

Математическая модель построения матрицы коэффициентов теплопроводности при низкотемпературном воздействии на многослойный эпидермис биологической ткани

Ф.Х. Кудаяева

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является разработка математической модели построения матрицы коэффициентов теплопроводности при низкотемпературном воздействии на многослойный эпидермис биологической ткани. **Метод.** Исследование основано на методах термодинамического анализа, натурального и вычислительного моделирования процессов при низкотемпературном воздействии. **Результат.** Разработана математическая модель матрицы коэффициентов теплопроводности при низкотемпературном воздействии на биологическую ткань. Теплообмен в многослойной среде при низкотемпературном воздействии на биологическую ткань представлен как процесс с дискретным шагом по времени и по координате. Тепловые свойства равномерно распределены по объему слоев биологической ткани. Для воздействия холодом использованы слои эпидермиса биологической ткани, разбитые на равномерные одинаковые ячейки, где площадь ячейки биологической ткани принята равной единице. **Вывод.** Полученные в настоящей работе результаты могут быть полезны специалистам, которые занимаются задачами моделирования в среде со свободными границами.

Ключевые слова: задача фазовыми переходами, матрица коэффициентов теплопроводности, математическая модель, биологическая ткань, низкотемпературное воздействие

Для цитирования: Ф.Х. Кудаяева. Математическая модель построения матрицы коэффициентов теплопроводности при низкотемпературном воздействии на многослойный эпидермис биологической ткани. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(3):25-34. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-3-25-34

Mathematical model for constructing a matrix of coefficients thermal conductivity under low-temperature influence on the multilayer epidermis of biological tissue

F.Kh. Kudayeva

H.M. Berbekov Kabardino-Balkar State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

Abstract. Objective. The purpose of the study is to develop a mathematical model for constructing a matrix of thermal conductivity coefficients under low-temperature exposure to the multilayer epidermis of biological tissue. **Method.** The research is based on methods of thermodynamic analysis, full-scale and computational modeling of processes under low-temperature influence. **Result.** A mathematical model of the matrix of thermal conductivity coefficients under low-temperature effects on biological tissue has been developed. Heat transfer in a multilayer medium under low-temperature influence on biological tissue is presented as a process with a discrete step in time and coordinate. Thermal properties are evenly distributed throughout the volume of layers of biological tissue. For exposure to cold, layers of the epidermis of biological tissue were used, divided into uniform identical cells, where the cell area of the biological tissue was taken to be equal to one. **Conclusion.** The results obtained in this work can be useful to specialists who deal with modeling problems with free boundaries.

Keywords: the problem of phase transitions, the matrix of thermal conductivity coefficients, mathematical model, biological tissue, low-temperature exposure

For citation: F.Kh. Kudayeva. Mathematical model for constructing a matrix of coefficients thermal conductivity under low-temperature influence on the multilayer epidermis of biological tissue. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024; 51(3):25-34 DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-3-25-34

Введение. Задача о моделировании и расчете теплопередачи через многослойную среду путем теплопроводности с возможностью возникновения в отдельных слоях фазовых переходов возникает в криомедицине, в криобиологии и в других областях.

В настоящее время значительное внимание при исследовании теплопередачи уделяется теплопроводности в среде с подвижными границами.

При низкотемпературном воздействии на биологические ткани также возникают границы раздела фаз: при переходе из состояния охлаждения в состояние замораживания; из состояния замораживания в состояние криопоражения; и еще подвижная граница области, которая определяется в процессе решения задачи [1,9,13-16,17, 20].

Основной проблемой при низкотемпературном воздействии на биологическую ткань является проблема о распространении температуры по глубине биологические ткани. Как показывают теоретические исследования, создание точной математической модели такого процесса требует учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и ее градиента $\lambda = \lambda(u, \text{gradu})$ [2,3,10-12,18,19].

Расчет переноса теплоты (холода) в многослойных средах является сложной нелинейной задачей, не имеющей аналитического решения. Конкретизация математической модели при низкотемпературном воздействии требует определения коэффициента теплопроводности λ , отражающая теплофизические свойства слоев биологической ткани [4-8].

Постановка задачи. Цель настоящей работы – разработка математической модели построения матрицы коэффициентов теплопроводности при низкотемпературном воздействии на многослойный эпидермис биологической ткани.

Методы исследования. Рассмотрим теплопроводность через эпидермис биологической ткани, где каждый слой характеризуются теплофизическими свойствами.

$$Q = \{q_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Пусть Q – значения количества теплоты (холода) в каждом слое эпидермиса биологической ткани, m – общее число слоев эпидермиса биологической ткани, j – номер слоя, Δt – промежуток времени перехода передачи количества теплоты (холода) из k -го слоя в $k+1$ слой, $\Delta t = \text{const}$.

