

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
INFORMATION TECHNOLOGY AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 532.52



DOI: 10.21822/2073-6185-2024-51-4-50-59

Оригинальная статья/Original article

Моделирование течения турбулентной жидкости

на основе решения уравнения Матье

В.В. Гарбузов, А.П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий,
394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 73А, Россия

Резюме. Цель. В работе рассматривается задача моделирования течения жидкости в турбулентном режиме. Основные причины того, что возникает турбулентное течение, связаны с тем, что существуют большие скорости движения жидкостей, помимо этого могут быть препятствия или изменения в формах течений. **Метод.** Для определения характеристик течения предлагается использовать уравнение Матье. Приводятся основные этапы алгоритма расчета функций Матье, которые были использованы в ходе реализации компьютерной программы. **Результат.** При оценках собственных значений показано, что необходимо опираться на соответствующие трансцендентные уравнения. Проиллюстрировано, как происходит вычисление модифицированных функций Матье. Указано, каким образом необходимо вести расчеты в случае малого значения параметра в функциях Матье. Представлена блок-схема реализованного алгоритма моделирования турбулентности. На базе библиотеки Qt в среде Qt Creator была создана GUI оболочка, чтобы осуществлять моделирование турбулентности. При осуществлении процесса моделирования значение константы Смагоринского выбиралось равным 0.01. Для временного шага проводился выбор значения длины 0.05. В ходе реализации моделирования были использованы 2000 временных шагов. Запись для результатов моделирования осуществлялась через каждые 10 шагов. Представлены визуальным образом результаты моделирования. **Вывод.** Создана математическая модель, на основе которой существуют возможности для моделирования турбулентных сред. Математическая модель построена для различных параметров в ходе обтекания твердых тел турбулентными потоками.

Ключевые слова: моделирование, уравнение Матье, собственная функция, течение жидкости, турбулентность, алгоритм.

Для цитирования: В.В. Гарбузов, А.П. Преображенский. Моделирование течения турбулентной жидкости на основе решения уравнения Матье. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(4):50-59. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-50-59

Modeling of turbulent fluid flow based on the solution of the Mathieu equation

V.V. Garbuzov, A.P. Preobrazhensky

Voronezh Institute of High Technologies,
73A Lenin St., Voronezh 394043, Russia

Abstract. Objective. This work examines the problem of fluid flow simulation in a turbulent regime. The main reasons why turbulent flow occurs are due to the existence of high velocities of movement in fluids; besides that, there may be obstacles or changes in the shapes of flows. **Method.** To determine the characteristics of a flow, it is proposed to use Mathieu's equation. The main steps of the solution algorithm are presented for Mathieu functions that were used over the course of the computer program execution. **Result.** Upon evaluating eigenvalues, it is shown that it is necessary to rely on the corresponding transcendental equations. It is illustrated how modified Mathieu functions are calculated. It is indicated how calculations should be car-

ried out in the case of a small parameter value in Mathieu functions. A block diagram of the executed turbulence modeling algorithm is presented. In order to conduct turbulence simulation, a GUI shell based on the Qt library was created in the Qt Creator environment. During the simulation process, the value of the Smagorinsky constant was chosen to be equal to 0.01. For the time step, a length value of 0.05 was selected. During the execution of the simulation, 2000 time steps were used. The simulation results were recorded every 10 steps. The results of the simulation are presented visually. **Conclusion.** A mathematical model has been created, on the basis of which there are possibilities for modeling turbulent media. The mathematical model has been constructed for various parameters during the flow of solid bodies by turbulent flows.

Keywords: simulation, Mathieu's equation, eigenfunction, fluid flow, turbulence, algorithm

For citation: V.V. Garbuzov, A.P. Preobrazhensky. Modeling of turbulent fluid flow based on the solution of the Mathieu equation. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024; 51(4):50-59. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-4-50-59

Введение. Уравнение Матье в гидродинамике является одним из ключевых уравнений, описывающих движение жидкости или газа в турбулентных потоках. Это уравнение было впервые предложено французским физиком и математиком Пьером Симоном Лапласом в начале XIX века и названо в честь французского инженера и физика Андре Матье.

