СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 539.30
DOI: 10.21822/2073-6185-2024-51-3-202-214 Оригинальная статья /Original article

Свободные колебания континуально-дискретной многопролетной балки с учетом инерционных сил вращения

Х.П. Культербаев[1], М.М. Пайзулаев[2], Ш.А. Омаров[2]
[1]Северо-Кавказский федеральный университет,
[1]355017, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1, Россия,
[2]Дагестанский государственный технический университет,
[2]367026, г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является оценка свободных колебаний континуально-дискретной многопролетной балки с учетом инерционных сил вращения. Поставлена цель определения спектра собственных частот, коэффициентов демпфирования и собственных форм. **Метод.** Исследование основано на методах линейной механики конструкций; численных и численно-аналитических методах расчета. Решение задачи отыскивается с помощью метода разделения переменных. Вращательные движения частиц континуальных участков учитываются согласно одной из моделей балки Тимошенко. Использован принцип Даламбера и гипотезы о малости перемещений и углов поворота сечений. **Результат**. Получена система уравнений в матрично-векторной форме. Математическая модель поперечных колебаний состоит из трёх систем дифференциальных уравнений. В уравнение включаются поперечные силы, внешние сосредоточенные силы, даламберовы силы инерцииᵢ, силы линейно-вязкого сопротивления. Учитываются силы инерции вращения сосредоточенных масс. Граничные и другие дополнительные условия к уравнениям соответствуют расчётной схеме. Левый конец балки шарнирно оперт. На стыке участков выполняются условия сопряжения. **Вывод.** Данный случайный процесс возмущений весьма близок к процессам, использующимся в детерминистических задачах. Амплитуды и среднеквадратические отклонения перемещений в детерминистической и стохастической задачах почти совпадают, что подтверждает достоверность предложенной теории расчёта. Анализ кривых показывает, что среднеквадратические отклонения существенным образом зависят от степени коррелированности компонентов векторного случайного процесса возмущений. Использование современных вычислительных компьютерных систем типа Matlab позволяет удачно сочетать достоинства как численных, так и графических способов.

Ключевые слова: поперечные и свободные колебания балки, континуально-дискретная многопролётная балка, поступательное движение, вращательное движение, принцип Даламбера, силы линейно-вязкого сопротивления

Для цитирования: Х.П. Культербаев, М.М. Пайзулаев, Ш.А. Омаров. Свободные колебания континуально-дискретной многопролётной балки с учетом инерционных сил вращения. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(3): 202-214. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-3-202-214

Free vibrations of a Continuous-discrete multi-span Beam taking into account inertial Rotation Forces

H.P. Kulterbaev[1], M.M. Paizulaev[2], Sh.A. Omarov[2]
[1]North Caucasus Federal University,
[1]1 Pushkina St., Stavropol 355017, Russia,
[2]Daghestan State Technical University,
[2]70 I.Shamil Ave., Makhachkala 367026, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to estimate free vibrations of a continuous-discrete multi-span beam taking into account the inertial forces of rotation. The goal is to determine the spectra of natural frequencies, damping coefficients and natural modes. **Method.** The study is based on the methods of linear mechanics of structures; numerical and numerical-analytical calculation methods. The solution to the problem is found using the method of separation of variables. Rotational movements of particles of continuous sections are taken into account according to one of the models of the Timoshenko beam. The D'Alembert principle and hypotheses on the smallness of displacements and angles of rotation of sections are used. **Result.** A system of equations in matrix-vector form is obtained. The mathematical model of transverse vibrations consists of three systems of differential equations. The equation includes transverse forces, external concentrated forces, d'Alembert inertial forcesi, and linear-viscous resistance forces. The inertial forces of rotation of concentrated masses are taken into account. The boundary and other additional conditions to the equations correspond to the calculation scheme. The left end of the beam is hinged. The conjugation conditions are met at the junction of the sections. **Conclusions.** This random process of disturbances is very close to the processes used in deterministic problems. The amplitudes and standard deviations of displacements in the deterministic and stochastic problems almost coincide, which confirms the reliability of the proposed calculation theory. Analysis of the curves shows that the standard deviations significantly depend on the degree of correlation of the components of the vector random process of disturbances. The use of modern computing computer systems such as Matlab allows us to successfully combine the advantages of both numerical and graphical methods.

Keywords: transverse and free vibrations of a beam, continuous-discrete multi-span beam, translational motion, rotational motion, d'Alembert's principle, linear-viscous resistance forces

For citation: H.P. Kulterbaev, M.M. Paizulaev, Sh.A. Omarov. Free vibrations of a Continuous-discrete multi-span Beam taking into account inertial Rotation Forces. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024;51(3):202-214. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-3-202-214

Введение. Рассматривается установившийся режим поперечных колебаний балки (рис. 1), состоящей из пролётов (участков), каждый с размером l_i (i = 1, 2,..., n), площадью поперечного сечения S_i, осевым моментом инерции поперечного сечения J_i, из материала с модулем упругости E и плотностью ρ, при коэффициенте вязкого трения η.

На балке расположены сосредоточенные массы M_i (i = 1, 2,..., N; N = n+1), обладающие осевыми моментами инерции I_i относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Балка поддерживается упругими опорами с коэффициентами жёсткости c_i и демпферами с соответствующими коэффициентами линейно-вязкого сопротивления ν_i. Каждая пара из упругой опоры и демпфера расположена на общем основании (фундаменте, автономном по отношения к другим. В продольном направлении балка растягивается (сжимается) силой P.

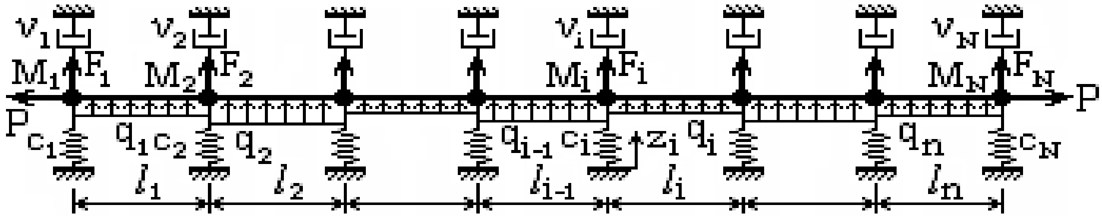


Рис. 1. Установившийся режим поперечных колебаний балки
Fig. 1. Steady-state mode of transverse vibrations of a beam

Постановка задачи. Источниками колебаний балки являются динамические сосредоточенные силы $F_i(t)$, равномерно распределённые нагрузки $q_i(t)$ и кинематические смещения опор $z_i(t)$. Механическая модель такого сооружения представляет собой смешанную континуально - дискретную систему, состоящую из участков балки с распределённой массой и совокупности сосредоточенных масс [1- 8]. Обычная ситуация состоит в том, что горизонтальные перемещения как частиц массы континуальных участков, так и дискретных масс пренебрежимо малы по сравнению с вертикальными перемещениями и, поэтому они в математическую модель колебаний не будут включаться.