Непрерывное время t заменим его дискретными моментами: $t_i = i \cdot \Delta t$, где i – целочисленные моменты условного времени. Тогда связь между векторами состояния до и после k -го перехода описывается следующей матричной формулой:

$$Q^{k+1} = P Q^k, \quad (1)$$

где P – матрица переходных вероятностей, элементы которой P_{ij} показывают вероятность перехода количества теплоты (холода) из i -й ячейки в j -ую ячейку слоя биологической ткани.

При различных температурах T_1 и T_2 между слоями возникает тепловой поток, который приведет к изменению количества теплоты (холода) в ячейках, описываемые формулами:

$$\begin{aligned} Q_j^{k+1} &= Q_j^k - \Delta Q_j^k = Q_j^k - \lambda_j S (T_j^k - T_{j+1}^k) \frac{\Delta t}{\Delta x} = \\ &= Q_j^k - \lambda_j S \left(\frac{Q_j^k}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} - \frac{Q_j^{k+1}}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}} \right) \Delta t = \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j}\right) Q_j^k + \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}; \\
 &Q_{j+1}^{k+1} = Q_{j+1}^k + \Delta Q_{j+1}^k = \\
 &= \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} Q_j^k + \left(1 - \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}\right) Q_{j+1}^k,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где λ_j – коэффициент теплопроводности, S_j – площадь поверхности ячейки биологической ткани, V_j – объем ячейки биологической ткани, C_j – теплоемкость слоя биологической ткани, ρ_j – плотность слоя биологической ткани, $h_j, j=1,2,\dots,m$ – толщина j-ой ячейки слоя.

Пусть слои биологической ткани для моделирования разбиты на равномерные одинаковые ячейки и пусть площадь ячейки биологической ткани $S=1$.

Предположим, что результирующее распределение температур строится в поперечном направлении, что означает, что модель будет базироваться на одномерной цепи Маркова. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\frac{S}{V_j} = \frac{1}{\Delta x_j}, \quad \frac{S}{V_{j+1}} = \frac{1}{\Delta x_{j+1}}. \tag{4}$$

С учетом (4), соотношения (2), (3) могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Q_{j+1}^k \\ Q_{j+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_j^2}\right) & \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_{j+1}^2} \\ \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_j^2} & \left(1 - \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_{j+1}^2}\right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Из (2) находим формулу для расчета коэффициента теплопроводности слоев биологической ткани:

$$\lambda_j = \frac{(Q_j^{k+1} - Q_j^k) V_j \Delta x_j R_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}{(Q_{j+1}^{k+1} V_j \Delta x_j - Q_j^k V_{j+1} \Delta x_{j+1}) M}, \tag{6}$$

где $R_j = c_j \rho_j, M = S \Delta t$.

Из (3) получаем:

$$\lambda_j = \frac{R_j (Q_{j+1}^{k+1} - Q_{j+1}^k) V_j \Delta x_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}{M (Q_j^k V_{j+1} \Delta x_{j+1} - Q_{j+1}^k V_j \Delta x_j)}. \tag{7}$$

Чтобы воспользоваться полученными формулами, вычислим количество теплоты (холода), передаваемое за один временной интервал верхнему ($j=1$) слою и нижнему ($j=m$) слою биологической ткани по формулам:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{k+1} &= Q_1^k + \alpha_1 S (T_{\text{всл}1}^k - T_1^k) \Delta t \\
 Q_m^{k+1} &= Q_m^k + \alpha_2 S (T_{\text{нсл}2}^k - T_m^k) \Delta t
 \end{aligned}$$

где α_1, α_2 – коэффициенты теплопередачи, $T_{\text{всл}1}^k$ – температура воздуха над верхним слоем биологической ткани, $T_{\text{нсл}2}^k$ – температура воздуха под нижним слоем биологической ткани, причем $T_{\text{всл}1}^k$ и $T_{\text{нсл}2}^k$ имеют постоянные значения в стационарном случае.

Для проверки закона сохранения полного запаса количества теплоты в объеме всех слоев биологической ткани строится переходная матрица вероятностей из k-го слоя в k+1-слой. Структура матрицы переходных вероятностей имеет вид:

$$\begin{array}{cccccc}
 P_{11} & P_{12} & 0 & \dots & 0 & \\
 P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & P_{32} & P_{33} & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & \dots & P_{m-1,m-1} & P_{m-1,m} \\
 0 & 0 & \dots & \dots & P_{m,m-1} & P_{m,m}
 \end{array} \quad (8)$$

где

$$P_{j+1,j} = \frac{\lambda_j \Delta t}{R_j \Delta x^2}, \quad P_{j-1,j} = \frac{\lambda_{j-1} \Delta t}{R_j \Delta x^2} \quad (9)$$

где Δx - размер ячейки (площадь поверхности и объем ячейки). Т.к. $S=1$, то объем зависит от толщины $h_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$.