Уравнение Матье выражает закон сохранения энергии для потока жидкости и имеет вид:

$$\frac{du}{dt} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u,$$

где u - вектор скорости потока, t - время, ρ - плотность жидкости, p - давление, ν - кинематическая вязкость, ∇ - оператор градиента.

Уравнение Матье описывает взаимодействие между инерционными силами (первое слагаемое), давлением (второе слагаемое) и вязкостью (третье слагаемое) в потоке жидкости. Оно играет важную роль в моделировании турбулентных потоков, например, при исследовании атмосферных явлений, океанографии, а также в промышленности при проектировании трубопроводов и насосов.

Постановка задачи. Использование уравнения Матье требует специализированных знаний в области гидродинамики и математической физики. Его численное решение часто осуществляется с помощью компьютерных программ и методов вычислительной гидродинамики [1, 2].

Уравнение Матье в гидродинамике, также известное как уравнение Навье-Стокса, имеет несколько формулировок в зависимости от контекста и задачи. Вот некоторые основные формулы, связанные с уравнением Матье:

1. Уравнение Навье-Стокса для инкомпрессибельной жидкости:

$$\frac{du}{dt} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u$$

2. Уравнение неразрывности:

$$\nabla \cdot u = 0$$

3. Уравнение движения в цилиндрических координатах:

$$\rho \left(\frac{du_r}{dt} + u_r \frac{du_r}{dr} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = -\frac{dp}{dr} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du_\theta}{d\theta} \right)$$

$$\rho \left(\frac{du_\theta}{dt} + u_r \frac{du_\theta}{dr} + u_r \cdot \frac{u_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{du_r}{d\theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{du_z}{dt} + u_r \frac{du_z}{dr} + u_z \cdot \frac{u_r}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu (\nabla^2 u_z)$$

4. Уравнение для течения Куэтта:

$$u = a \cdot (y - y^2)$$

Эти формулы представляют собой основу для описания движения жидкости или газа в турбулентных потоках и используются в гидродинамике для моделирования различных явлений. Они могут быть дополнены различными условиями на границах и начальными условиями в зависимости от конкретной задачи.

Методы исследования. Рассмотрим практически важную задачу из гидродинамики, в которой мы также можем использовать уравнение Матье для ее решения [3]. Рассмотрим задачу о колебаниях жидкости в цилиндрической трубе.

Представим, что у нас есть цилиндрическая труба радиуса R с жидкостью внутри. Если мы создадим колебания давления на одном из концов трубы, то это приведет к возникновению стоячих волн внутри жидкости. Эти колебания могут быть описаны уравнением Матье.

Уравнение Матье для колебаний жидкости в цилиндрической трубе имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + k^2 \psi = 0,$$

где $\psi(r)$ - функция, описывающая колебания давления в жидкости, r - радиальная координата внутри трубы, k - волновое число.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\psi(r) = J_0(kr) + BY_0(kr),$$

где J_0 и Y_0 - функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка соответственно, B - коэффициент, который определяется начальными условиями.

Для задачи о колебаниях жидкости в цилиндрической трубе можно также задать граничные условия на концах трубы, что позволит нам найти допустимые значения волнового числа k и соответствующие собственные функции $\psi(r)$, описывающие колебания давления в жидкости [4].

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (p - 2q \cos(2z))y = 0 \quad (1)$$

впервые получено и исследовано Матье. Уравнение Матье имеет решения при любых значениях параметров q и p , причем решения уравнения (1) являются регулярными функциями переменной z , если ее величина конечна. Для исследования различных прикладных задач особое значение приобретают периодические решения уравнения (1).

Известно, что уравнение Матье (1) может иметь следующие периодические решения, которые называются функциями Матье.

$$\begin{aligned} {}_c C_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} \cos(2n + p)z, \\ {}_s C_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} \sin(2n + p)z, \quad (p = 0, 1), \end{aligned} \quad (2)$$

Обсуждение результатов. В настоящей работе разработаны алгоритм и машинная программа расчета функций Матье и их нулей.

