

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.04



DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-191-200

Оригинальная статья /Original article

Моделирование ползучести для замкнутой цилиндрической оболочки при гидростатическом давлении

М.А. Магомедов¹, В.В. Кузнецов², Б.М. Языев³, С.В. Литвинов³

¹Дагестанский государственный технический университет,

¹367015, г. Махачкала, проспект Имама Шамиля, 70, Россия,

²Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И. Ибрагимова РАН,

²364051, г. Грозный, В. Алиева (Старопромысловское шоссе), 21а, Россия,

³Донской государственный технический университет,

³344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1, Россия

Резюме. Цель. В статье представлены общие уравнения моментной теории оболочки нулевой гауссовой кривизны с учетом деформации ползучести. Рассматривается задача о напряженном-деформированном состоянии оболочки с граничными условиями: жестко закрепленная в основании и свободном крае наверху. Цилиндр подвержен действию внутреннего гидростатического давления. **Метод.** Получено разрешающее линейное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно прогиба. Решение приводится в программном комплексе MATLAB. Нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича использовано как уравнение состояния между деформациями ползучести и напряжениями. Для определения деформаций ползучести применялась линейная аппроксимация первой производной по времени (метод Эйлера). **Результат.** Произведен расчет оболочки из вторичного ПВХ, выполненный методом сеток. Методика апробирована путем сравнения решения с расчетом и другими известными решениями. Разработана программа для расчета в пакете MATLAB с возможностью вариации исходных данных и выводом графика зависимости перемещений напряжений от времени. Установлено, что в процессе ползучести в оболочке на 14,7% возрастают окружные напряжения. **Вывод.** Предложенный подход может быть применен к анализу напряженно-деформированного состояния и несущей способности также и железобетонной оболочки. Ограничений по граничным условиям и видам нагружения нет, а материалом балки могут быть не только полимеры и композиты строительного назначения, но и бетон.

Ключевые слова: ползучесть бетона, неупругие коэффициенты, относительная деформация, уравнение связи Максвелла-Гуревича, изгибающие моменты, переменная жесткость, функции Крылова

Для цитирования: М.А. Магомедов, В.В. Кузнецов, Б.М. Языев, С.В. Литвинов. Моделирование ползучести для замкнутой цилиндрической оболочки при гидростатическом давлении. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(4): 191-200. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-191-200

Modeling creep for a closed cylindrical shell under hydrostatic pressure

M.A. Magomedov¹, V.V. Kuznetsov², B.M. Yazyev³, S.V. Litvinov³

¹Daghestan State Technical University,

¹70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367015, Russia,

²Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences,

²21a V. Aliyeva (Staropromyslovskoe) highway, Grozny 364051, Russia,

³Don State Technical University,

³1 Gagarin Square, Rostov-on-Don 344003, Russia

Abstract. Objective. The paper presents general equations of the moment theory of a shell of zero Gaussian curvature taking into account creep deformation. The problem of the stress-strain state of a shell is considered, with the boundary conditions: rigidly fixed at the base and free edge at the top. The cylinder is subject to internal hydrostatic pressure. **Method.** A linear non-homogeneous differential equation of the fourth order with respect to deflection is obtained. The solution is given in the MATLAB software package. The non-linear Maxwell-Gurevich equation is used as the equation of state between creep deformations and stresses. To determine creep deformations, a linear approximation of the first derivative with respect to time (Euler's method) was used. **Result.** The calculation of the shell made of secondary PVC was performed using the grid method. The method was tested. A program for calculation in the MATLAB package was developed with the possibility of varying the initial data and outputting a graph of the dependence of stress displacements on time. During creep in the shell, circumferential stresses increase by 14.7%. **Conclusion.** The proposed approach can be applied to the analysis of the stress-strain state and bearing capacity of a reinforced concrete shell as well. There are no restrictions on boundary conditions and the type of loading, and the beam material can be not only polymers and composites for construction purposes, but also concrete.