Целью исследования является оценка свободных колебаний континуально-дискретной многопролетной балки с учетом инерционных сил вращения.

Методы исследования. Вращательные движения частиц континуальных участков учтём согласно одной из моделей балки Тимошенко, но при этом будем пренебрегать деформациями сдвига, имея в виду, что будут рассматриваться сравнительно длинные балки (и их пролёты). Тогда данный эффект не играет заметной роли, но при этом будут учитываться инерционные силы от линейных и угловых перемещений.

Положение континуальных участков будем определять с помощью вектор–функции векторного и скалярного аргументов $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, соответствующей смещениям балки в поперечном направлении, t – время. При этом используется локальная система пространственных координат $x_i \in [0, l_i]$ с началом на левом конце каждого участка. Компоненты вектора $\mathbf{u}$ соответствуют пролётам между опорами. Размеры сосредоточенных масс в горизонтальном направлении будем считать пренебрежимо малыми по сравнению с пролётами балки, т. е. в расчётах равными нулю. Центры сосредоточенных масс при этом лежат на продольной центральной оси балки. Тогда движения сосредоточенных масс являются плоскопараллельными с полюсом в центре масс, а сами движения состоят из поступательного движения в вертикальном направлении и из вращательного движения вокруг полюса [3, 5, 8].

Положения сосредоточенных масс определяются линейными координатами $\mathbf{y}(t)$, отсчитываемыми по вертикали от положения статического равновесия.

Математическая модель поперечных колебаний будет представлена в виде трёх систем дифференциальных уравнений.

Первая из них соответствует множеству континуальных участков. В предположении о малости отклонений в поперечном направлении колебаниям каждого пролёта балки соответствует линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа. Тогда в векторной форме при учёте инерции вращающейся распределённой массы можно записать

$$B \circ u^{IV} - P u'' - R \circ \ddot{u}'' + m \circ \ddot{u} + \eta m \circ \dot{u} = q, \quad x \in (0, \boldsymbol{l}), \quad t > -\infty. \tag{1}$$

Здесь и далее изображение ∘ означает операцию поэлементного перемножения векторов, так что из $\mathbf{c} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ следует $c_k = a_k b_k$; точки над буквами соответствуют дифференцированию по времени, штрихи в индексах – дифференцированию по соответствующим локальным пространственным координатам, четыре штриха заменены римской цифрой; $\mathbf{m}$ – вектор погонных масс пролётов балки, $m_i = \rho S_i$; $\mathbf{B}$ – вектор жёсткостей балки на изгиб, $B_i = EJ_i$; $\mathbf{R}$ – вектор осевых моментов инерции вращающейся массы элемента балки единичной длины, $R_i = \rho J_i$; $\mathbf{0}$ – нуль-вектор.

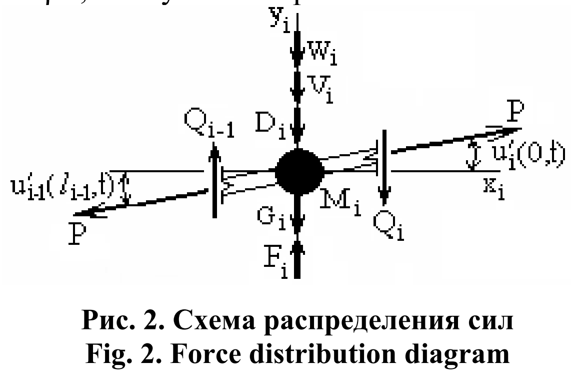


Рис. 2. Схема распределения сил
Fig. 2. Force distribution diagram

В левой части уравнения (1) в порядке следования слагаемых учтены силы упругости, осевая продольная сила, силы инерции вращающейся массы, силы инерции от линейных перемещений, силы линейно-вязкого трения.

Вторая система представляет собой совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих вертикальные движения множества дискретных масс. Они составляются с использованием принципа Даламбера и гипотезы о малости перемещений и углов поворота сечений. При этом в уравнение включаются поперечные силы Q_i, Q_{i-1}, внешние сосредоточенные силы F_i, даламберовы силы инерции D_i, силы линейно-вязкого сопротивления (опор, конструктивных сочленений, внешней среды, внутри материала и т.д.) V_i, линейно-вязкие силы сопротивления в демпферах W_i, упругие силы в гибких элементах опор G_i (рис. 2). В итоге векторная форма уравнений принимает вид

$$\mathrm{M}\circ\ddot{\mathrm{y}}+\mu\,\mathrm{M}\circ\dot{\mathrm{y}}+\nu\circ(\dot{\mathrm{y}}-\dot{\mathrm{z}})+\mathrm{c}\circ(\mathrm{y}-\mathrm{z})+\mathrm{b}(\mathrm{u})=\mathrm{F},\qquad \mathrm{t}>-\infty. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{y}(t)$ – вектор-функция скалярного аргумента, описывающая отклонения сосредоточенных масс, μ – удельный коэффициент вязкого трения.

Суть каждого из уравнений в том, что сумма проекций на вертикальную ось всех сил, приложенных к массе M_i, равна нулю. Первое слагаемые в левой части соответствует инерционной (даламберовой) силе, второе и третье учитывают диссипативные силы, четвертое слагаемое – упругие силы в гибких опорах, пятое – поперечные силы в сечениях балки слева и справа от сосредоточенных масс.

Все векторы считаются вектор – столбцами (исключения оговариваются), поэтому знаки транспонирования опущены. Введены обозначения для векторов, размерности которых очевидны

$$\boldsymbol{l}=\{l_1, l_2,..., l_n\},\quad \mathbf{x}=\{x_1, x_2,...,x_n\},\quad \mathbf{S}=\{S_1, S_2,..., S_n\},$$
$$\mathbf{J}=\{J_1, J_2,..., J_n\},\quad \mathbf{c}=\{c_1, c_2,..., c_N\},$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)=\{u_1(x_1, t), u_2(x_2, t),....,u_n(x_n, t)\},$$
$$\mathbf{y}(t)=\{y_1(t), y_2(t),....,y_N(t)\},\qquad \boldsymbol{\nu}=\{\nu_1, \nu_2,..., \nu_N\},$$
$$\mathbf{q}(t)=\{q_1(t), q_2(t),..., q_n(t)\},\qquad \mathbf{m}=\{m_1, m_2,..., m_n\},\qquad \mathbf{z}(t)=\{z_1(t), z_2(t),..., z_N(t)\},$$
$$\mathbf{M}=\{M_1, M_2,..., M_N\},\qquad \mathbf{b}(\mathbf{u})=\{b_1(\mathbf{u}), b_2(\mathbf{u}), ...$$
$$b_N(\mathbf{u})\},\qquad \mathbf{F}(t)=\{F_1(t), F_2(t),..., F_N(t)\}.$$