Ниже мы рассмотрим основные этапы алгоритма расчета функций Матье, которые были использованы нами при написании компьютерной программы. Представим, что в уравнение (1) можно осуществить подстановку любого из рядов (2). Также приравняв нулю коэффициенты при $\cos(2nz)$, $\cos((2n + 1)z)$, $\sin(2nz)$, $\sin((2n + 1)z)$ с учетом $n = 0, 1, 2, \dots$. В таких случаях приходим к рекуррентным соотношениям [3]:

$$\begin{aligned} aA_0 - qA_2 &= 0; \\ (a-4)A_2 - q(A_4 + 2A_0) &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (a-4r^2)A_{2r} - q(A_{2r+2} + A_{2r-2}) &= 0; \\ (a-1-q)A_1 - qA_3 &= 0; \\ [a-(2r+1)^2]A_{2r+1} - q(A_{2r+3} + A_{2r-1}) &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (a-1+q)B_1 - qB_3 &= 0; \\ [a-(2r+1)^2]B_{2r+1} - q(B_{2r+3} + B_{2r-1}) &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (a-4)B_2 - qB_4 &= 0; \\ (a-4r^2)B_{2r} - q(B_{2r+2} + B_{2r-2}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения коэффициентов разложения $A_{2r}, A_{2r+1}, B_{2r}, B_{2r+1}$ в (2) используются условия нормировки [5]

$$\begin{aligned} 2[A_0]^2 + \sum_{r=1}^{\infty} [A_{2r}]^2 &= 1, \\ \sum_{r=0}^{\infty} [A_{2r+1}]^2 &= 1, \\ \sum_{r=0}^{\infty} [B_{2r+1}]^2 &= 1, \\ \sum_{r=0}^{\infty} [B_{2r+2}]^2 &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Собственные значения, при которых уравнение (1) имеет решения ${}_sC_{2m}(z, q)$, обычно обозначаются $a_{2m}(q)$.

Для расчета собственных значений $a_{2m}(q)$ [6, 7] удобно воспользоваться трансцендентными уравнениями, соответствующими ветвям $p_{2m}(q) = p_{2m}(q)$ кривой $p = p(q)$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{-2q^2}{4 - a_0 - \frac{q^2}{16 - a_0 - \frac{q^2}{36 - a_0 - \dots - \frac{q^2}{4k^2 - a_0 - \dots}}}}; \\ a_2 &= 4 + \frac{2q^2}{a_2 - \frac{q^2}{16 - a_2 - \frac{q^2}{36 - a_2 - \frac{q^2}{64 - a_2 - \dots - \frac{q^2}{4k^2 - a_2 - \dots}}}}; \end{aligned}$$

$$a_{2m} = (2m)^2 + \frac{q^2}{a_{2m} - (2m-2)^2 - \frac{q^2}{a_{2m} - (2m-4)^2 - \dots - \frac{q^2}{a_{2m} - 4 - \frac{2q^2}{a_{2m}}}} - \frac{q^2}{(2m+2)^2 - a_{2m} - \frac{q^2}{(2m+4)^2 - a_{2m} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k)^2 - a_{2m} - \dots}}. \quad (8)$$

Выше рассматривалась функция Матье с четным индексом ${}_s C_{2m}(z, q)$.

По аналогии можно найти условия существования решений вида ${}_s C_{2m+1}(z, q)$, ${}_s C_{2m+1}(z, q)$, ${}_s C_{2m+2}(z, q)$ и собственные значения $a_{2m+1}(q)$, $b_{2m+2}(q)$, $b_{2m+1}(q)$.

