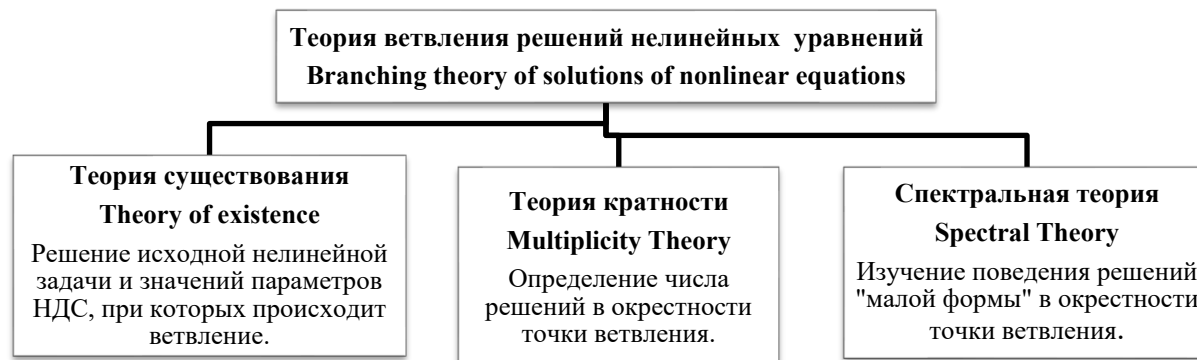


Рис. 1. Теории ветвления решений нелинейных уравнений
Fig. 1. Branching theories of solutions of nonlinear equations

В соответствии с этим в данной работе, изучение поведения тонкостенных систем под внешней нагрузкой, разделено на три взаимосвязанных и последовательных этапа, каждый из которых может рассматриваться и как отдельная задача (рис. 2).



Рис. 2. Общая задача расчета конструкций, теряющих устойчивость
Fig. 2. General problem of calculating structures that are losing stability



Рис. 3. Возможные постановки бифуркационных задач
Fig. 3. Possible formulations of bifurcation problems

Решается четвёртый тип задачи исследования проблем устойчивости (по принятой в работе [1] классификации): нелинейный исходный процесс и нелинейная задача изучения потери устойчивости и послекритического поведения конструкций, который и позволяет выяснить все особенности их деформирования (рис.3). В качестве исходных примем известную систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений смешанного вида, относительно функции прогибов W и функции усилий F , описывающие геометрически нелинейную задачу поведения под нагрузкой пологого купола:

$$\begin{cases} D \cdot \nabla^4 \tilde{W} = \nabla_{\kappa}^2 \tilde{F} + L(W, F) + \tilde{q}; \\ (1/Eh) \cdot \nabla^4 F = -\nabla_{\kappa}^2 W - (1/2) \cdot L(W, W), \end{cases} \quad (1)$$

где $\nabla_{\kappa}^2(\cdot)$, $L(\cdot)$ – нелинейные дифференциальные операторы, имеющие в полярных координатах вид:

$$\begin{aligned} \nabla_{\kappa}^2(\cdot) &= K_2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial r^2} + K_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi^2} \right]; \\ L(W, F) &= \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial F}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{r \partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{r \partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

Заменой F на W находится оператор $L(W, W)$. Вместе с соответствующими граничными условиями они составляют полную систему исходных уравнений решаемой задачи.

Особенностью этой системы является наличие особых в их решениях точек, в которых функциональный определитель данной системы вырождается. Механически эти точки соответствуют предельной точке или точке ветвления решений системы (1). В случае осесимметричной задачи система (1) может быть проинтегрирована и её первый интеграл принимает вид:

$$\begin{cases} D \frac{d}{dr} (\nabla^2 W) = h \frac{dF}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + K \right) + \Psi(r); \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = -E \left[\frac{1}{2r} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 + K \frac{dW}{dr} \right], \end{cases} \quad (2)$$

где $\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr}(\cdot) \right]$ – оператор Лапласа в полярных координатах для осесимметричной задачи. В общепринятых безразмерных параметрах и обозначениях уравнения осесимметричного деформирования (4) имеют вид:

$$\begin{cases} (r \cdot \Theta)' - \frac{\Theta}{r} = \Phi(\Theta - r) - \Psi_0(r); \\ (r \cdot \Phi)' - \frac{\Phi}{r} = -\Theta \left(\frac{\Theta}{2} - r \right), \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{где } \Psi_0(r) = 4 \int q r dr. \quad (4)$$