$\mathbf{b}(\mathbf{u})$ – вектор упругих внутренних сил, компоненты которого образованы проекциями на вертикальную ось поперечных сил в сечениях балки слева и справа от сосредоточенных масс

$$b_1(\mathbf{u})=B_1u_1'''(0,t),\quad b_i(\mathbf{u})=B_iu_1'''(0,t)-B_{i-1}u_{i-1}'''(l_{i-1},t),\quad i=2,3,...,n,\quad b_N(\mathbf{u})=-B_nu_n'''(l_n,t).$$

Рис. 3. Силы инерции сосредоточенных масс
Fig. 3. Inertial forces of concentrated masses

Третья система уравнений состоит также из обыкновенных дифференциальных уравнений, но уже составляется относительно угловых координат. Их появление в математической модели колебаний вызвано необходимостью учёта сил инерции вращения сосредоточенных масс (рис. 3). На рис. 3 изображены моментные силовые факторы, участвующие во вращательном движении сосредоточенной массы M_i.

В частности, $M_л$, $M_п$ – изгибающие моменты в сечении балки левее и правее сосредоточенной массы, $M_и$ – инерционный момент от вращения массы, M_T – демпфирующий момент. По принципу Даламбера их сумма равна нулю, т. е. будет

$$M_л - M_п + M_и + M_T = 0. \tag{3}$$

Выразим слагаемые через известные соотношения

$$M_Л = E J_{i-1} u''_{i-1}(l_{i-1}, t), \quad M_П = E J_i u''_i(0,t), \quad M_И = I_i \ddot{\varphi}_j(t), \quad M_T = I_i \sigma \dot{\varphi}_i(t). \qquad (4)$$

Здесь I_i –моменты инерции сосредоточенных масс относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа, σ – коэффициент вязкого трения при вращении масс, $\varphi_i(t)$ – компоненты вектора углов поворота сосредоточенных масс.

Подставим (4) в (3) и запишем уравнение

$$\mathbf{I} \circ \ddot{\varphi} + \sigma \mathbf{I} \circ \dot{\varphi} + \mathbf{d}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \qquad (5)$$

где введены обозначения

$$I = \{I_1, I_2, ..., I_N\}, \quad d(u) = \{d_1, d_2, ..., d_N\}, \quad d_1(u) = -B_1 u''_1(0,t),$$

$$d_i(u) = B_{i-1} u''_{i-1}(l_{i-1}, t) - B_i u''_i(o,t), \quad i = 2,3,...,n, \quad d_N(u) = B_n u''_n(l_n, t);$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}^T.$$

Уравнения (2), (5) могут быть получены другим способом. Учтём, что сосредоточенные массы **M** (рис. 2) являются твёрдыми телами, совершающими плоскопараллельные движения. Если пренебречь перемещениями в горизонтальном направлении вследствие их малости в обычной ситуации, то движения будут описываться двумя векторными уравнениями

$$\mathbf{M} \circ \mathbf{a}_C = \sum \mathbf{F}_k^e, \qquad \mathbf{I}_{Cz} \circ \boldsymbol{\varepsilon} = \sum \mathbf{m}_{Cz}(\mathbf{F}_k^e). \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{a}_C$ – ускорение центра масс C в вертикальном направлении, $\sum \mathbf{F}_k^e$ – сумма внешних сил, приложенных к массе (рис. 2), $\mathbf{I}_{Cz}$ – осевой момент инерции твёрдого тела относительно оси Cz, движущейся поступательно вместе с центром масс, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – угловое ускорение твёрдого тела, $\sum \mathbf{m}_{Cz}(\mathbf{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси Нетрудно показать, что замена $\mathbf{a}_C$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответствующими производными $\ddot{\mathbf{y}}$ и $\ddot{\varphi}$, использование сил и моментов, показанных на рис. 2 и 3, в уравнениях (6) приведёт к (2), (5).

Функции $\mathbf{y}(t)$ и $\boldsymbol{\varphi}(t)$ можно исключить из уравнений (2), (5), пользуясь соотношениями, вытекающими из гипотезы о малости как линейных, так и угловых перемещений, т.е. будет

$$y_i(t) = u_i(0,t), \quad i = 1, 2, \dots n; \quad y_N(t) = u_n(l_n, t),$$

$$\varphi_i(t) = u'_i(0,t), \quad i = 1, 2, \dots n; \quad \varphi_N(t) = u'_n(l_n, t). \qquad (7)$$

Поставим дальнейшей целью определение спектров собственных частот, коэффициентов демпфирования и собственных форм. В таком случае начальные условия к системе уравнений (1), (2), (5) не требуются, $z(t) \equiv 0$, $F(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 0$. Граничные и другие дополнительные условия к уравнениям (1) должны соответствовать расчётной схеме. Левый конец балки шарнирно оперт. Вертикальные колебания массы M_1, сосредоточенной здесь, описываются первым уравнением системы (2) с заменой $y_1(t)$ на $u_1(0, t)$

$$M_1 \ddot{u}_1(0,t) + g_1 \dot{u}_1(0,t) + c_1 u_1(0,t) + B_1 u'''_1(0,t) = 0, \quad g_1 = \mu M_1 + \nu_1. \qquad (8)$$

Угловые колебания описываются первым уравнением системы (5) с заменой $\varphi_1(t)$ на $u'_1(0,t)$ в соответствии с (7)

$$I_1 \ddot{u}'_1(0,t) + \sigma I_1 \dot{u}'_1(0,t) - B_1 u''_1(0,t) = 0. \qquad (9)$$

На стыке (i - 1) – го и i – го участков должны выполняться условия сопряжения:

- перемещения и углы поворота слева и справа от сосредоточенной массы равны между собой

$$u_{i-1}(l_{i-1}, t) = u_i(0, t), \quad u'_{i-1}(l_{i-1}, t) = u'_i(0, t); \quad i = 2, 3, \dots, n; \qquad (10)$$

- линейные и угловые колебания сосредоточенных масс M_i описываются уравнениями системы (2) и (5) с заменой $y_i(t)$ на $u_i(0, t)$ и $\varphi_i(t)$ на $u_i'(0, t)$

$$M_i\ddot{u}_1(0,t)+g_i\dot{u}_i(0,t)+c_iu_i(0,t)+B_iu_i'''(0,t)-B_{i-1}u_{i-1}'''(l_{i-1},t)=0,\quad g_i=\mu M_i+\nu_i,\quad i=2,3,...,n; \tag{11}$$

$$I_i\ddot{u}_i'(0,t)+\sigma I_i\dot{u}_i'(0,t)+B_{i-1}u_{i-1}''(l_{i-1},t)-B_iu_i''(0,t)=0,\quad i=2,3,...,n. \tag{12}$$

На правом конце балки должны выполняться граничные условия, аналогичные (1), (2)

$$M_N\ddot{u}_n(l_n,t)+g_N\dot{u}_n(l_n,t)+c_Nu_n(l_n,t)-B_nu_n'''(l_n,t)=0,\quad g_N=\mu M_N+\nu_N, \tag{13}$$

$$I_N\ddot{u}_n'(l_n,t)+\sigma I_N\dot{u}_n'(l_n,t)+B_nu_n''(l_n,t)=0. \tag{14}$$

Решение задачи (8), (8) - (14) отыскивается с помощью метода разделения переменных как произведение

$$u_i(x_i, t) = X_i(x_i)\, e^{\lambda t}, \tag{15}$$

где характеристический показатель представлен в виде суммы

$$\lambda = -\varepsilon + j\omega, \tag{16}$$

ε и ω – подлежащие определению коэффициент затухания и частота свободных колебаний.