Трансцендентные уравнения, которые относятся к собственным значениям уравнения Матье $a_{2m+1}(q)$, $b_{2m+2}(q)$, $b_{2m+1}(q)$ имеют следующий вид [8].

$$a_1 = 1 + q - \frac{q^2}{9 - a_1 - \frac{q^2}{25 - a_1 - \frac{q^2}{49 - a_1 - \dots - \frac{q^2}{(2k+1)^2 - a_1 - \dots}}};$$

$$a_{2m+1} = (2m+1)^2 + \frac{q^2}{a_{2m+1} - (2m-1)^2 - \frac{q^2}{a_{2m+1} - (2m-3)^2 - \dots - \frac{q^2}{a_{2m+1} - 1 - q}} - \quad (9)$$

$$\frac{q^2}{(2m+3)^2 - a_{2m+1} - \frac{q^2}{(2m+5)^2 - a_{2m+1} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k+1)^2 - a_{2m+1} - \dots}};$$

$$b_2 = 4 - \frac{q^2}{16 - b_2 - \frac{q^2}{36 - b_2 - \frac{q^2}{64 - b_2 - \dots - \frac{q^2}{(2k+2)^2 - b_2 - \dots}}};$$

$$b_{2m+2} = (2m+2)^2 + \frac{q^2}{b_{2m+2} - (2n)^2 - \frac{q^2}{b_{2m} - (2m-2)^2 - \dots - \frac{q^2}{b_{2m+2} - 4}} - \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{q^2}{(2m+4)^2 - b_{2m+2} - \frac{q^2}{(2m+6)^2 - b_{2m+2} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k+2)^2 - b_{2m+2} - \dots}}; \\
 & b_1 = 1 - q - \frac{q^2}{9 - b_1 - \frac{q^2}{25 - b_1 - \frac{q^2}{49 - b_1 - \dots - \frac{q^2}{(2k+1)^2 - b_1 - \dots}}}}; \\
 & b_{2m+1} = (2m+1)^2 + \frac{q^2}{b_{2m+1} - (2m-1)^2 - \frac{q^2}{b_{2m+1} - (2m-3)^2 - \dots - \frac{q^2}{b_{2m+1} - 1 + q}} - \dots \\
 & \frac{q^2}{(2m+3)^2 - b_{2m+1} - \frac{q^2}{(2m+5)^2 - b_{2m+1} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k+1)^2 - b_{2m+1} - \dots}}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

При оценках модифицированных функций Матье можно применять выражения

$$\begin{aligned}
 {}_c C e_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} ch(2n+p)z = {}_c C_{2m+p}(jz, q) \\
 {}_s C e_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} sh(2n+p)z = -j {}_s C_{2m+p}(jz, q), (p=0,1).
 \end{aligned} \tag{12}$$

При реализации разложения функции ${}_c C_0(z, q)$, чтобы определить коэффициент A_0 , можно опираться на выражения [1]

$$\begin{aligned}
 V_0 &= (a-4)/4 = A_2 / A_0; \\
 -V_{2r-2} &= [q/4r^2] / [1 - (1/4r^2)(a - qV_{2r})], \text{ при } r \geq 2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2 + (V_0)^2 + (V_2)^2 + (V_4)^2 + \dots}}. \tag{14}$$

тогда

По другим функциям Матье, чтобы вычислять коэффициенты в разложении, можно использовать выражения [1]

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (a-1-q)/q = A_3 / A_1; \\
 -V_{2r-1} &= [q/(2r+1)^2] / [1 - a/(2r+1)^2 + qV_{2r+1}/(2r+1)^2] \quad (r \geq 2);
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (a-1+q)/q = B_3 / B_1; \\
 -V_{2r-1} &= [q/(2r+1)^2] / [1 - a/(2r+1)^2 + qV_{2r+1}/(2r+1)^2] \quad (r \geq 2);
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 &= (a-4)/q = B_4 / B_2; \\
 -V_{2r-2} &= [q/4r^2] / [1 - a/4r^2 + qV_{2r}/4r^2] \quad (r \geq 3).
 \end{aligned} \tag{17}$$

При расчете функций Матье, если есть малые значения в параметре q ($q < 1$) можно опираться на разложения по такому параметру.

