УДК 681.31:620.179.14

Дедегкаев А.Г., Степанов А.Л.

ОРИЕНТИРОВАННАЯ ДЛЯ САПР УНИВЕРСАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИХРЕТОКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ. ЧАСТЬ 1. РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЕ ПОЛЕ ОБМОТКИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Dedegkaev A.G., Stepanov A.L.

ORIENTED FOR CAD UNIVERSAL MATHEMATICAL MODEL OF THE EDDY CURRENT PROBE. PART 1. THE RESULTING FIELD OF THE DRIVE WINDING

Работа относится к области САПР методов и средств неразрушающего электромагнитного контроля проводящих плоских изделий. Рассмотрен вопрос построения математической модели обмотки возбуждения трансформаторных вихретоковых преобразователей линейно-протяженной формы с поперечным сечением в виде выпуклого многоугольника. Это позволяет создать универсальную модель, в которую включены *модели более простой формы в поперечном сечении, как частный случай.*

Ключевые слова: *математическая модель, вихретоковый преобразователь, обмотка возбуждения, вектор-потенциал электромагнитного поля.*

The work relates to the field of CAD methods and means of nondestructive electromagnetic testing of conductive flat products. The problem of constructing mathematical model of the drive winding eddy current probe linearly extended form is polygon in cross section. This allows you to create a universal mathematical model, which includes a model of a simpler shape in cross-section, as a special case.

Key words*: mathematical model, eddy current probe, the drive winding, the vector potential of the electromagnetic field.*

Внедрение автоматизированного проектирования (САПР) в создание контрольно-диагностического оборудования позволяет сократить время разработки и повысить надежность проектных решений. Важной составной частью автоматизированного проектирования является использование готового математического обеспечения – математических моделей (ММ) [1].

В данной работе продолжены результаты исследований по созданию ориентированной для САПР универсальной ММ трансформаторного вихретокового преобразователя (ВТП) линейно-протяженной формы [2]. В развитие указанных исследований рассмотрена базовая ММ ВТП указанной формы, включающая обмотку возбуждения (ОВ1) с поперечным сечением в виде плоского выпуклого многоугольника (рис.1), и измерительную обмотку (ИО1), расположенные (в пустоте 2) между проводящими полупространствами (1 и 3). Пренебрегая влиянием коротких сторон обмоток, ОВ1 и ИО1 представлены в виде двух бесконечно длинных половин: правой ($\mathbf{B}$) и левой. ($\mathbf{A}$). Упрощающие анализ допущения для такой формы обмоток изложены в работе [3].

Целью и задачей работы являлось построение математических выражений, описывающих в пустоте (2) начальное (первичное) электромагнитное поле ОВ1 указанной формы и вторичное поле вихревых токов, протекающих в проводящей среде. Эти выражения составляют основу ММ ОВ и в развернутом виде весьма громоздки. Поэтому приведем их в обобщенном виде. Так начальное электромагнитное поле описывает вектор-потенциал [3,4]

$$\dot{\vec{A}}_{0k} = \frac{\dot{I}\,\mu_0 w_1}{4\pi S_1}\iint\limits_{S1} \ln\frac{(x-x_{2\xi\chi})^2+(y-y_{2\xi\chi})^2}{(x-x_{1\xi\chi})^2+(y-y_{1\xi\chi})^2}\,dS_1\,\vec{\mathbf{1k}}; \qquad (1)$$

вторичное поле вносимого векторного потенциала определяет выражение [3,4]

$$\vec{\dot{A}}_{\text{вн}k}=-\frac{\dot{I}\mu_0 w_1}{2\pi S_1}\int_0^\infty\iint_{S_1}\left\{\frac{\underline{F}_1(\xi\chi)\,e^{\lambda x}+\underline{F}_2(\xi\chi)\,e^{-\lambda x}}{\lambda\underline{F}}\cos\lambda\left(y-y_{1\xi\chi}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\underline{F}_3(\xi\chi)\,e^{\lambda x}+\underline{F}_4(\xi\chi)\,e^{-\lambda x}}{\lambda\underline{F}}\cos\lambda\left(y-y_{2\xi\chi}\right)\right\}dS_1\,d\lambda\,\vec{\mathbf{1k}}\ ,\qquad(2)$$