Подстановка (15) в (8) даёт уравнение

$$X_i^{IV}-2\upsilon_iX_i''+\theta_i^2X_i=0,\quad i=1,2,...,n \tag{17}$$

при обозначениях $\upsilon_i=\dfrac{P+\lambda^2R_i}{2B_i},\qquad \theta_i^2=\dfrac{m_i(\lambda^2+\eta\lambda)}{B_i}.$

Аналогичная подстановка (15) в дополнительные условия (8) – (14) приведёт к следующим уравнениям:

$$e_1X_1(0)+B_1X_1'''(0)=0,\qquad e_1=M_1\lambda^2+g_1\lambda+c_1; \tag{18}$$

$$\gamma_1X_1'(0)-B_1X_1''(0)=0,\qquad \gamma_1=I_1\lambda(\lambda+\sigma), \tag{19}$$

$$X_{i-1}(l_{i-1})=X_i(0),\qquad X_{i-1}'(l_{i-1})=X_i'(0),\qquad i = 2, 3, \dots, n; \tag{20}$$

$$e_iX_i(0)+B_iX_i'''(0)-B_{i-1}X_{i-1}'''(l_{i-1})=0,\qquad e_1=M_i\lambda^2+g_i\lambda+c_i,\qquad i = 2, 3, \dots, n; \tag{21}$$

$$\gamma_iX_i'(0)+B_{i-1}X_{i-1}''(l_{i-1})-B_iX_i''(0)=0,\quad \gamma_i=I_i\lambda(\lambda+\sigma),\qquad i = 2, 3, \dots, n; \tag{22}$$

$$e_NX_n(l_n)-B_nX_n'''(l_n)=0,\qquad e_N=M_N\lambda^2+g_N\lambda+c_N; \tag{23}$$

$$\gamma_NX_n'(l_n)+B_nX_n''(l_n)=0,\qquad \gamma_N=I_N\lambda(\lambda+\sigma). \tag{24}$$

Фундаментальную систему частных решений уравнения (17) можно записать как вектор-функцию

$$\xi_i(x) = \{\sin\alpha_ix_i,\quad \cos\alpha_ix_i,\quad \mathrm{sh}\,\beta_ix_i,\quad \mathrm{ch}\,\beta_ix_i\}^T,\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{25}$$

где

$$\alpha_i=\sqrt{-\upsilon_i+\sqrt{\upsilon_i^2-\theta_i^2}},\qquad \beta_i=\sqrt{\upsilon_i+\sqrt{\upsilon_i^2-\theta_i^2}}.$$

Тогда общее решение уравнения в векторной форме примет вид

$$X_i(x_i)=\mathbf{D}_i\ \xi_i(x_i). \tag{26}$$

Здесь $\mathbf{D}_i = \{C_{4i-3}, C_{4i-2}, C_{4i-1}, C_{4i}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. - вектор-строка постоянных интегрирования. Запишем (26) в развёрнутой форме

$$X_i(x_i)=\mathbf{D}_i\{\sin\alpha_ix_i,\ \cos\alpha_ix_i,\quad \mathrm{sh}\,\beta_ix_i,\quad \mathrm{ch}\,\beta_ix_i\}^T. \tag{27}$$

Дифференцируя (27) трижды, имеем

$$X_i'(x_i) = \mathbf{D}_i\{\alpha_i \cos\alpha_i x_i,\ \ -\alpha_i \sin\alpha_i x_i,\qquad \beta_i \mathrm{ch}\,\beta_i x_i \qquad \beta_i \mathrm{sh}\,\beta_i x_i\}^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

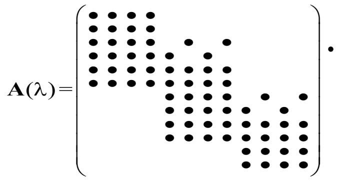
$$X_i''(x_i) = \mathbf{D}_i\{-\alpha_i^2 \sin\alpha_i x_i,\ \ -\alpha_i^2 \cos\alpha_i x_i,\quad \beta_i^2\, \mathrm{sh}\,\beta_i x_i,\quad \beta_i^2 \mathrm{ch}\,\beta_i x_i\}^{\mathrm{T}}, \tag{29}$$

$$X_i'''(x_i) = \mathbf{D}_i\{-\alpha_i^3 \cos\alpha_i x_i,\quad \alpha_i^3 \sin\alpha_i x_i,\qquad \beta_i^3 \mathrm{ch}\,\beta_i x_i \qquad \beta_i^3 \mathrm{sh}\,\beta_i x_i\}^{\mathrm{T}}. \tag{30}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (18) – (24) получим систему уравнений в матрично-векторной форме

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{D} = 0. \tag{31}$$

Здесь, D – вектор, составленный путём вертикальной конкатенации векторов D_i, i = 1, 2, … , n. $\mathbf{A}(\lambda)$ – квадратная матрица порядка 4n блочной диагонально-ленточной структуры, например, имеющая вид для трёхпролётной балки

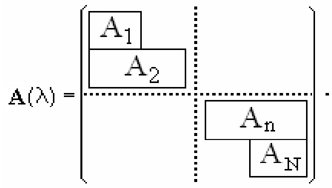


Здесь точками изображены ненулевые элементы, нули не выписаны. В строках 3-6 столбцы 1-8 образуют блок размером 4×8, который в некотором смысле является повторяющимся. Он получен из условий сопряжения первого и второго пролётов.

Здесь и далее для n – пролётной балки каждый подобный блок, соответствующий условиям сопряжения следующих участков, смещен вправо и вниз на четыре позиции относительно предыдущего. В начале и конце матрицы имеются два отдельных блока размерами 2×4, полученные из условий колебаний левого и правого концов балки.

В общем случае для n–пролётной балки матрица имеет следующую блочную структуру. Обозначим $p_i = \sin \alpha_i l$, $q_i = \cos \alpha_i l$, $r_i = \mathrm{sh}\, \alpha_i l$, $s_i = \mathrm{ch}\, \alpha_i l$.