В случае загрузки оболочки давлением интенсивности q , приложенным к круговой области радиуса r_1 с центром в вершине купола (рис. 4):

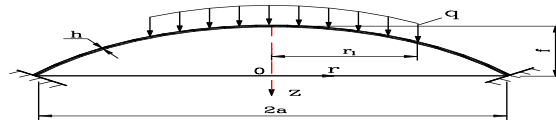


Рис. 4. Загружение оболочки давлением интенсивности

Fig. 4. Loading the shell with pressure intensity

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} 2qr^2, & r < b_1; \\ 2qb^2, & r > b_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{r_1}{a} b.$$

В этом случае уравнения могут быть записаны в единообразной форме:

$$\begin{cases} (r \cdot \Theta)' - \frac{\Theta}{2} = \Phi(\Theta - r) - 2q \cdot b_1^2 \cdot \delta(r); \\ (r \cdot \Phi)' - \frac{\Phi}{r} = -\Theta \left(r + \frac{\Theta}{2} \right), \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{где } \delta(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{b_1^2}, & r < b_1; \\ 1, & r > b_1. \end{cases} \quad (7)$$

Методы исследования. Для решения этой нелинейной системы уравнений разработаны различные методы, в которых используются разные «ухищрения» отыскания и «обхода» особых точек. В работах авторов [5,6,7] использованы: вариант метода дифференцирования по параметру, являющийся математической основой «шаговых» методов решения нелинейных задач, в котором в окрестности особой точки производится смена ведущего параметра и тем самым позволяющий пройти всю кривую равновесных состояний, являющейся информативно емкой характеристикой при решении таких задач. В зависимости от выбранного параметра дифференцирования метод становится методом последовательных догрузок или последовательных деформаций. Получаемые уравнения интегрируются одним из известных методов [3,8,9]. Другими методами, ставшими в последние годы эффективным средством решения задач, связанных с разрывными явлениями и использованными авторами статьи, являются методы (алгебраические средства и геометрические образы) теории катастроф, позволяющие едиными и наглядными образами охватить работу целого класса конструкций [3,8,9].

Для решения задач составлены блок-схемы и программы на языке C++ на основе которых решены конкретные задачи расчета этих систем. Исследование потери устойчивости исходных равновесных форм. Полученная единая трёхмерная картина даёт представление о равновесных состояниях целого класса оболочек-зависимости между поведенческим (внутренним) параметром-прогибом W в вершине купола и двумя управляющими (внешними) параметрами: K - геометрическим параметром, характеризующим кривизну оболочки и q -параметром внешней нагрузки. Из этой картины, являющейся «вездесущей катастрофой сборки» [5] видно, что внутри сборки (между кривыми 1 и 2 на рис. 5) у оболочек возможны 3 состояния равновесия - два устойчивых, соответствующих значениям верхней и нижней критических значений нагрузки и одно неустойчивое состояние.

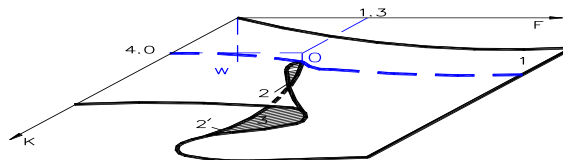


Рис. 5. Катастрофа сборки – поверхность равновесных состояний оболочек при различных параметрах

Fig. 5. Assembly catastrophe – surface of equilibrium states of shells under different parameters

На кривых 1 и 2 существуют по два совпадающих и одно отдельное значение, вне заштрихованной области - по одному решению задачи. Картина качественно и количественно соответствует реальному поведению систем, но не выявляет качества самых найденных состояний равновесия и возможной потери устойчивости путём ветвления (бифуркации) исходных равновесных форм по смежным несимметричным формам равновесий. Для изучения этого явления представим решение исходной системы уравнений (1) в момент потери устойчивости в форме:

$$\begin{aligned} W(r, \varphi) &= W_0(r) + \xi W_1(r, \varphi); \\ F(r, \varphi) &= F_0(r) + \xi F_1(r, \varphi), \end{aligned} \quad (8)$$

где: $W_0(r)$ и $F_0(r)$ – параметры, характеризующие осесимметричное поведения оболочки; $W_1(r, \varphi)$ и $F_1(r, \varphi)$ - параметры, новой смежной несимметричной формы равновесия; ξ – бесконечно малый параметр.