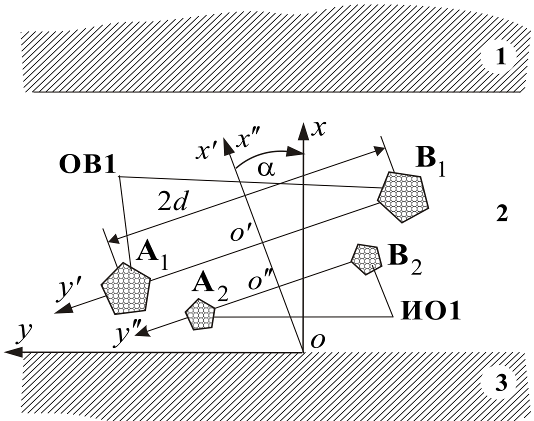

Рисунок 1 - Схема расположения ВТП линейно-протяженной формы

где x, y - координаты системы Oxy, $\dot{I}$ - комплекс действующего значения тока в проводниках ОВ1, μ_0 - магнитная постоянная, w_1 - число проводников, уложенных на каждой половине ОВ1, S_1 - площадь поперечного сечения каждой половины обмотки, $\vec{\mathbf{1k}}$ - орт по оси z , ξ,χ - некоторые взаимно ортогональные переменные интегрирования, имеющие область определения в пределах площади поперечного сечения обмотки, $y_{1\xi\chi}, x_{1\xi\chi}$; $x_{2\xi\chi}, y_{2\xi\chi}$ - координаты срединных точек на площади поперечного сечения ОВ1, определенные в системе декартовых координат Oxy, $\underline{F}_1(\xi\chi), \underline{F}_2(\xi\chi), \underline{F}_3(\xi\chi)$, $\underline{F}_4(\xi\chi), \lambda\underline{F}$ комплексные величины, включающие постоянные интегрирования (их развернутые выражения приведены в [3,4]). Вектор-потенциалы направлены вдоль оси z . Будем рассматривать их комплексные модули.

В процессе анализа и вычисления (1) и (2) установлено:

•интегралы (1) и (2) можно представить, в общем случае, в виде повторных интегралов, поскольку:

- $y_{1\xi\chi}, x_{1\xi\chi}; x_{2\xi\chi}, y_{2\xi\chi}$ можно выразить через ξ,χ с помощью формул линейного преобразования координат [5];

- при замене переменных x и y на ξ и χ не происходит искажение площади поперечного сечения обмотки и функциональный определитель прямого отображения (якобиан) [6] в данном случае равен

$$J(\xi;\chi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \chi}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \chi}\end{vmatrix}=+1 .$$

Получим первоначальную форму представления (1) и (2)

$$\dot{A}_{0k}=\frac{\dot{I}\mu_0 w_1}{4\pi S_1}\left\{\int\limits_{\xi_4^{\mathbf{B}}}^{\xi_3^{\mathbf{B}}} d\xi \int\limits_{\chi_4^{\mathbf{B}}(\xi)}^{\chi_3^{\mathbf{B}}(\xi)} \ln[\mathrm{ch}(\chi)]\,d\chi-\int\limits_{\xi_2^{\mathbf{A}}}^{\xi_1^{\mathbf{A}}} d\xi \int\limits_{\chi_2^{\mathbf{A}}(\xi)}^{\chi_1^{\mathbf{A}}(\xi)} \ln[\mathrm{zn}(\chi)]\,d\chi\right\}; \qquad (3)$$

$$\dot{A}_{\text{вн}k}=-\frac{\dot{I}\mu_0 w_1}{2\pi S_1}\int\limits_0^{\infty}\left\{\int\limits_{\xi_2^{\mathbf{A}}}^{\xi_1^{\mathbf{A}}} d\xi \int\limits_{\chi_2^{\mathbf{A}}(\xi)}^{\chi_1^{\mathbf{A}}(\xi)} \mathrm{vn}_1(\chi)d\chi-\int\limits_{\xi_4^{\mathbf{B}}}^{\xi_3^{\mathbf{B}}} d\xi \int\limits_{\chi_4^{\mathbf{B}}(\xi)}^{\chi_3^{\mathbf{B}}(\xi)} \mathrm{vn}_2(\chi)d\chi\right\}, \qquad (4)$$