Тогда отдельные блоки имеют вид:



$$A_1 = \begin{pmatrix} -B_1\alpha_1^3 & e_1 & B_1\beta_1^3 & e_1 \\ \gamma_1\alpha_1 & B_1\alpha_1^2 & \gamma_1\beta_1 & -B_1\beta_1^2 \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} p_{i-1} & q_{i-1} & r_{i-1} & s_{i-1} & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha_{i-1}q_{i-1} & -\alpha_{i-1}p_{i-1} & \beta_{i-1}s_{i-1} & \beta_{i-1}r_{i-1} & -\alpha_i & 0 & -\beta_i & 0 \\ B_{i-1}\alpha_{i-1}^3 q_{i-1} & -B_{i-1}\alpha_{i-1}^3 p_{i-1} & -B_{i-1}\beta_{i-1}^3 s_{i-1} & -B_{i-1}\beta_{i-1}^3 r_{i-1} & -B_i\alpha_i^3 & e_i & B_i\beta_i^3 & e_i \\ -B_{i-1}\alpha_{i-1}^2 p_{i-1} & -B_{i-1}\alpha_{i-1}^2 q_{i-1} & B_{i-1}\beta_{i-1}^2 r_{i-1} & B_{i-1}\beta_{i-1}^2 s_{i-1} & \gamma_i\alpha_i & B_i\alpha_i^2 & \gamma_i\beta_i & -B_i\beta_i^2 \end{pmatrix},$$

i = 2, 3, …, n.

$$A_N = \begin{pmatrix} e_N p_n + B_n\alpha_n^3 q_n & e_N q_n - B_n\alpha_n^3 p_n & e_N r_n - B_n\beta_n^3 s_n & e_N s_n - B_n\beta_n^3 r_n \\ \gamma_N\alpha_n q_n - B_n\alpha_n^2 p_n & -\gamma_N\alpha_n p_n - B_n\alpha_n^2 q_n & \gamma_N\beta_n s_n + B_n\beta_n^2 r_n & \gamma_N\beta_n r_n + B_n\beta_n^2 s_n \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы **A** являются функциями характеристического показателя λ и через него – коэффициента затухания колебаний ε и частоты ω.

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (31) даёт частотное уравнение

$$\det \mathbf{A}(\lambda) = 0, \tag{32}$$

из которого определяется спектр собственных значений $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$.

Уравнение (32) является трансцендентным. При больших значениях n его написание в развёрнутой форме, хотя и возможно, представляет громоздкую процедуру. Кроме того, получить его аналитические решения удаётся лишь в простейших случаях. Выход из таких затруднений состоит в применении численных методов и ЭВМ [9, 10]. При этом будем ориентироваться на алгоритмические языки и программные системы, позволяющие непосредственно пользоваться функциями комплексной переменной и проводить алгебраические и другие действия над ними (например, Mathcad, Matlab) [11].

Уравнение (32) с учётом того, что его левая часть представляет комплексную функцию, можно переписать в виде

$$f_1(\varepsilon,\omega)+j f_2(\varepsilon,\omega)=0.$$

Отсюда следует, что коэффициент затухания ε и частота свободных колебаний ω должны определяться из системы двух нелинейных трансцендентных уравнений

$$f_1(\varepsilon,\omega)=0, \qquad f_2(\varepsilon,\omega)=0. \tag{33}$$

Лишь в редких частных случаях, совпадающих с классическими, решения задачи выписываются в явном виде. В более сложных случаях можно обойтись без явного развёртывания определителя матрицы **A** и получения формул для корней трансцендентной системы (33). Эти вопросы рассмотрим подробнее.

Корни системы (33) могут быть найдены лишь графическими или численными методами. Но и в этом случае решение задачи из-за её нелинейности связано с известными сложностями по множеству причин:

1) обычно применяемые итерационные методы решения ограничены условиями сходимости, выполнение которых в данной задаче трудно проверять и обеспечивать;

2) корни системы являются многозначными, т. е. существует счётное бесконечное множество пар (ε_k, ω_k), удовлетворяющих системе уравнений, и это влечёт опасность потери некоторых из корней в процессе вычислений;

3) трудно выполнить необходимый этап предварительного отделения корней, т. е. заключения корней для начала счёта в достаточно малые области, внутри которых не было бы других корней.

Как оказалось при выполнении конкретных примеров, эти сложности могут быть преодолены с помощью пробных вычислительных экспериментов на ЭВМ и применения эффективных численных схем. Использование современных вычислительных компьютерных систем типа Matlab при этом позволяет весьма удачно сочетать достоинства как численных, так и графических способов. Решение системы уравнений найдём с помощью метода покоординатного спуска. С этой целью образуем вспомогательную неотрицательную функцию

$$\Phi(\varepsilon, \omega) = |\det \mathbf{A}(\varepsilon, \omega)| = [f_1^2(\varepsilon, \omega) + f_2^2(\varepsilon, \omega)]^{1/2},$$

обращающуюся в ноль лишь в тех точках, где $f1(\varepsilon, \omega) = f2(\varepsilon, \omega) = 0$.

Таким образом, решение исходной системы (24) будет одновременно точкой нулевого минимума скалярной функции векторного аргумента $\Phi(\xi)$, так что теперь необходимо решать более простую (по крайней мере в данном случае) задачу

$$\Phi(\xi) = 0, \qquad \xi = \{\varepsilon, \omega\}^T \in R^2 \cap (\varepsilon > 0, \omega > 0).$$

Здесь вектор ξ соответствует искомым величинам, $\Phi(\xi)$ представляет мультимодальную функцию, имеющую множество локальных минимумов.

Суть применяемого метода состоит в построении последовательности точек (приближений к решению) ξ_k, k = 0, 1,......, сходящейся к точке локального минимума ξ_*. При этом в процессе вычислений необходимо добиваться, чтобы значения вспомогательной функции были монотонно убывающими и ограниченными снизу

$$\Phi(\xi_0) \geq \Phi(\xi_1) \geq .... \geq \Phi(\xi_k) \geq .... \geq \Phi(\xi_*). \tag{34}$$

Для реализации такой цели вначале с помощью численных экспериментов намечается начальная точка последовательности ξ_0. Затем определяются последующие приближения ξ_k с помощью соотношений $\xi_{k+1} = \xi_k + \mathbf{h}_k$, где $\mathbf{h}_k$ – вектор приращений координат, обеспечивающий выполнение условий (34).

Условием прекращения вычислительной процедуры а, значит, и признаком достижения корня с необходимой точностью служит выполнение неравенства

$$\Phi(\xi_{k+1}) < \delta, \tag{35}$$

δ – априорно задаваемое малое положительное число(точность вычислений).

Многократное повторение такой процедуры вычислений даёт спектры коэффициентов затухания и собственных частот $\{(\varepsilon_1, \omega_1), (\varepsilon_2, \omega_2),\ldots\}$.