Keywords: concrete creep, inelastic coefficients, relative deformation, Maxwell-Gurevich constraint equation, bending moments, variable stiffness, Krylov functions

For citation: M.A. Magomedov, V.V. Kuznetsov, B.M. Yazyev, S.V. Litvinov. Modeling creep for a closed cylindrical shell under hydrostatic pressure. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024;51(4):191-200. DOI:10.21822 /2073-6185-2024-51-4-191-200

Введение. Полимеры и композиты в настоящее время являются одним из перспективных конструкционных материалов в строительстве. Этот материал отличается рядом существенных особенностей, которые необходимо учитывать при проектировании строительных конструкций. Имеющиеся экспериментальные исследования неоднократно подтвердили, что действие длительных нагрузок приводит к изменению процесса деформирования [1]. Факторы силового сопротивления полимеров и композитов строительного назначения с учетом совместного действия нелинейности и неравновесности деформирования, статических и динамических нагружений требуют дополнительного изучения для решения статически неопределимых систем. Разработка новых и совершенствование существующих методов моделирования и расчета различных состояний и процессов в конструкциях из полимеров, вопросы реологического расчета, особенно нелинейного, для пластин и оболочек, по-прежнему, является одной из актуальных проблем.

Постановка задачи. Для расчета цилиндрических резервуаров, конечно, можно воспользоваться безмоментной теорией оболочек. Но безмоментные оболочки воспринимают нагрузку только за счет растяжения и не предполагают возникновения в них изгибающих моментов и перерезывающих сил. Однако, далеко не всегда бывает возможным обеспечить условия возникновения чисто безмоментного состояния. Тогда приходится применять более сложную теорию расчета, учитывающую, кроме деформаций растяжения, еще и появление деформаций изгиба, деформаций ползучести [2-5].

Методы исследования. Рассмотрим круговой цилиндрический резервуар постоянной толщины (рис. 1). Данная задача является осесимметричной, однако для начала получим общие уравнения ползучести круговой цилиндрической оболочки при ее произвольном нагружении.

Вывод разрешающих уравнений. Параметры Ламе для круговой цилиндрической оболочки имеют вид:

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}, \quad B = r \rightarrow A = 1, B = R = const \quad (1)$$

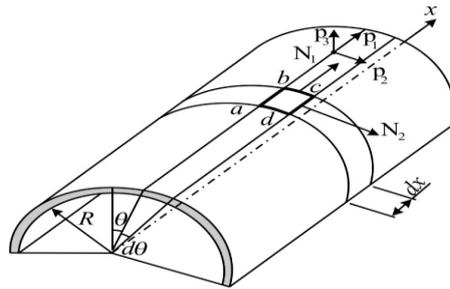


Рис. 1. а) Срединная поверхность цилиндрической оболочки

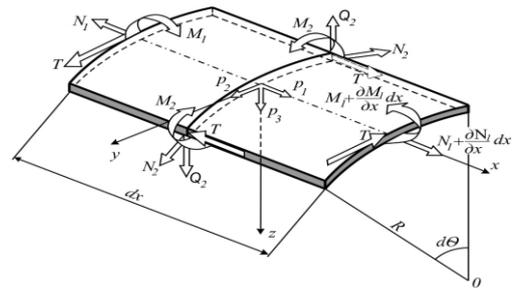


Рис. 1. б) Элемент оболочки, находящийся в равновесии под действием внутренних усилий

Fig. 1. a) Middle surface of a cylindrical shell

Fig. 1. b) Shell element in equilibrium under the action of internal forces

Очевидно, главными радиусами кривизн срединной поверхности являются величины $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, где R – радиус оболочки. Если принять в них значения параметров Ламе по формуле (1). Уравнение равновесия имеет вид:

$$\begin{bmatrix} R \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & R \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & R \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & -R & R \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ T \\ Q_1 \\ Q_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ H \end{Bmatrix} + R \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Система пяти уравнений легко сводится к эквивалентной системе трёх уравнений, для чего достаточно из четвёртого и пятого условий выразить величины поперечных усилий:

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ H \end{Bmatrix} \quad (3)$$

и подставить их во второе и третье условия (2). В итоге преобразований приходят к более обзримой системе:

$$\begin{bmatrix} R \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & R \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & R \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ T \\ Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + R \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

где N_1, N_2 – продольные силы, T – сдвигающая сила, Q_1, Q_2 – поперечные усилия, p_1, p_2, p_3 – компоненты поверхностной нагрузки.