где $\mathrm{ch}(\chi), \mathrm{zn}(\chi), \mathrm{vn}_1(\chi), \mathrm{vn}_2(\chi)$ - соответственно числитель и знаменатель в (1), а также 1-ое и 2-ое слагаемые в (2). Они соответствуют выражениям для левой ($\mathbf{A}$) и правой ($\mathbf{B}$) половины обмотки; $\xi_i^{\mathbf{A(B)}}$ - координата пока неизвестной точки на площади поперечного сечения обмотки (на любой половине обмотки), как предел внешнего интеграла в (3) и (4); $\chi_i^{\mathbf{A(B)}}(\xi)$ - уравнение пока неизвестной прямой также как предел внутреннего интеграла в (3) и (4);

•каждое слагаемое в (3) и в (4) можно представить в виде алгебраической суммы простых интегралов (это заключение обосновано анализом (3) и (4) при произвольном числе сторон указанного многоугольника, используя приемы взятия внутреннего интеграла и свойство аддитивности для простых определенных интегралов [6]). Их число равно удвоенному числу сторон многоугольника ($2n$) на каждой половине обмотки. Так (3) примет вид

$$\dot{A}_{0k}=\frac{\dot{I}\mu_0 w_1}{4\pi S_1}\left\{\left[\int\limits_{x_{22}}^{x_{21}}\left[[\mathbf{CH}(\chi)]^{\chi_{12}^{\mathbf{B}}(\xi)}\right]d\xi+\int\limits_{x_{23}}^{x_{22}}\left[[\mathbf{CH}(\chi)]^{\chi_{23}^{\mathbf{B}}(\xi)}\right]d\xi+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\ldots+\int\limits_{x_{2,n-1}}^{x_{2n}}\left[[\mathbf{CH}(\chi)]^{\chi_{n-1,n}^{\mathbf{B}}(\xi)}\right]d\xi+\int\limits_{x_{2n}}^{x_{21}}\left[[\mathbf{CH}(\chi)]^{\chi_{n1}^{\mathbf{B}}(\xi)}\right]d\xi\right]-\left[\int\limits_{x_{12}}^{x_{11}}\left[[\mathbf{ZN}(\chi)]^{\chi_{12}^{\mathbf{A}}(\xi)}\right]d\xi+\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{x_{13}}^{x_{12}}\left[[\mathbf{ZN}(\chi)]^{\chi_{23}^{\mathbf{A}}(\xi)}\right]d\xi+\ldots+\int\limits_{x_{1,n-1}}^{x_{1n}}\left[[\mathbf{ZN}(\chi)]^{\chi_{n-1,n}^{\mathbf{A}}(\xi)}\right]d\xi+\int\limits_{x_{1n}}^{x_{11}}\left[[\mathbf{ZN}(\chi)]^{\chi_{n1}^{\mathbf{A}}(\xi)}\right]d\xi\right]\right\};(5)$$

приведем обобщенную форму интеграла (4)

$$\dot{A}_{\text{внк}}=-\frac{w_1\dot{I}\mu_0}{2S_1\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{\left[\int\limits_{x_{12}}^{x_{11}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi_{12}^{\mathbf{A}}(\xi)}\right]d\xi+\int\limits_{x_{13}}^{x_{12}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi_{23}^{\mathbf{A}}(\xi)}\right]d\xi+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\ldots+\int_{x_{1,n-1}}^{x_{1n}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{\mathbf{A}}_{n-1,n}(\xi)}\right]d\xi+\int_{x_{1n}}^{x_{11}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{\mathbf{A}}_{n1}(\xi)}\right]d\xi\right]-\left[\int_{x_{22}}^{x_{21}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{\mathbf{B}}_{12}(\xi)}\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_{x_{23}}^{x_{22}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{\mathbf{B}}_{23}(\xi)}\right]d\xi+\ldots+\int_{x_{2,n-1}}^{x_{2n}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{\mathbf{B}}_{n-1,n}(\xi)}\right]d\xi+\int_{x_{2n}}^{x_{21}}\left[[\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{\mathbf{B}}_{n1}(\xi)}\right]d\xi\right\}d\lambda, \quad (6)$$