$$\begin{aligned}
 {}_c C_0(z, q) &= 2^{-1/2} \left[1 - \frac{q}{2} \cos(2z) + q^2 \left(\frac{\cos(4z)}{32} - \frac{1}{16} \right) - q^3 \left(\frac{\cos(6z)}{1152} - \frac{11\cos(2z)}{128} \right) + \dots \right] \\
 {}_c C_1(z, q) &= \cos(z) - \frac{q}{8} \cos(3z) + q^2 \left(\frac{\cos(5z)}{192} - \frac{\cos(3z)}{64} - \frac{\cos(z)}{128} \right) - \\
 &\quad - q^3 \left(\frac{\cos(7z)}{9216} - \frac{\cos(5z)}{1152} - \frac{\cos(3z)}{3072} + \frac{\cos(z)}{512} \right) + \dots \\
 {}_c C_2(z, q) &= \cos(2z) - q \left(\frac{\cos(4z)}{12} - \frac{1}{4} \right) + q^2 \left(\frac{\cos(6z)}{384} - \frac{19\cos(2z)}{288} \right) + \dots, \quad (18) \\
 {}_s C_1(z, q) &= \sin(z) - \frac{q}{8} \sin(3z) + q^2 \left(\frac{\sin(5z)}{192} + \frac{\sin(3z)}{64} - \frac{\sin(z)}{128} \right) - \\
 &\quad - q^3 \left(\frac{\sin(7z)}{9216} + \frac{\sin(5z)}{1152} - \frac{\sin(3z)}{3072} - \frac{\sin(z)}{512} \right) + \dots, \\
 {}_c C_r(z, q) \Big\} &= \cos(rz - p\pi/2) - q \left\{ \frac{\cos[(r+2)z - p\pi/2]}{4(r+1)} - \frac{\cos[(r-2)z - p\pi/2]}{4(r-1)} \right\} + \\
 {}_s C_r(z, q) \Big\} &+ q^2 \left\{ \frac{\cos[(r+4)z - p\pi/2]}{32(r+1)(r+2)} + \frac{\cos[(r-4)z - p\pi/2]}{32(r-1)(r-2)} - \frac{\cos[rz - p\pi/2]}{32} \left[\frac{2(r^2+1)}{(r^2-1)^2} \right] \right\} + \dots,
 \end{aligned}$$

тогда можно дать оценку при $p = 0$ для ${}_c C_r(z, q)$, при $p = 1$ для рассматриваемого ${}_s C_r(z, q)$ ($r \geq 3$).

То есть, для собственных функций были рассмотрены основные этапы их определения. Алгоритм моделирования турбулентности моделью Смагоринского был реализован в виде кроссплатформенной динамической библиотеки под Windows и Linux.

Написание программы велось в среде компилятора GCC с использованием для компиляции Makefile. Скрипты Makefile автоматически составляют список исходных файлов, входящих в каждый модуль подсистемы.

Для обеспечения расширяемости каждый функциональный модуль библиотеки компилируется в статическую библиотеку. В финале все статические библиотеки интегрируются в одну динамическую. В ходе разработки использовались следующие библиотеки: Alglib, boost и GSL. Для демонстрации работы и отладки с помощью библиотеки Qt в среде Qt Creator была создана GUI оболочка для библиотеки моделирования турбулентности. Скриншот окна оболочки представлен на рис 1.

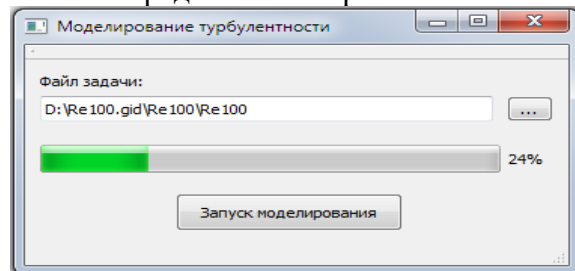


Рис. 1. GUI оболочка над библиотекой подсистемы моделирования турбулентности

Fig. 1. GUI shell over the turbulence modeling subsystem library

На рис. 2 показана блок-схема реализованного алгоритма моделирования турбулентности.