Геометрические соотношения согласно [6,7], деформации элемента срединной поверхности можно установить на основе общих геометрических зависимостей:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5)$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности в соответствии координат x, θ, z .

В (5) первое слагаемое – срединной поверхности, второе слагаемое – изменения кривизн. Введем обозначения:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Физические соотношения с учетом деформаций ползучести на основе первой гипотезы теории расчёта оболочек, как и пластинок, зависимость напряжений от деформаций принимается в виде:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} \right); \quad (7)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ 2\chi_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} \right); \quad (8)$$

Продольные силы представим, как:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} dz \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_1^{cr} \\ N_2^{cr} \\ T^{cr} \end{Bmatrix}; \quad (9)$$

где

$$\begin{Bmatrix} N_1^{cr} \\ N_2^{cr} \\ T^{cr} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [0 \quad 0 \quad \frac{(1-\nu)}{2}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}; \quad (10)$$

Соотношения для изгибных и крутящих моментов определяются как:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} z dz \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_1^{cr} \\ M_2^{cr} \\ H^{cr} \end{Bmatrix}; \quad (11)$$

где

$$\begin{Bmatrix} M_1^{cr} \\ M_2^{cr} \\ H^{cr} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[0 \quad 0 \quad \frac{(1-\nu)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{cr} \\ \varepsilon_2^{cr} \\ \gamma^{cr} \end{Bmatrix} z dz \end{Bmatrix}; \quad (12)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ цилиндрическая жесткость

Обсуждение результатов. Рассмотрим случай, представляющий практическое значение – замкнутую цилиндрическую оболочку, подверженную гидростатическому действию жидкости на стенки вертикального резервуара (рис. 1).

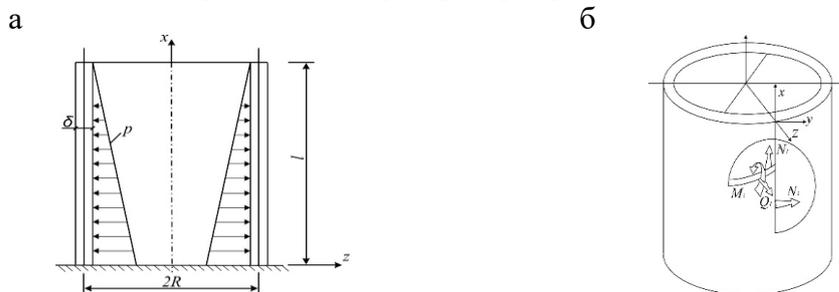


Рис. 2. Осесимметричное нагружение цилиндрической оболочки внутренние усилия
 Fig. 2. Axisymmetric loading of a cylindrical shell internal forces

При наличии осевой симметрии основные уравнения существенно упрощаются. Сдвигающее усилие S и крутящий момент H обращаются в нуль. Усилия, деформации и перемещения, благодаря симметрии, не зависят от полярного угла θ , соответственно все производные по θ в указанных уравнениях также обращаются в нуль. Оставшиеся усилия, показанные на рис. 2 б Примем, что из составляющих поверхностных нагрузок отлична от нуля только одна: $p_3 = q = \gamma(l - x)$, где γ – удельный вес жидкости.