Подставляя (8) в (1) с учетом (6) получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно W и F :

$$\begin{aligned}\nabla^4 W_1 &= \nabla^2 F_1 - \left(\frac{F_1'}{r} - \frac{F_1''}{r^2} \right) \Theta' + \frac{\Phi}{r} W_1'' - \frac{F_1''}{r} \Theta + \left(\frac{W_1'}{r} + \frac{W_1''}{r^2} \right) \Phi; \\ \nabla^4 F_1 &= -\nabla^2 W_1 + \left(\frac{W_1'}{r} + \frac{W_1''}{r^2} \right) \Theta' + \frac{W_1''}{r} \Theta.\end{aligned}\quad (9)$$

Равенство нулю определителя системы (9) при определенных значениях Q и Φ , определяет параметр критической нагрузки бифуркации. Для решения этого этапа задачи составлена блок-схема и программа на языке C++, на основе которой получены конкретные численные значения, хорошо согласующиеся с известными в литературе данными.

Обсуждение результатов. Исследование начального этапа послекритического состояния. Определение значения критической нагрузки, при котором происходит потеря устойчивости исходной осесимметричной формы не определяет характера равновесного состояния конструкции в самой точке ветвления (бифуркации) равновесных форм. Дело в том, что от «природы» этой точки зависит характер начального этапа послекритического поведения конструкции: если эта точка относится к устойчивой (восходящей) возникшей вторичной ветви, то в самой точке ветвления конструкция ещё не исчерпала своей несущей способности; если же точка ветвления относится к неустойчивой (нисходящей) вторичной ветви, эта точка является предельной, в которой конструкция теряет несущую способность и её дальнейшее поведение приобретает характер «перескока» в другие (отдалённые) равновесные состояния [5]. Таким образом, «природа» точки ветвления определяет степень опасности достижения данной точки и гарантия против достижения соответствующего значения нагрузки должна быть различной. Это достигается отнесением достигнутого состояния и соответствующего значения нагрузки к тому или иному предельному состоянию, что является предметом различных толкований в нормативных документах последних изданий [1,2]. Для решения этого этапа задачи, представим решение уравнений (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}W &= W_0 + \xi W_1 + \xi^2 W_2 + \dots; \\ F &= F_0 + \xi F_1 + \xi^2 F_2 + \dots,\end{aligned}\quad (10)$$

где W_0 и F_0 – параметры исходного осесимметричного деформирования; W_1 и F_1 – нормированные значения собственных функций, характеризующие форму выпучивания; W_2 и F_2 – функции, характеризующие начальный этап послекритического поведения оболочки, подлежащие определению; ξ – малый параметр.

Подставляя выражения (10) в исходные уравнения (9), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ξ в правых и левых частях, с учетом уравнений (6) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\nabla^4 W_2 - \nabla^2 F_2 + \left(\frac{F_2'}{r} + \frac{F_2''}{r^2} \right) \cdot \Theta_{cr}' + \frac{W_2''}{r} \cdot \Phi_{cr} + \frac{F_2''}{r} \cdot \Theta_{cr} - \left(\frac{W_2'}{r} + \frac{W_2''}{r^2} \right) \cdot \Phi_{cr} &= \left(\frac{F_1'}{r} + \frac{F_1''}{r^2} \right) \cdot \dot{W}_1 + \left(\frac{W_1'}{r} + \frac{W_1''}{r^2} \right) \cdot F_1'' - 2 \left(\frac{F_1'}{r} \right)' \left(\frac{W_1'}{r} \right)'; \\ \nabla^4 F_2 + \nabla^2 W_2 - \left(\frac{W_2'}{r} + \frac{W_2''}{r^2} \right) \cdot \Theta_{cr}' - \frac{W_2''}{r} \cdot \Theta_{cr} &= \left(\frac{W_1'}{r} + \frac{W_1''}{r^2} \right)^2 - \left(\frac{W_1'}{r} + \frac{W_1''}{r^2} \right) \cdot W_1''.\end{aligned}\quad (11)$$

Решение осуществляется на основе модификации теории послекритического поведения, предложенных в работах Койтера [10]. Составлена блок-схема и программа для решения задачи и получены конкретные значения параметров, позволяющих однозначно ответить на поставленные вопросы.