где $[\mathbf{CH}(\chi)]^{\chi^{B(A)}_{i,i+1}(\xi)}; [\mathbf{ZN}(\chi)]^{\chi^{B(A)}_{i,i+1}(\xi)}; [\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{B(A)}_{i,i+1}(\xi)}; [\mathbf{VN}(\chi)]^{\chi^{B(A)}_{i,i+1}(\xi)}$ - первообразные внутренних интегралов (3) и (4), определенные одним из пределов интегрирования $\chi^{B(A)}_{i,i+1}(\xi)$; $\chi^{A(B)}_{i,i+1}$ - уравнение прямой проходящей через вершины многоугольника $A_iA_{i+1}(B_iB_{i+1})$, как уравнение прямой с угловым коэффициентом [5];

•произвольный член в (5) и (6) представляет собой линейный табличный интеграл, взятый вдоль i- той стороны правого многоугольника и i-той стороны левого многоугольника соответственно. При этом $x_{\max,1i}$; $x_{\min,1i}$ и $x_{\max,2i}$; $x_{\min,2i}$- соответственно, большая и меньшая по величине координата двух вершин, ограничивающих i-тую сторону левого и правого многоугольника соответственно;

•знаки слагаемых определяют соотношения между координатами вершин многоугольников и координатами основания перпендикуляра, опущенного из вершины на диагональ многоугольника [7].

Результирующее поле определяем наложением рассмотренных полей

$$\dot{\vec{A}}_{dk}=\left(\dot{A}_{0k}+\dot{A}_{\text{вн}k}\right)\vec{\mathbf{1k}}. \quad (7)$$

В качестве примера рассмотрим порядок (алгоритм) вычисления вектор-потенциалов для ММ ОВ с поперечным сечением в виде ромба (рис.2):

Считают заданными координаты вершин в системе $O'x'y'$ $\mathbf{A}_1(x'_{11};y'_{11})$; $\mathbf{A}_2(x'_{12};y'_{12})$; $\mathbf{A}_3(x'_{13};y'_{13})$; $\mathbf{A}_4(x'_{14};y'_{14})$; $\mathbf{B}_1(x'_{21};y'_{21})$; $\mathbf{B}_2(x'_{22};y'_{22})$; $\mathbf{B}_3(x'_{23};y'_{23})$ $\mathbf{B}_4(x'_{24};y'_{24})$ и, следовательно S_1. Также считают заданным число проводников w_1 в пределах каждой половины ОВ1;

- определяют координаты вершин ромба в системе Oxy (рис.2) по формулам перехода [5]

$x_i=x_0+x'_i\cos\alpha-y'_i\sin\alpha; y_i=y_0+x'_i\sin\alpha+y'_i\cos\alpha$,

где x_0, y_0 - координаты центра O' системе Oxy;

- рассчитывают параметры уравнения прямой, проходящей через соседние вершины ромба: в общем случае, для стороны $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i+1}$ ($i\in\{1,2,3,4\}$), как уравнение прямой с угловым коэффициентом

$\chi=-(k_{1i}\xi+d_{1i})$,

$$k_{1i}=\frac{\left(x_{1,\,i+1}-x_{1i}\right)\sin\alpha+\left(y_{1,\,i+1}-y_{1i}\right)\cos\alpha}{\left(x_{1,\,i+1}-x_{1i}\right)\cos\alpha-\left(y_{1,\,i+1}-y_{1,\,i}\right)\sin\alpha};$$

$$d_{1i}=\frac{\left(x_0-x_{1,\,i}\right)\left(y_{1,\,i+1}-y_{1,\,i}\right)-\left(x_{1,\,i+1}-x_{1,\,i}\right)\left(y_0-y_{1,\,i}\right)}{\left(x_{1,\,i+1}-x_{1,\,i}\right)\cos\alpha-\left(y_{1,\,i+1}-y_{1,\,i}\right)\sin\alpha}.$$