Равновесная система принимает вид:

$$\begin{cases} 1. & \frac{dN_1}{dx} = 0; \\ 2. & \frac{d^2M_1}{dx^2} - \frac{N_2}{R} + q = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Из уравнений (9) и (11) останутся:

$$\begin{cases} 1. & N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{du_0}{dx} + \nu \frac{w}{R} \right) - N_1^{cr} = 0 \\ 2. & N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{w}{R} + \nu \frac{du_0}{dx} \right) - N_2^{cr} \\ 3. & M_1 = -D \frac{d^2w}{dx^2} - M_1^{cr} \\ 4. & M_2 = -\nu D \frac{d^2w}{dx^2} - M_2^{cr} \end{cases} \quad (14)$$

Из уравнений (6) для деформаций останутся:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ w \end{Bmatrix}; \chi_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (15)$$

Из первого уравнения (14) определим:

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{1 - \nu^2}{Eh} N_1^{cr} - \nu \frac{w}{R} \quad (16)$$

и подставим во второе уравнение (14):

$$N_2 = \frac{Ehw}{R} + \nu N_1^{cr} - N_2^{cr} \quad (17)$$

Окончательно подставив (17) и третье соотношение из (14) во второе уравнение (13) получим разрешающее уравнение относительно прогиба w :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Ehw}{R^2} = q + q^{cr} \quad (18)$$

где

$$q^{cr} = \frac{1}{R} (N_2^{cr} - \nu N_1^{cr}) - \frac{d^2 M_1^{cr}}{dx^2}$$

Условия на границе:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0; \quad & w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0; \\ \text{при } x = h: \quad & M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} - M_1^{cr} = 0; \\ & Q_1 = \frac{dM_1}{dx} = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{dM_1^{cr}}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (18a)$$

Для вычисления деформаций ползучести вводится равномерная сетка по времени. Величина $\varepsilon_{i,t+\Delta t}^*$ в момент времени $(t + \Delta t)$ вычисляется на основе метода Эйлера [5]:

$$\frac{\partial \varepsilon_i^{cr}}{\partial t} \approx \frac{\varepsilon_{i,t+\Delta t}^{cr} - \varepsilon_{i,t}^{cr}}{\Delta t} \implies \varepsilon_{i,t+\Delta t}^* = \varepsilon_{i,t}^{cr} + \frac{\partial \varepsilon_i^{cr}}{\partial t} \Delta t. \quad (19)$$

Аналогичный подход для решения задач ползучести применяется в работах [3,8].

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка (18) при действии осесимметричной гидростатической нагрузки, которая распределена по линейному закону (20) может быть осуществлено различными методами, в том числе и численными [1,10-12]:

$$p_3 = q = \gamma(l - x) \quad (20)$$

В данной статье рассматривается численно-аналитический метод интегрирования данного уравнения и верифицируется численным методом – методом сеток [1].

Введем безразмерную координату ξ , связанная с декартовой координатой x соотношением:

$$\xi = \psi x \quad (21)$$

Здесь ψ – физико-геометрический параметр оболочки.

$$\psi = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 h^2}}$$

В безразмерных координатах разрешающее уравнение (18) примет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4w = \frac{1}{\psi^4 D} \left\{ q + \frac{1}{R} (N_2^{cr} - \nu N_1^{cr}) - \psi^2 \frac{d^2 M_1^{cr}}{d\xi^2} \right\} \quad (22)$$

При решении данной задачи удобнее, использовать линейные комбинации, так называемые функции А.Н. Крылова [10]. Запишем решение уравнения (22) как:

$$w = C_1 K_1 + C_2 K_2 + C_3 K_3 + C_4 K_4 + \bar{w}_0 + \bar{w}^{cr} \quad (23)$$

где, \bar{w}_0 – частное упругое решение (22), \bar{w}^{cr} – добавка к частному решению, вызванной ползучестью, K_1, K_2, K_3, K_4 – функции А.Н. Крылова [6].

$$\begin{aligned} K_1(\xi) &= ch\xi \cdot \cos\xi, \\ K_2(\xi) &= 0,5(ch\xi \cdot \sin\xi + sh\xi \cdot \cos\xi), \\ K_3(\xi) &= 0,5 ch\xi \cdot \cos\xi, \\ K_4 &= 0,25(ch\xi \cdot \sin\xi - sh\xi \cdot \cos\xi), \end{aligned} \quad (24)$$