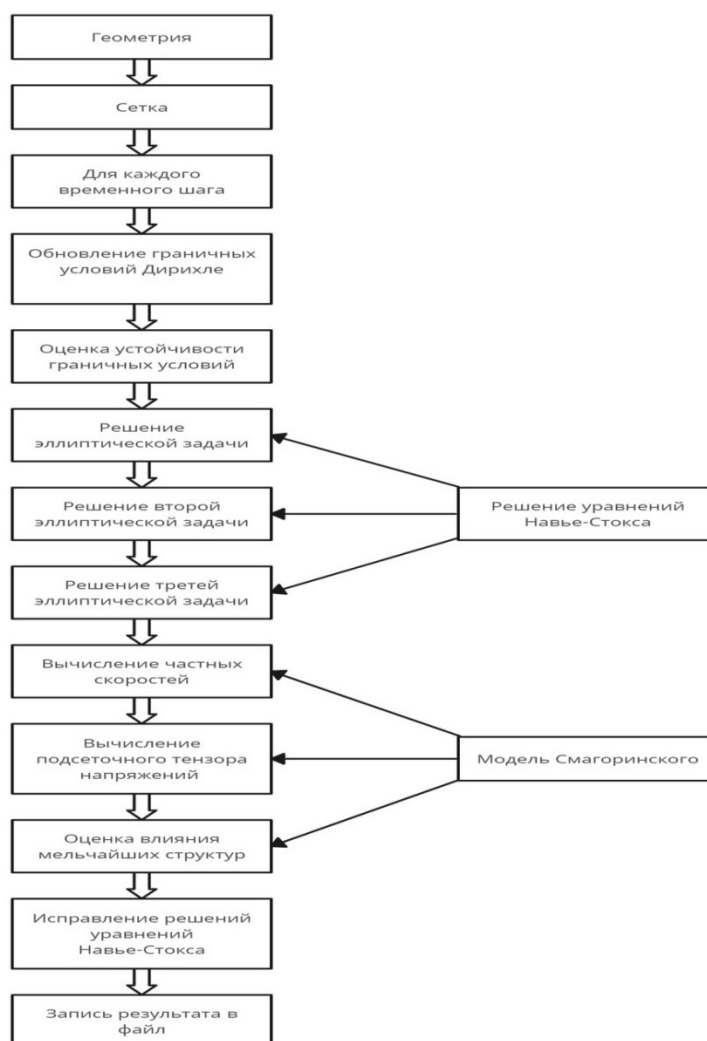


Рис. 2. Блок-схема алгоритма моделирования турбулентности

Fig. 2. Block diagram of the turbulence modeling algorithm

Создадим в программной среде простейшую геометрию в GID – обтекание водой круглого препятствия:

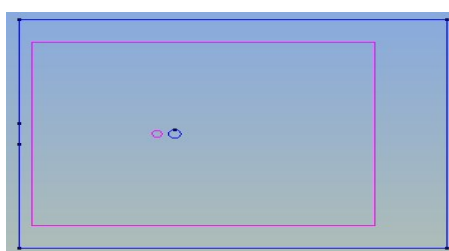


Рис. 3. Демонстрация геометрии задачи

Fig. 3. Demonstration of the problem geometry

Затем сетка, в которой размеры элементов равнялись 0.5, была сформирована с использованием соответствующей геометрии

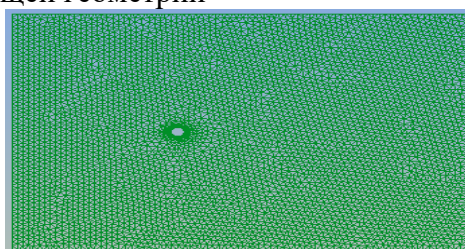


Рис. 4. Пример представления сетки на базе геометрии

Fig. 4. Example of mesh representation based on geometry

Пусть число Рейнольдса равнялось 100. Было осуществлено моделирование. Его результаты представлены ниже для случая, когда вода турбулентным образом будет обтекать препятствия. Значение константы Смагоринского в ходе моделирования выбиралось равным 0.01. Временной шаг имел значение длины 0.05. Процесс моделирования осуществлялся в течение 2000 временных шагов. При этом через каждые 10 шагов велась запись результатов моделирования.