При реализации предлагаемой численной схемы наибольшая сложность состоит в правильном выборе приращений координат $\mathbf{h} = \{\Delta\varepsilon, \Delta\omega\}$ на каждом шаге по величине и по знаку. В этом месте обычные подходы к составлению компьютерных программ вычислений требуют высокого программистского искусства, а сами программы получаются сложными и громоздкими. Трудности существенно упрощаются, если используемая система программирования позволяет оперативно визуализировать результаты вычислений.

Поясним сказанное на примере данной задачи при пользовании программной системой Matlab [10]. Один из аргументов функции $\Phi(\varepsilon, \omega)$, например, ε фиксируется, вычисляются ординаты функции $\Phi(\omega \mid \varepsilon)$, на экран компьютера выводится её график, вычисления приостанавливаются. По кривой, являющейся сечением поверхности $\Phi(\varepsilon, \omega)$, отчётливо видны условные минимумы функции $\Phi(\omega \mid \varepsilon)$. Теперь приращаем аргумент ω, фиксируем его на значении, соответствующем локальному минимуму, и строим новый график $\Phi(\varepsilon \mid \omega)$. Такая процедура продолжается до выполнения условия (35).

Далее задача состоит в определении собственных форм каждого участка балки, имеющих вид (27). Следовательно, необходимо ставить вопрос об отыскании собственного вектора **C.** Поскольку определитель матрицы **A** равен нулю, найти однозначно компоненты вектора **C** как решение системы уравнений (31) невозможно. В силу этого, необходимо задаваться одним из компонентов вектора, а затем находить остальные значения из уравнений (31). Это значит, что собственный вектор будет определяться с точностью до постоянного множителя.

Составим алгоритм счёта, последовательно определяющий элементы вектора **C**. Он состоит в следующем. Положим, что $C_1 = 1$, исключим его из системы уравнений (31). Этим самым порядок системы уравнений становится равным 4n-1, что соответствует количеству оставшихся неизвестных. Запишем получившуюся неоднородную систему уравнений в виде

$$\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Lambda}, \tag{36}$$

где **Г**- квадратная матрица, получающаяся из **A** путём вычёркивания первого столбца и последней строки, $\mathbf{\Delta} = (C_2, C_3, C_4,\ldots,C_{4n})^T$- вектор, остающийся от **C** после исключения C_1, $\mathbf{\Lambda}$ - вектор-столбец, получаемый в ходе указанных преобразований. Решение системы (36) даётся формулой

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\,\mathbf{\Lambda}, \tag{37}$$

Последнее уравнение (31) при этом целесообразно использовать для контроля правильности вычислений. Проводя указанные вычисления, следует помнить, что $X_i(x_i)$, найденные по (27), являются комплексными функциями. Действительные же собственные формы имеют вид

$$\varphi_k\,(x_i) = \mathrm{real}\,[\,X_i^{(k)}(x_i)], \qquad k = 1, 2,..., \qquad i = 1, 2,..., n,$$

k – номер собственной формы, i – номер пролёта.

Обсуждение результатов. Обратимся к задачам, для которых проведены компьютерные вычисления. Рассмотрены свободные колебания стальной балки из двутавра № 14 с тремя пролётами при следующих входных данных

$$I_2 = I_3 = 0, \quad I_1 = I_4 = I, \quad S_i = 17{,}4\ \text{см}^2,$$

http://vestnik.dgtu.ru/ ISSN (Print) 2073-6185 ISSN (On-line) 2542-095X

$$J_i = 572 \text{ см}^4, \quad i = 1,\ 2,\ 3; \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^3,$$

$$E = 200 \text{ ГПа}, \quad P=0, \quad \eta = 0{,}05 \text{ с}^{-1}, \quad \mu=0{,}02 \text{ с}^{-2}, \quad \sigma = 0{,}01 \text{ с}^{-2}, \quad M_1 = M_4 = 0,$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 3 \text{ м}, \quad c_1 = c_4 = \infty, \quad c_2 = c_3 = c, \quad \nu_1 = \nu_4 = 0, \quad \nu_2 = \nu_3 = \nu.$$

В табл.1 представлены первые три частоты и коэффициента затухания свободных колебаний при вариации параметров M_i, ν_i, c_i.

Для сравнения в первой строке приведены результаты, полученные точной формулой при l_1=3 м для классической схемы однопролётной свободно опертой балки: сосредоточенные массы отсутствуют, коэффициенты трения и жёсткости равны нулю. Те же характеристики вычислены по предложенной выше методике и представлены в строке 2. Как можно заметить, результаты, полученные численными и точными методами, оказались совпадающими с высокой степенью точности.

Таблица 1. Первые три частоты и коэффициента затухания свободных колебаний при вариации параметров M_i, ν_i, c_i.

Table 1. The first three frequencies and damping coefficients of free oscillations with variations in parameters Mi, vi, ci.

№	M_2	M_3	I	c	ν	ε_1	ω_1	ε_2	ω_2	ε_3	ω_3
	кг		кг·м^2	кН/м	кг/с	с$^{-1}$					
1	0	0	0	0	0	0,0250	35,35	0,0249	141,21	0,0249	317,40
2	0	0	0	0	0	0,0250	35,34	0,0250	141,21	0,0249	317,40
3	100	0	0	0	0	0,0228	23,43	0,0230	113,84	0,0249	317,40
4	100	100	0	0	0	0,0210	19,01	0,0190	74,74	0,0249	317,40
5	100	100	0	0	50	0,0362	19,00	0,0585	74,74	0,0249	317,40
6	100	100	0	10000	50	0,0393	20,79	0,0594	75,22	0,0249	317,40
7	100	100	100	10000	50	0,0923	19,67	0,0605	61,70	0,0339	144,78

Интересно заметить, что третьи частоты и коэффициенты затухания остаются постоянными при всех вариациях параметров в строках 1-5. Этот факт имеет следующее прозрачное объяснение. Обсуждаемые случаи соответствуют равенству размеров $l_1 = l_2 = l_3$, когда третья собственная форма колебаний имеет нулевые точки, совпадающие с границами участков, т. е. с координатами сосредоточенных масс. Поскольку сосредоточенные массы при этом неподвижны, частота таких колебаний зависит только от параметров балки, а не от сосредоточенных масс, и потому не меняется. По той же причине наличие опор и демпферов в неподвижных точках балки не сказывается на величине ε_3, и она остаётся постоянной в этих строчках.

В балке строки 7 из-за введения моментов инерции I_1 и I_4 такая ситуация изменяется, учёт инерции вращения существенно уменьшает вторую и третью собственные частоты. В третьей строке даны результаты счёта уже при наличии дискретной массы M_2 =100 кг. Как и следовало ожидать, коэффициенты затухания и собственные частоты уменьшились. Данные четвёртой строки подтверждают ожидаемый факт уменьшения первых двух собственных частот при появлении второй сосредоточенной массы M_3. Добавление демпфера (строка 5) весьма существенно увеличивает коэффициенты затухания.