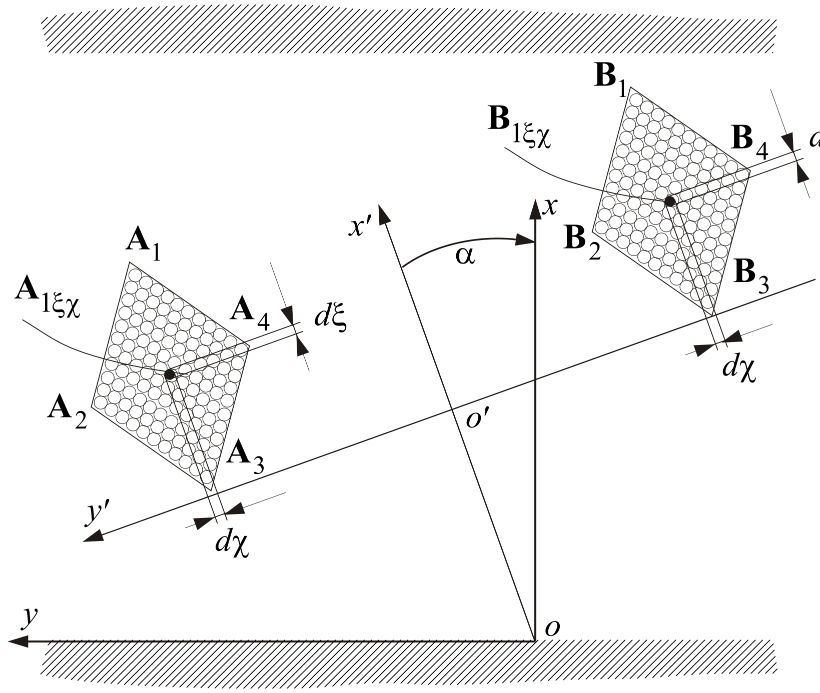

Рисунок 2 - Схема ОВ с поперечным сечением в виде ромба

Аналогично определяют коэффициенты k_{2i} и d_{2i} уравнения прямой $\mathbf{B}_i\mathbf{B}_{i+1}$

$$\chi=-\left(k_{2i}\xi+d_{2i}\right).$$

$$k_{2i}=\frac{\left(x_{2,\,i+1}-x_{2\,i}\right)\sin\alpha+\left(y_{2,\,i+1}-y_{2\,i}\right)\cos\alpha}{\left(x_{2,\,i+1}-x_{2\,i}\right)\cos\alpha-\left(y_{2,\,i+1}-y_{2,\,i}\right)\sin\alpha};$$

$$d_{2i}=\frac{\left(x_0-x_{2,\,i}\right)\left(y_{2,\,i+1}-y_{2,\,i}\right)-\left(x_{2,\,i+1}-x_{2,\,i}\right)\left(y_0-y_{2,\,i}\right)}{\left(x_{2,\,i+1}-x_{2,\,i}\right)\cos\alpha-\left(y_{2,\,i+1}-y_{2\,i}\right)\sin\alpha};$$

фиксируют количество слагаемых для данной формы поперечного сечения обмотки, определяющих модуль $\dot{A}_{0k}$ и $\dot{A}_{\text{вн}\,k}$. Каждое слагаемое подобно приведенным в (5) и (6), их число равно 8 (для каждой стороны ромба $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$ и $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\mathbf{B}_4$);