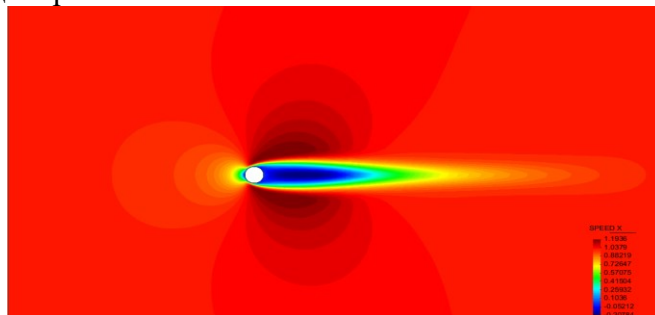


Рис. 5. Моделирование для шага 40
Fig. 5. Simulation for step 40

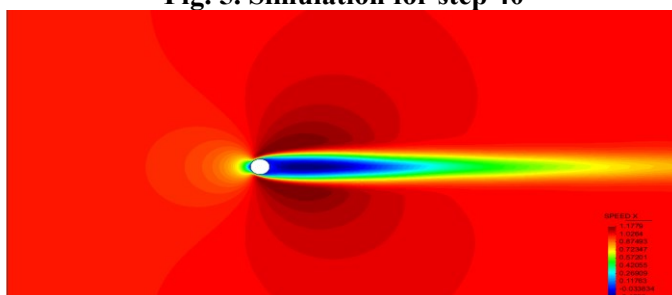


Рис. 6. Моделирование для шага 80
Fig. 6. Simulation for step 80

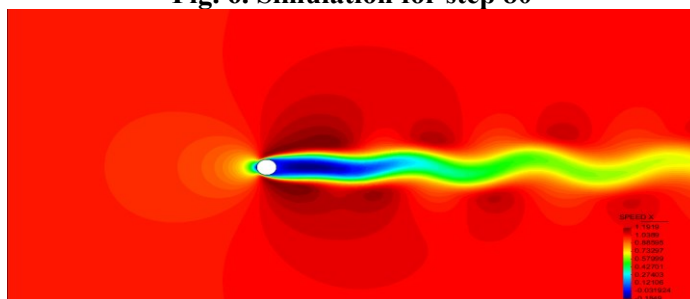


Рис. 7. Моделирование для шага 140
Fig. 7. Simulation for step 140

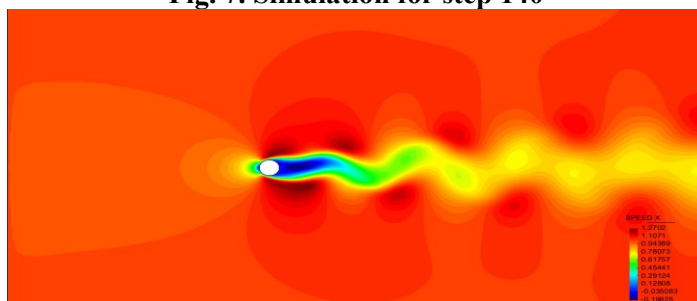


Рис. 8. Моделирование для шага 200
Fig. 8. Simulation for step 200

Вывод. Таким образом, в работе была создана математическая модель, на основе которой существуют возможности для моделирования турбулентных сред.

Модель была реализована в программном продукте. Были осуществлены процессы моделирования для различных параметров в ходе обтекания различных твердых тел турбулентными потоками.