Вывод. Несмотря на огромное число публикаций, проблема исследования особенностей поведения конструкций и выявления их скрытых резервов надёжности остаётся сложной, актуальной, до конца не решённой проблемой теории сооружений. Ещё более запутаны вопросы устойчивости и определения степени опасности достижения того или иного состояния. Опасны не столько потеря устойчивости равновесной формы или состояния равновесия сами по себе, нужно выяснить степень опасности достижения этих состояний, в зависимости, от которой гарантия против их наступления должна быть различной.

В нормативных документах, которые сами претерпевают серьезные изменения, нет единой трактовки этих вопросов. Для однозначного ответа на эти вопросы нужны более полные и глубокие исследования, в которых рассматривается весь процесс деформирования конструкций на всех этапах и выявление особенностей их поведения. Все это требует учёта в расчётах различного вида нелинейностей, разработки и совершенствования достоверных и эффективных методов их расчета. В статье предлагается один из возможных путей решения этой проблемы.

Библиографический список:

1. ГОСТ 27751-88 (СТ СЭВ 384-87). Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения по расчету. Введ. с 01.07.88. -М.: Изд-во стандартов, 1988. -9 с.
2. ГОСТ 27751-2014 (Межгосударственный стандарт) Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. Введ. с 01.07.2015. -М.: Стандартинформ, 2015. -16 с.
3. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. -М.: Наука, 1969. -527 с.
4. Теория ветвлений и нелинейные краевые задачи на собственные значения /Под ред. Дж.Б. Келлера и С. Антмана. -М.: Мир, 1974. -256 с.
5. Муртазалиев Г.М. Методы теории катастроф в задачах устойчивости оболочек. ДГТУ. Махачкала 2004. -200 с.
6. Муртазалиев Г.М., Пайзулаев М.М. Предельное состояние по условию потери устойчивости равновесных форм // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2021. Т. 48. №4. С. 171-177.
7. Муртазалиев Г.М., Акаев А.И., Пайзулаев М.М. Основные соотношения начального этапа послекритического деформирования конструкций // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2013. №1 (28). С. 90-93.
8. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. -М.: Мир, 1980. -608 с.
9. Томпсон Д.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. -М.: Мир, 1985.- 256 с.
10. Койтер В.Т. Устойчивость и критическое поведение упругих систем //Механика. Периодич. сб. пер. иностр. лит. -М.: ИЛ, 1960. -N5. -С. 99-110.
11. Григлюк Э.И., Шалашин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. -М.: Наука, 1988. -232 с.
12. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. -312 с.
13. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы. -3-е изд., перераб.-М.: Наука, 1979. -384 с.
14. Броуде Б.М., Бельский Г.И., Беляев Б.И. О потере устойчивости как предельном состоянии стальных конструкций //Строительная механика и расчет сооружений. -1990. -N3. -С.88-91.
15. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2 кн. -М.: Мир, 1984. Кн.1. -350 с.
16. Агаханов Э.К. Применение эквивалентностей в моделировании задач механики // В сборнике: Строительство и архитектура: теория и практика сейсмической безопасности. Сборник научных статей по итогам деятельности международной научно-практической конференции, посвященной памяти д.т.н., профессора А.Д. Абакарова. Махачкала, 2023. С. 63-69.
17. Клочкив Ю.В., Пшеничкина В.А., Николаев А.П., Марченко С.С., Вахнина О.В., Клочкив М.Ю. Расчет оболочек вращения при использовании смешанного МКЭ с векторной аппроксимационной процедурой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2024. №1. С. 13-27.
18. Коротков М.М., Минаева Н.В., Гриднев С.Ю., Скалько Ю.И. Предельное состояние упругой полосы при комбинированном нагружении //Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж, 2024. С. 1099-1102.
19. Коровайцева Е.А. К обоснованию однозначности продолжения решения задач о деформировании мягких оболочек методом дифференцирования по параметру // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84. № 3. С. 343-350.
20. Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной оболочки при чистом изгибе и внутреннем давлении // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63. № 2 (372). С. 207-216.
21. Нугужинов Ж.С., Боженков А.Ш., Курохтин А.Ю., Жакибеков М.Е., Пчельникова Ю.Н. К вопросу о теории устойчивости многослойных ортотропных пологих тонкостенных строительных конструкций типа оболочек и пластин с неоднородными по толщине слоями // Промышленное и гражданское строительство. 2016. №1. С. 62-67.

References:

1. GOST 27751-88 (ST SEV 384-87). Reliability of building structures and foundations. Basic provisions for calculation. Introduced on 01.07.88. -M.: Publishing house of standards, 1988;9.