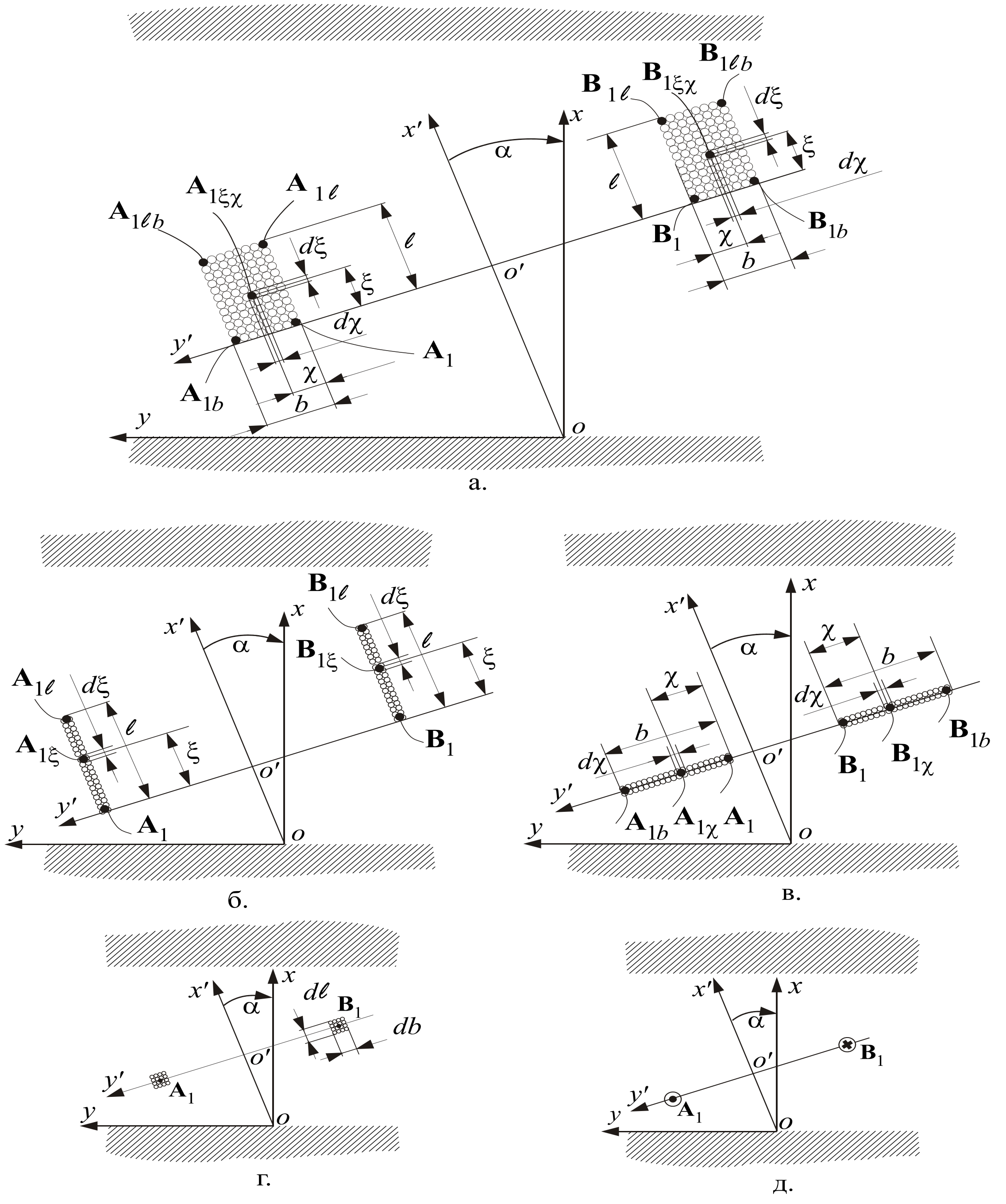

Рисунок 3 - Схемы ОВ с различным профилем в поперечном сечении

Используют полученное развернутое выражение первообразной в (1) и (2) для каждой стороны $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i+1}$ и $\mathbf{B}_i\mathbf{B}_{i+1}$ многоугольника [7], вычисляют величину модуля каждого слагаемого в формулах (5) и (6); определяют знак каждого слагаемого в (5) и (6). Фиксируют вершины ромба (на каждой половине обмотки), имеющие максимальную и минимальную координату x. Определяют уравнение прямой, проходящей через эти вершины и координаты основания перпендикуляра, опущенного из каждой вершины на эту прямую. Сопоставляя координату y вершины ромба и координату y основания перпендикуляра по известному правилу [7], определяют знаки этих слагаемых; алгебраически суммируя указанные слагаемые, определяют величину $\dot{A}_{0k}$, $\dot{A}_{\text{вн}k}$, и вектор-потенциал результирующего поля, создаваемого ОВ1 (7). Аналогичным образом рассчитывают поля, создаваемые линейно-протяженными ОВ с поперечным сечением в виде: прямоугольника (рис.3а), идеально тонкостенной ОВ (рис. 3б) и идеально короткой (спиральной) ОВ (рис. 3в), а также ММ ОВ многопроводных со средоточенными размерами в поперечном сечении (рис. 3г) и в виде нитевидных двухпроводных линий (рис.3д).