Библиографический список:

1. Бреховских Л. М. Введение в механику сплошных сред / Бреховских Л. М., Гончаров В. В.; – Москва: 1982. – 335 с.
2. Левин В.Г. Физико-химическая гидродинамика / Левин В.Г.; Изд. 2-е, доп. и перераб. – Москва: ГИФМЛ, 1959. – 700 с.
3. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.; – Москва, 1986. – 736с.
4. Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Бреннер Г., Хаппепь Дж.; – Москва: Мир, 1976. – 650 с.
5. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов / Нахушева В.А. – Москва: Наука, 2006. - 173 с.
6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 300 с.
7. Дещеревский А.В. Вариации геофизических полей как проявления детерминированного хаоса во фрактальной среде / Дещеревский А.В., Сидорин А.Я., Сидорин И.А., Лукк А.А.; – Москва: ОИФЗ РАН, 1996. – 210 с.
8. Беданокowa, С. Ю. Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальных организаций: Автореферат на соискание кандидата физико-математических наук / Беданокowa, С. Ю.; – Таганрог, 2007. – 16 с.
9. Зайцев М.Л. Явное представление сокращенных в размерности уравнений Эйлера и Навье - Стокса несжимаемой жидкости в интегральной форме / Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.; – Волгоград: // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2021. – 20 с.
10. Зайцев М.Л. Явное представление сокращенных в размерности уравнений Эйлера сжимаемой жидкости и полной системы уравнений гидродинамики в интегральной форме / Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.; – Волгоград: // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2023. – 22 с.

References:

1. Brekhovskikh L. M. Introduction to Continuum Mechanics. Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V.; Moscow: 1982; 335 (In Russ)
2. Levin V.G. Physicochemical Hydrodynamics 2nd ed., suppl. and rev. Moscow: GIFML, 1959; 700 (In Russ)
3. Landau L. D. Hydrodynamics / Landau L. D., Lifgits E. M.; Moscow, 1986;736 (In Russ)
4. Brenner G. Hydrodynamics at Low Reynolds Numbers / Brenner G., Happen J.; Moscow: Mir, 1976; 650 (In Russ)
5. Nakhusheva V. A. Differential equations of mathematical models of nonlocal processes / Nakhusheva V.A. - Moscow: Nauka, 2006;173 (In Russ)
6. Tricomi F. Integral equations. Moscow: Publishing house of foreign literature, 1960; 300 (In Russ)
7. Deshcherevsky A.V. Variations of geophysical fields as manifestations of deterministic chaos in a fractal environment / Deshcherevsky A.V., Sidorin A.Ya., Sidorin I.A., Lukk A.A.; Moscow: OIFZ RAS, 1996; 210 (In Russ).
8. Bedanokova S. Yu. Mathematical modeling of water and salt regimes in soils with fractal organizations: Abstract for a candidate of physical and mathematical sciences.; Taganrog, 2007;16 (In Russ)
9. Zaitsev M.L. Explicit representation of the dimensionally reduced Euler and Navier-Stokes equations of an incompressible fluid in integral form / Zaitsev M.L., Akkerman V.B.; Volgograd: // Mathematical physics and computer modeling. 2021; 20 (In Russ).
10. Zaitsev M.L. Explicit representation of the dimensionally reduced Euler equations of a compressible fluid and the complete system of hydrodynamic equations in integral form / Zaitsev M.L., Akkerman V.B. Volgograd: *Mathematical physics and computer modeling*. 2023; 2 (In Russ)

Сведения об авторах:

Гарбузов Владислав Владимирович, преподаватель математики, преподаватель – исследователь; 9999vlad9999@mai.ru

Преображенский Андрей Петрович, доктор технических наук, профессор, руководитель студенческого научного клуба ВИБТ, заведующий кафедрой информационных систем и технологий; app@vivt.ru

Information about authors:

Vladislav V. Garbuzov, Mathematics teacher, research teacher; 9999vlad9999@mai.ru

Andrey P. Preobrazhensky, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the VIVT Student Scientific Club, Head of the Department of Information Systems and Technologies; app@vivt.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 24.05.2024.

Одобрена после рецензирования/ Revised 09.07.2024.

Принята в печать/Accepted for publication 30.10.2024.