2. GOST 27751-2014 (Interstate standard) Reliability of building structures and foundations. Basic provisions. Introduced on 01.07.2015. -M.: Standartinform, 2015;16.
3. Weinberg M.M., Trenogin V.A. Branching theory of solutions of nonlinear equations. M.: Science, 1969;527.
4. Branching theory and nonlinear boundary value problems with eigenvalues. Ed. by J.B. Keller and S. Antman. M.: Mir, 1974;256.
5. Murtazaliev G.M. Methods of catastrophe theory in problems of shell stability. DSTU. Makhachkala 2004; 200.
6. Murtazaliev G.M., Paizulaev M.M. Limit state under the condition of loss of stability of equilibrium forms *Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences*. 2021; 48.(4):171-177.
7. Murtazaliev G.M., Akaev A.I., Paizulaev M.M. Basic relationships of the initial stage of post-critical deformation of structures. *Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences*. 2013; 1 (28): 90-93.
8. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications. Moscow: Mir. 1980; 608.
9. Thompson D.M.T. Instabilities and Catastrophes in Science and Technology. Moscow: Mir, 1985; 256.
10. Koiter V.T. Stability and Postcritical Behavior of Elastic Systems. *Mechanics. Periodical Collection of Foreign Literature*. Moscow: IL, 1960;5: 99-110.
11. Grigolyuk E. I., Shalashilin V. I. Problems of Nonlinear Deformation: Method of Continuation of Solution with Respect to Parameter in Nonlinear Problems of Mechanics of a Solid Deformable Body. Moscow: Nauka, 1988; 232.
12. Alfutov N.A. Fundamentals of Stability Calculation of Elastic Systems. Moscow: Mashinostroyeniye, 1978;312.
13. Panovko Ya.G., Gubanov I.I. Stability and Oscillations of Elastic Systems: Modern Concepts, Errors, and Paradoxes. - 3rd ed., revised. - Moscow: Nauka, 1979;384 .
14. Broude B.M., Belsky G.I., Belyaev B.I. On Loss of Stability as a Limit State of Steel Structures. *Structural Mechanics and Analysis of Structures*. 1990;3:88-91.
15. Gilmore R. Applied Theory of Catastrophes. In 2 books. Moscow: Mir, 1984;1:350.
16. Agakhanov E.K. Application of equivalences in modeling mechanical problems // In the collection: Construction and architecture: theory and practice of seismic safety. Collection of scientific articles on the results of the international scientific and practical conference dedicated to the memory of Doctor of Technical Sciences, Professor A.D. Abakarov. Makhachkala, 2023; 63-69.
17. Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P., Marchenko S.S., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. Calculation of shells of revolution using a mixed FEM with a vector approximation procedure. *Problems of mechanical engineering and reliability of machines*. 2024;1:13-27.
18. Korotkov M.M., Minaeva N.V., Gridnev S.Yu., Skalko Yu.I. Limit state of an elastic strip under combined loading. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics. Collection of works of the International scientific conference. Voronezh, 2024; 1099-1102.
19. Korovaitseva E.A. On the justification of the uniqueness of the continuation of the solution of problems on the deformation of soft shells by the method of differentiation with respect to the parameter. *Problems of strength and plasticity*. 2022; 84(3): 343-350.
20. Zhelezov L.P., Sereznov A.N. Study of nonlinear deformation and stability of a composite shell under pure bending and internal pressure. *Applied mechanics and technical physics*. 2022; 63(2 (372):. 207-216.
21. Nuguzhinov Zh.S., Bozhenov A.Sh., Kurokhtin A.Yu., Zhakibekov M.E., Pchelnikova Yu.N. On the issue of the theory of stability of multilayer orthotropic shallow thin-walled building structures such as shells and plates with layers of non-uniform thickness. *Industrial and civil engineering*. 2016;1:62-67.

Сведения об авторах:

Муртазалиев Гелани Муртазалиевич, доктор технических наук, профессор, кафедра сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; ventav@mail.ru

Пайзулаев Магомед Муртазалиевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; ventav@mail.ru

Information about the authors:

Gelani M. Murtazaliev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics; ventav@mail.ru

Magomed M. Payzulaev, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Head of the Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics; ventav@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 26.09.2024.

Одобрена после рецензирования / Revised 24.10.2024.

Принята в печать/ Accepted for publication 06.11.2024.