Алгоритм расчета таких форм обмоток проверен в [3]. Указанная терминология ОВ линейно-протяженной формы собрана и предложена авторами в результате литературного обзора и собственного опыта (Таблица 1).

Таблица 1 - Варианты ММ линейно-протяженных ОВ1 и их аббревиатура

Русская аббревиатура обозначения	**Abbreviation marks in English**
Обмотка возбуждения вихретокового преобразователя [8] (ОВ)	Drive winding of eddy current probe [8] (DW)
Нитевидная двухпроводная линия (НДЛ)	Filiform two-wire line (TWL)
Обмотка многопроводная сосредоточенная в поперечном сечении, обмотка в виде двухпроводной многожильной линии (ОМС)	Multi-wire winding centered in the cross section (MWC)
Линейно-протяженная идеально тонкостенная обмотка (ТО)	Linearly extended perfectly thin walled winding (TW)
Линейно-протяженная идеально короткая обмотка (спиральная обмотка) (СО)	Spiral winding (SW)
Линейно-протяженная обмотка прямоугольная в поперечном сечении (ОПС)	Linearly extended winding is rectangular in cross section (WRS)
Линейно-протяженная обмотка ромбовидная в поперечном сечении (ОРС)	Linearly extended winding diamond-shaped in cross section (WDS)
Линейно-протяженная обмотка эллиптическая в поперечном сечении (ОЭС)	Linearly extended winding is elliptical in cross section (WES)
Линейно-протяженная обмотка круглая в поперечном сечении (ОКС)	Linearly extended winding round in cross section (WRS)
Линейно-протяженная обмотка с формой поперечного сечения в виде многоугольника (ОМС)	Linearly extended winding is polygon in cross section (WPS)

Вывод.

Таким образом в данной работе построена универсальная ММ ОВ1 трансформаторного ВТП линейно-протяженной формы с поперечным сечением в виде выпуклого многоугольника, которая включает ОВ разнообразные по профилю поперечного включения, как частные случаи.

При этом:

- получены расчетные выражения, описывающие поле этой обмотки в отсутствие проводящей среды (начальное или первичное поле);
- построены расчетные выражения, описывающие поле вихревых токов в проводящей среде в области пространства, где расположена ОВ (вторичное поле);
- предложен алгоритм расчета этих полей (в словесной форме) и результирующего поля обмотки возбуждения, который конкретизирован на примере расчета поля обмотки с поперечным сечением в виде ромба;
- предложена терминология обозначения подобных по форме обмоток возбуждения.

Библиографический список:

1. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. – М.: Изд–во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2002. – 336 с
2. Степанов А.Л., Дедегкаев А.Г. Ориентированная для САПР универсальная ММ ВТК плоских проводящих сред. Часть 2 Решение задач для построения ММ. Труды Северо-Кавказского горно-металлургического института (ГТУ). Выпуск 21. Владикавказ, 2014. С. 112-121.
3. Степанов А.Л., Воронин П.А. Математическая модель линейно - протяженного вихретокового преобразователя для контроля плоских многослойных проводящих сред. Деп. в ВИНИТИ 06.08.97. № 2619 - В97.
4. Воронин П.А., Степанов А.Л. Математические основы автоматизированного проектирования режимов контроля и параметров вихретоковых преобразователей в однородных и неоднородных электромагнитных полях. Известия вузов. Сев.- Кав. регион. Техн. науки. Специальный выпуск «Математическое моделирование и компьютерные технологии». 2004. С. 89-93.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. - 832 с.
6. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
7. Степанов А.Л., Воронин П.А. Математическая модель обмотки возбуждения вихретокового преобразователя линейно-протяженной формы с поперечным сечением в виде многоугольника. Деп. в ВИНИТИ 26.03.99 № 925 - В99.
8. ГОСТ 24289-80. Контроль неразрушающий вихретоковый. Термины и определения.