Функция \bar{w}_0 может быть выражена через функции А.Н. Крылова интегралом:

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{\psi^4 D} \int_0^\xi K_4(\xi - t) \cdot q(t) dt. \quad (25)$$

Выразим нагрузку (20) через безразмерные координаты:

$$q(\xi) = \frac{\gamma}{\psi} (\lambda - \xi), \quad \lambda = \psi l - \text{безразмерная длина оболочки} \quad (26)$$

или с учетом (26), функция \bar{w}_0 имеет вид:

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{4 \cdot \psi^5 \cdot D} (\lambda - \xi - \lambda K_1 + K_2) \quad (27)$$

Для функции \bar{w}^{cr} запишем:

$$\bar{w}^{cr} = \frac{1}{\psi^4 \cdot D} \int_0^\xi \left(-\psi^2 \frac{d^2 M^{cr}}{d\xi^2} \Big|_{\xi=t} + \frac{1}{R} (N_2^{cr}(t) - \nu N_1^{cr}(t)) \right) K_4(\xi - t) dt \quad (28)$$

Угол поворота записывается в виде:

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = \psi \left(-C_1 K_4 + C_2 K_1 + C_3 K_2 + C_4 K_3 + \frac{\gamma}{4 \cdot \psi^5 \cdot D} (-1 + 4\lambda K_4 + K_1) \right) + \frac{d\bar{w}^{cr}}{dx} \quad (29)$$

Изгибающий момент определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} - M_1^{cr} \\ &= -\psi^2 D \left(-4C_1 K_3 + C_2 K_4 + C_3 K_1 + C_4 K_2 + \frac{\gamma}{\psi^5 \cdot D} (\lambda K_3 - K_4) \right) - D \frac{d\bar{w}^{cr}}{dx} \\ &\quad - M_1^{cr} \end{aligned} \quad (30)$$

Выражение для поперечной силы принимает вид:)

$$\begin{aligned} Q_1 &= -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{dM_1^{cr}}{dx} \\ &= -\psi^3 D \left(-4C_1 K_2 - 4C_2 K_3 - 4C_3 K_4 + C_4 K_1 + \frac{\gamma}{\psi^5 \cdot D} (\lambda K_2 - K_3) \right) - D \frac{d^3 \bar{w}^{cr}}{dx^3} - \frac{dM_1^{cr}}{dx} \end{aligned} \quad (31)$$

Для граничных условий запишем следующим образом. Подставим граничные условия (18а) в (23), (29) - (31), получим:

$$\begin{aligned} w(0) = 0 &\rightarrow C_1 = \bar{w}^{cr} = 0; \\ \frac{dw(0)}{dx} = 0; \psi C_2 + \frac{d\bar{w}^{cr}}{dx} \Big|_{x=0} = 0 &\rightarrow C_2 = -\frac{1}{\psi} \frac{d\bar{w}^{cr}}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{d\bar{w}^{cr}}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} M_1(\lambda) = 0: -M_1^{cr} \Big|_{x=l} - \psi^2 \\ \cdot D \left(\frac{4}{\psi} \frac{d\bar{w}^{cr}}{dx} \Big|_{x=0} K_4(\lambda) + C_3 K_1(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) + \frac{\gamma}{\psi^5 \cdot D} (\lambda K_3(\lambda) - K_4(\lambda)) \right) \\ - D \frac{d^2 \bar{w}^{cr}}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda) = 0: -\psi^3 \cdot D \left(\frac{4}{\psi} \frac{d\bar{w}^{cr}}{dx} \Big|_{x=0} K_3(\lambda) - 4C_3 K_4(\lambda) + C_4 K_1(\lambda) + \frac{\gamma}{\psi^5 \cdot D} (\lambda K_2(\lambda) - K_3(\lambda)) \right) \\ - D \frac{d^3 \bar{w}^{cr}}{dx^3} \Big|_{x=l} - \frac{dM_1^{cr}}{dx} \Big|_{x=l} = 0; \end{aligned}$$