Рост коэффициентов жёсткостей пружин в шестой строке привёл к повышению общей жёсткости системы, вследствие чего увеличились собственные частоты. Введение же демпферов с коэффициентом ν (строка 7) приводит к обратным эффектам. Как и следовало ожидать, при увеличении коэффициента демпфирования коэффициент затухания растёт существенно.

На рис. 4 построены первые три собственные формы колебаний для случая, приведённого в седьмой строке. Очевидно, что увеличение собственной частоты сопровождается повышением искривлённости, волнистости собственных форм.

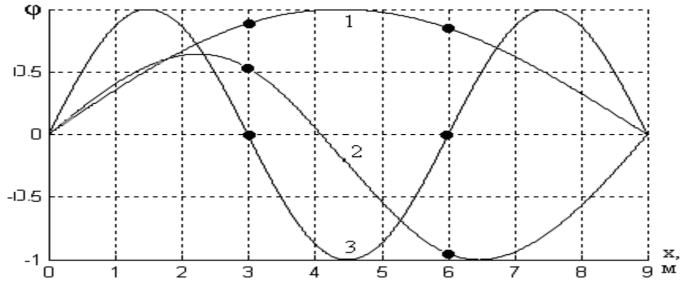


Рис. 4. Первые три собственные формы колебаний
Fig. 4. The first three natural modes of oscillation

Влияние жёсткости балки и инерции вращения масс изучалось путём вариации параметров J_i, I_i. В табл. 2 представлены первые три частоты и коэффициента затухания свободных колебаний балки, скомбинированной из двутавров №14 и №16. При этом сосредоточенные массы имели значения $\mathbf{M} = \{0,\ 200,\ 100,\ 0\}$ кг.

Таблица 2. Первые три частоты и коэффициента затухания свободных колебаний балки, скомбинированной из двутавров №14 и №16
Table 2. The first three frequencies and damping coefficients of free vibrations of a beam combined from I-beams No. 14 and No. 16

№	J_1	J_2	J_3	I_1	I_2	I_3	I_4	ε_1	ω_1	ε_2	ω_2	ε_3	ω_3
	см^4			кг м^2				с$^{-1}$					
1	572	572	572	0	0	0	0	0,1081	14,96	0,1095	56,93	0,0249	317,40
2	572	873	572	0	0	0	0	0,1068	16,57	0,1084	60,09	0,0249	333,98
3	873	873	873	0	0	0	0	0,1059	18,06	0,1074	69,42	0,0249	363,72
4	572	873	572	20	0	0	0	0,1061	16,51	0,1058	59,40	0,0157	232,44
5	572	873	572	0	20	0	0	0,1067	16,56	0,1075	59,86	0,0182	277,30
6	572	873	572	25	30	30	25	0,0502	18,28	0,0415	66,29	0,0111	183,70

В первых трёх строках табл. 2 рассмотрено влияние изменения общей жёсткости балки без учёта инерции вращения сосредоточенных масс. Видно, что увеличение жёсткости приводит к уменьшению коэффициентов затухания и увеличению собственных частот. В следующих строках исследуется влияние инерции вращения сосредоточенных масс. В строках 4, 5 интересно заметить, что учёт инерции вращения первой массы влияет на собственные значения в большей степени, чем второй массы. Это объясняется тем, что амплитуда угла поворота первой массы больше амплитуды второй массы.

Результаты, представленные в шестой строке, показывают, что учёт инерции вращения сосредоточенных масс приводит к уменьшению собственных значений. Причём, это влияние растёт с увеличением номера собственной частоты. Причина состоит в том, что учёт вращения масс равносилен уменьшению жёсткости колеблющейся системы.

Для той же стальной балки (строка 6, табл. 2), но теперь с разными пролётами, массами, пружинами и демпферами, определены собственные частоты и коэффициенты демпфирования при вариациях продольной силы (табл. 3).

Исходные параметры приняты следующими:

$$\boldsymbol{l} = \{3{,}5;\quad 2{,}5;\quad 3\}\ \text{м},\qquad \mathbf{M} = \{100,\ 200,\ 200,\ 100\}\ \text{кг},$$

$$\mathbf{c} = \{50,\quad 30,\quad 30,\quad 50\}\ \text{кН/м},$$

$$\rho = 7820\ \text{кг/м}^3,\quad \eta = 0{,}05\ \text{с}^{-1},\quad \boldsymbol{\nu} = \{40,\ 50,\ 50,\ 40\}\ \text{Нс/м},$$

$$\mathbf{I} = \{25,\ 30,\ 30,\ 25\}\ \text{кг м}^2,$$

$$\mathbf{S} = \{17{,}4;\quad 20{,}2;\quad 17{,}4\}\ \text{см}^2,\qquad \mathbf{J} = \{572,\quad 873,\quad 572\}\ \text{см}^4,$$

$$\mu = 0{,}02\ \text{с}^{-1},\qquad \sigma = 0{,}01\ \text{с}^{-2}.$$

Таблица 3. Результаты расчетов
Table 3. Calculation results

№	P, кН	ε_1, с$^{-1}$	ω_1, с$^{-1}$	ε_2, с$^{-1}$	ω_2, с$^{-1}$	ε_3, с$^{-1}$	ω_3, с$^{-1}$	ε_4, с$^{-1}$	ω_4, с$^{-1}$	ε_5, с$^{-1}$	ω_5, с$^{-1}$
1	0	0,1267	14,01	0,1684	19,33	0,1702	32,86	0,1163	68,76	0,0139	179,62
2	104	0,1347	15,35	0,1718	19,64	0,1619	33,63	0,1130	72,52	0,0137	185,20
3	-104	0,1188	12,32	0,1640	18,91	0,1784	32,22	0,1208	64,72	0,0142	173,74
4	-200	0,1121	10,35	0,1580	18,36	0,1851	31,78	0,1261	60,78	0,0146	168,01
5	-400	0,1003	2,82	0,1378	16,17	0,1978	31,35	0,1473	51,89	0,0155	154,95

Анализируя результаты расчётов в табл. 3, можно заметить, что сжимающие силы на участках балки уменьшают собственные частоты, а растягивающие наоборот увеличивают. Продольные силы могут увеличивать или уменьшать коэффициенты демпфирования, в зависимости от формы колебаний. На рис. 5 показаны первые пять собственных форм колебаний, соответствующих строке 4.