Таким образом, для определения постоянных C_3 и C_4 на каждом шаге по времени имеем два уравнения с двумя неизвестными. Для определения производных

$$\frac{d\bar{w}^{cr}}{d\xi}, \frac{d^2\bar{w}^{cr}}{d\xi^2}, \frac{d^3\bar{w}^{cr}}{d\xi^3}$$

Воспользуемся приемом определения производных деформаций ползучести в [1] и приведем ее в том же виде:

$$\frac{d\bar{w}^{cr}}{d\xi} = \frac{1}{4} [e^\xi \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_1 + e^\xi \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_2 - e^{-\xi} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_3 - e^{-\xi} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_4], \quad (34)$$

$$\frac{d^2\bar{w}^{cr}}{d\xi^2} = \frac{1}{4} [e^\xi \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_1 + e^\xi \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_2 - e^{-\xi} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_3 - e^{-\xi} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_4], \quad (35)$$

$$\frac{d^3\bar{w}^{cr}}{d\xi^3} = \frac{1}{4} [e^\xi \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_1 + e^\xi \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_2 - e^{-\xi} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_3 - e^{-\xi} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_4], \quad (36)$$

где

$$I_1 = \int_0^\xi f(t)e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt; \quad I_2 = \int_0^\xi f(t)e^{-t} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt;$$

$$I_3 = \int_0^\xi f(t)e^t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt; \quad I_4 = \int_0^\xi f(t)e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt.$$

где

$$f(t) = -\alpha^2 \frac{d^2 M^*}{d\xi^2} \Big|_{\xi=t} + \frac{1}{R} (N_\theta^*(t) - \nu N_x^*(t)).$$

Для функции \bar{w}^{cr} можно также записать:

$$\bar{w}^{cr} = \frac{\sqrt{2}}{8} \{e^\xi \sin \xi \cdot I_1 - e^\xi \cos \xi \cdot I_2 + e^{-\xi} \cos \xi \cdot I_3 + e^{-\xi} \sin \xi \cdot I_4\}. \quad (37)$$

Интегралы I_1, I_2, I_3, I_4 вычисляются численно по формуле Симпсона.

Для решения вводится сетка по координатам x и z , а также по времени t .

После определения прогибов из уравнения (18) по формулам (15) и (16) вычисляются деформации. Далее определяются напряжения по формулам (8).

Вывод. Расчет был выполнен в программном комплексе MATLAB. Для верификации правильности решения воспользуемся данными из [1].

Был выполнен расчет полимерного резервуара из вторичного ПВХ $h = 3$ см, $l = 3$ м, $R = 2$ м, $\gamma = 10$ кН/м³, $E = 1480$ МПа, $\nu = 0.3$.

Уравнение состояния принималось нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича [9]. Реологические параметры ПВХ при температуре 20°C: модуль высокоэластичности $E_\infty = 5990$ МПа, модуль скорости $m^* = 12.6$ МПа, начальная релаксационная вязкость $\eta_0^* = 9.06 \cdot 10^5$ МПа · мин.

Оболочка по длине разбивалась на $n_x = 100$ отрезков, по толщине на $n_z = 50$ интервалов, по времени на $n_t = 100$ шагов.

В табл. 1. приведено сравнение, выполненное в [1] для верификации правильности решения.

Наибольшее расхождение результатов составляет 0.15%, что свидетельствует о их достоверности.

Таблица 1. Сравнение наибольших перемещений в различные моменты времени, полученных МКР и численно-аналитического метода (ЧАМ)
Table 1. Comparison of the largest displacements at different points in time obtained by the MKR and the numerical-analytical method (NAM)

t , час	1	2	3	4	5	6	7	8	
w , мм	8.3732	8.7825	9.0182	9.1622	9.2532	9.3118	9.3500	9.3751	
ММ	ЧАМ	8.3839	8.7946	9.0312	9.1758	9.2671	9.3260	9.3644	9.3896

На рис. 3 – 4 приведено соответственно изменение напряжений w_{max} во времени и по высоте цилиндра при $t = 10$ часов соответственно. В процессе ползучести произошло увеличение максимального прогиба на 23,5%. Рост кольцевых напряжений в основании объясняется ростом по абсолютному значению кольцевого изгибающего момента, график изменения которого во времени приведен на рис. 4.

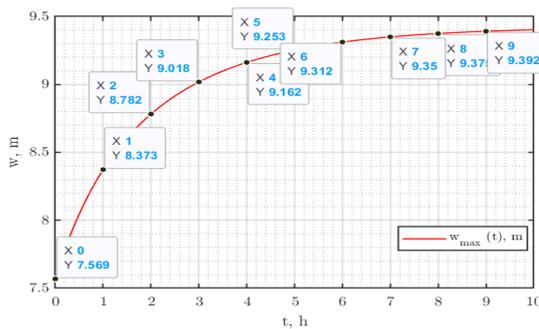


Рис. 3. График роста максимального прогиба во времени (численно-аналитический расчет)
Fig. 3. Graph of the growth of the maximum deflection over time (numerical-analytical calculation)

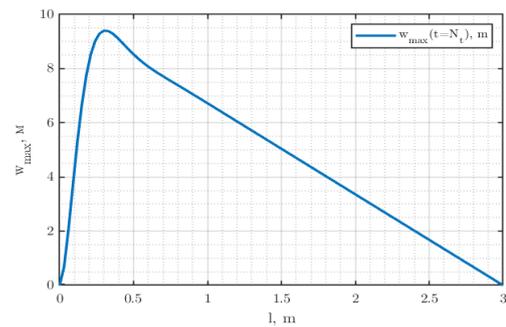


Рис. 4. График изменение максимального прогиба w_{max} по высоте цилиндра при $t = 10$ часов
Fig. 4. Graph of the change in the maximum deflection w_{max} along the height of the cylinder at $t=10$ hours

На рис. 5 приведено соответственно изменение напряжений σ_1 и σ_2 в основании при $z = -h/2$. Из представленных графиков видно, что напряжения σ_x остаются практически постоянными, а напряжения выросли на 14,8%.

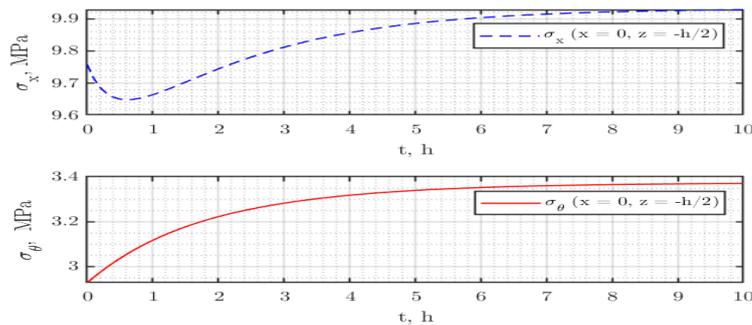


Рис. 5. График изменения напряжений $\sigma_1 = \sigma_x$ и $\sigma_2 = \sigma_\theta$ во времени
Fig. 5. Graph of changes in stresses $\sigma_1 = \sigma_x$ and $\sigma_2 = \sigma_\theta$ over time

Таким образом, расчет оболочки только в упругой стадии приводит к заниженным значениям напряжений, и как следствие возможному ее разрушению в процессе эксплуатации.

Библиографический список:

1. Чепурненко А.С., Сайбель А.В., Савченко А.А. Расчет круговой цилиндрической оболочки по моментной теории с учетом ползучести // Инженерный вестник Дона, 2015, № 2.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. 264 с.
3. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. pp. 707-710.
4. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1004-1005. pp. 257-260.

5. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Козельская М.Ю. Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона // Научное обозрение. 2014. № 11. С. 759-763.
6. Монахов В.А. Теория пластин и оболочек. Пенза: ПГУАС, 2016. 252 с.
7. Cherpurnenko A.S., Yazyev B.M., Savchenko A.A. Calculation for the circular plate on creep considering geometric nonlinearity // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. pp. 1680–1685.
8. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams. International Journal of Mechanical Sciences. 2008; 50(3.): 578-588.
9. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. М.: Академия наук СССР. 1931. 80 с.
10. Лалин В. В., Колосова Г. С. Численные методы в строительстве. СПб. Изд-во СПбГТУ, 2001. 71 с.
11. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams // Structural engineering and mechanics. 2010. v. 35. №5. P. 631-643.
12. Milind T. R., Date P. P. Analytical and finite element modeling of strain generated in equal channel angular extrusion // International Journal of Mechanical Sciences. 2012. V. 56. № 1. P. 26-34.

References:

1. Cherpurnenko A.S., Saibel A.V., Savchenko A.A. Calculation of a circular cylindrical shell using the moment theory taking into account creep. *Engineering Bulletin of the Don*, 2015;2. (In Russ)
2. Samul V.I. Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Vysshaya shkola, 1982;264 (In Russ)
3. Andreev V.I., Yazyev B.M., Cherpurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep. *Advanced Materials Research*. 2014; 900:707-710.
4. Andreev V.I., Cherpurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep. *Advanced Materials Research*. 2014; 1004-1005: 257-260.
5. Yazyev B.M., Cherpurnenko A.S., Litvinov S.V., Kozelskaya M.Yu. Stress-strain state of prestressed reinforced concrete cylinder taking into account concrete creep. *Scientific Review*. 2014;11:759-763 (In Russ)
6. Monakhov V.A. Theory of plates and shells. Penza: PSUAS, 2016;252 (In Russ)
7. Cherpurnenko A.S., Yazyev B.M., Savchenko A.A. Calculation for the circular plate on creep considering geometric nonlinearity. *Procedia Engineering*. 2016;150:1680–1685.
8. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2008; 50(3): 578-588.
9. Krylov A. N. On the calculation of beams lying on an elastic foundation. Moscow: USSR Academy of Sciences. 1931;80. (In Russ)
10. Lalin V. V., Kolosova G. S. Numerical methods in construction. St. Petersburg: Publishing House of St. Petersburg State Technical University, 2001;71. (In Russ)
11. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams. *Structural engineering and mechanics*. 2010;35(5): 631-643.
12. Milind T. R., Date P. P. Analytical and finite element modeling of strain generated in equal channel angular extrusion. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012;56.(1): 26-34.

Сведения об авторах:

Магомедов Марсель Айдемирович, аспирант кафедры «Строительная механика»; marsmag05@ya.ru.
ORCID 0000-0001-5517-919X

Кузнецов Владимир Вячеславович, соискатель; ibm2225101@gmail.com. ORCID0009-0009-3688-4737
Языев Батыр Меретович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Строительная механика и теория сооружений»; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0002-5205-1446

Литвинов Степан Викторович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика и теория сооружений»; ps62@yandex.ru; ORCID 0000-0001-5729-1425,

Information about authors:

Marcel A. Magomedov, Postgraduatet, Department of Structural Mechanics;; marsmag05@ya.ru
ORCID 0000-0001-5517-919X;

Vladimir V. Kuznetsov, Applicant; ibm2225101@gmail.com. ORCID 0009-0009-3688-4737

Batyr M. Yazyev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; ps62@yandex.ru ; ORCID 0000-0002-5205-1446

Stepan V. Litvinov, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department of Structural Mechanics and Theory of Structures; ps62@yandex.ru ; ORCID 0000-0001-5729-1425,

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 25.09.2024.

Одобрена после рецензирования / Revised 28.10.2024.

Принята в печать / Accepted for publication 10.11.2024.