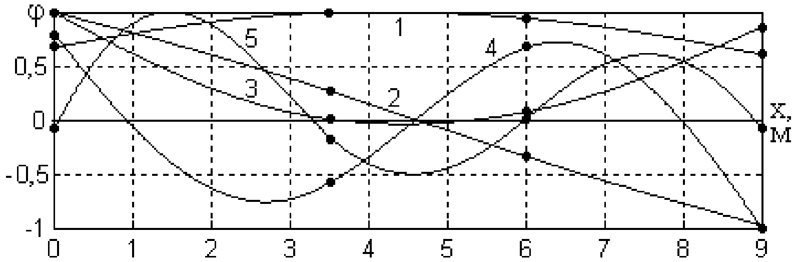


Рис. 5. Пять собственных форм колебаний
Fig. 5. Five natural vibration modes

При первой форме колебаний балка и сосредоточенные массы отклоняются в одну сторону синфазно, кривизна балки незначительная. Как видно по рисунку, балка совершает колебания по второй форме почти как абсолютно твёрдое тело почти при отсутствии изгибных деформаций. При этом третья и четвёртая сосредоточенные массы колеблются уже в противофазе с остальными. При колебаниях по третьей и более высоких формах кривизна балки становится большой, появляется многоволновость.

Вывод. Данный случайный процесс возмущений весьма близок к процессам, использующимся в детерминистических задачах. Как следствие, амплитуды и среднеквадратические отклонения перемещений в детерминистической и стохастической задачах почти совпадают, что подтверждает достоверность предложенной теории расчёта.

Анализ кривых показывает, что среднеквадратические отклонения существенным образом зависят от степени коррелированности компонентов векторного случайного процесса возмущений. Использование современных вычислительных компьютерных систем типа Matlab позволяет весьма удачно сочетать достоинства как численных, так и графических способов.

Библиографический список:

1. Акимов П.А., Белостоцкий Т.Б. и др. Информатика в строительстве (с основами математического и компьютерного моделирования): учебное пособие. Москва: КНОРУС, 2017. -420 с.
2. Арутюнов С.К., Овчинников И.Н., Старцев В.А. Моделирование колебаний балки при случайном вибронагружении. Прикладные проблемы механики ракетно-космических систем: Тез. докл. Всерос. конф., посвящ. 40-летию со дня основания каф. "Аэрокосм. системы" (СМ-2) МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 5 дек. 2000. - М.: Изд-во МГТУ. -2000. С. 66.
3. Джанкулаев Аз. Я., Казиев А.М. Свободные колебания континуально-дискретной механической системы. «Перспектива – 2003»: Материалы Всероссийской научная конф. студентов, аспирантов и молодых учёных. – Т. VI. - Нальчик: Каб.-Балк. гос. университет., 2003. – С. 13-17.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщённых функций). –М.:Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
5. Культербаев Х.П. Свободные колебания стержней с сосредоточенными массами // Известия высших учеб. завед. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. №.4, 2002. С.14-18.
6. Культербаев Х.П., Джанкулаев Аз.Я. Смешанная система дифференциальных уравнений как

математическая модель колебаний континуально-дискретных механических систем // РАН, Владикавказский научный центр. Владикавказский математический журнал. Октябрь – декабрь, 2001, Том 3, Выпуск 4. С. 4-29 - 4-35.

7. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые колебания континуально-дискретной многопролётной балки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. №4, часть 2. Труды X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2011. С. 198-200.
8. Культербаев Х.П., М.М. Пайзулаев Устойчивость сжато-растянутого стержня переменного сечения при комбинированном нагружении // Вестник Дагестанского государственного технического университета Технические науки, 2023., 50(4)., С. 191-196.
9. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
10. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): -М.: ООО Издательский дом «Оникс 21 век», 2005. – 432 с.
11. Культербаев Х.П. Введение в MATLAB. – Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2006. – 57 с.

References:

1. Akimov P.A., Belostotsky T.B. and others. Computer science in construction (with the basics of mathematical and computer modeling): a study guide. Moscow: KNORUS, 2017;420 (In Russ)
2. Arutyunov S.K., Ovchinnikov I.N., Startsev V.A. Modeling of beam vibrations under random vibration loading. Applied problems of mechanics of rocket and space systems: Thesis. dokl. All-Russian conf., dedicated. to the 40th anniversary of the founding of the Aerospace Department. systems" (SM-2) Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 5 Dec. 2000. Moscow: Publishing House of the Moscow State Technical University. 2000;66. (In Russ)
3. Dzhankulaev Az. Ya., Kaziev A.M. Free oscillations of a continually discrete mechanical system. "Perspektiva – 2003": Materials of the All-Russian Scientific Conference of Students, postgraduates and Young Scientists. – Vol. VI. - Nalchik: Office of the Baltic State. University., 2003; 13-17. (In Russ)
4. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N. Mathematical methods in structural mechanics (with the basics of the theory of generalized functions). M.: Publishing House DIA, 2008;336(In Russ)
5. Kulterbaev H.P. Free vibrations of rods with concentrated masses. *Izvestiya vyshnykh ucheb. the institution. The North Caucasus region. Natural Sciences*. 2002; 4:14-18. (In Russ)
6. Kulterbaev H.P., Dzhankulaev Az.Ya. Mixed system of differential equations as a mathematical model of oscillations of continually discrete mechanical systems. *RAS, Vladikavkaz Scientific Center. The Transcaucasian Mathematical Journal.* October – December, 2001; 3(4): 4-29 - 4-35. (In Russ)
7. Kulterbaev H.P. Kinematically excited oscillations of a continually discrete multi-span beam. *Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I.Lobachevsky*. No. 4, part 2. Proceedings of the X All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Publishing house of N.I.Lobachevsky National Research University, 2011;198-200. (In Russ)
8. Kulterbaev H.P., M.M. Paizulaev Stability of a compressed-stretched rod of variable cross-section under combined loading. *Herald of the Daghestan State Technical University of Technical Sciences*, 2023;50(4): 191-196. (In Russ)
9. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. Moscow: Higher School, 2002;840. (In Russ)
10. Verzhbitsky V.M. Numerical methods (linear algebra and nonlinear equations): Moscow: Onyx 21st Century Publishing House LLC, 2005;432. (In Russ)
11. Kulterbaev H.P. Introduction to MATLAB. Nalchik: Kab.-Bulk. Univ., 2006;57. (In Russ)

Сведения об авторах:

Культербаев Хусен Пшимурзович, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, kulthp@mail.ru

Пайзулаев Магомед Муртазалиевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивление материалов, теоретической и строительной механики, smdstu@mail.ru

Омаров Шамиль Абдулаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивление материалов, теоретической и строительной механики, keger1963@ mail.ru.

Information about the authors:

Husen P. Kulterbaev, Dr. Sci. (Eng), Prof., Leading Researcher; kulthp@mail.ru;

Magomed M. Payzulaev, Cand. Sci. (Eng), Assoc. Prof., Head of the Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics; smdstu@mail.ru

Shamil A. Omarov, Cand. Sci. (Eng), Assoc. Prof., Department of Resistance of Materials, Theoretical and Structural Mechanics, keger1963@ mail.ru.

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 15.03.2024.

Одобрена после рецензирования / Reviced 28.04.2024.

Принята в печать /Accepted for publication 28.04.2024.