Суммарная вероятность матрицы переходных вероятностей равна единице [6]:

$$P_{j,j} + P_{j+1,j} + P_{j-1,j} = 1 \quad (10)$$

Входными данными модели являются: количество ячеек, размер ячейки (толщина ячейки, площадь ячейки равна единице), плотность слоя биологической ткани, теплоемкость слоя биологической ткани, коэффициент теплообмена с окружающей средой, значение температуры внутри слоя биологической ткани, количество временных переходов из одного слоя в другой слой. Для проведения расчетов будем использовать данные, представленные в табл.1.

Таблица 1. Динамика температурного поля
Table 1. Temperature field dynamics

x	T(x)	x	T(x)	x	T(x)
0,01	31,69041	0,11	30,17605	0,22	28,7 661
0,02	31,53647	0,12	30,02765	0,23	28,57364
0,03	31,38308	0,13	29,87981	0,24	28,4312
0,04	31,23026	0,14	29,73251	0,25	28,28929
0,05	31,23026	0,15	29,58576	0,26	28,14792
0,05	30,92628	0,16	29,43955	0,27	28,00708
0,07	30,77513	0,17	29,29388	0,28	27,86676
0,07	30,62453	0,18	29,14876	0,29	27,72697
0,08	30,47448	0,19	29,00417	0,3	27,58771
0,09	30,47448	0,21	28,86012		

Функциональная зависимость температуры от пространственной переменной описывается квадратичной или линейной функцией:

$$T(x) = 6,2718x^2 - 15,831x + 31,828 \quad (11)$$

$$T(x) = -13,892x + 31,728 \quad (12)$$

Для построения матрицы коэффициентов теплопроводности выбрана зависимость (12), а для определения теплового потока используем формулу:

$$Q_j^k = \rho_j c_j \Delta x_j T_j^k, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Как известно из справочных источников, протяженность рогового слоя эпидермиса составляет до 10 мкм, толщина от 100 нм до 1 мкм, от 15 до 20 слоев в толстой коже, от 3 до 4 слоев в тонкой коже.

Для построения матрицы коэффициентов сначала разобьем роговой слой на три слоя, а также разобьем слои на ячейки. Пусть протяженность каждой ячейки составляет 1 мкм. Теплоемкость, плотность, размер ячейки (толщина) представлены в таблицах 2-4.

Таблица 2. Теплоемкость
Table 2. Heat capacity

Теплоемкость Heat capacity										
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0										
1	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
2	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
3	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6

Таблица 3. Плотность
Table 3. Density

Плотность Density										
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0										
1	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
2	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13

Плотность Density										
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
3	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12

Таблица 4. Толщина ячейки
 Table 4. Cell thickness

Размер ячейки (толщина) Cell size (thickness)										
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0										
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
2	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18
	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19
3	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21
	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23
	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24
	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25

Площадь ячейки биологической ткани составляет 1. Объем зависит от толщины ячейки. Начальная температура биологической ткани совпадает с температурой $36,6^{\circ}C$, поэтому тепловой поток с внешней среды составляет 0,0184464.

Подставляя входные данные в (13), найдем тепловые потоки для каждого слоя ячейки (табл.5). Проведя расчеты, получим искомую матрицу коэффициентов (табл.6)

Таблица 5. Тепловой поток
Table 5. Heat flow

Тепловой поток Heat flow										
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1,81328E-05	1,81E-05								
1	3,62656E-05	3,63E-05								
	5,43984E-05	5,44E-05								
	7,25312E-05	7,25E-05								
	9,0664E-05	9,07E-05								
	0,000108797	0,000109	0,000109	0,000109	0,000109	0,000109	0,000109	0,000109	0,000109	0,000109
	0,00012693	0,000127	0,000127	0,000127	0,000127	0,000127	0,000127	0,000127	0,000127	0,000127
	0,000145062	0,000145	0,000145	0,000145	0,000145	0,000145	0,000145	0,000145	0,000145	0,000145
	0,000163195	0,000163	0,000163	0,000163	0,000163	0,000163	0,000163	0,000163	0,000163	0,000163
2	0,000185214	0,000185	0,000185	0,000185	0,000185	0,000185	0,000185	0,000185	0,000185	0,000185
	0,000202051	0,000202	0,000202	0,000202	0,000202	0,000202	0,000202	0,000202	0,000202	0,000202
	0,000218889	0,000219	0,000219	0,000219	0,000219	0,000219	0,000219	0,000219	0,000219	0,000219
	0,000235726	0,000236	0,000236	0,000236	0,000236	0,000236	0,000236	0,000236	0,000236	0,000236
	0,000252564	0,000253	0,000253	0,000253	0,000253	0,000253	0,000253	0,000253	0,000253	0,000253
	0,000269402	0,000269	0,000269	0,000269	0,000269	0,000269	0,000269	0,000269	0,000269	0,000269
	0,000286239	0,000286	0,000286	0,000286	0,000286	0,000286	0,000286	0,000286	0,000286	0,000286
	0,000303077	0,000303	0,000303	0,000303	0,000303	0,000303	0,000303	0,000303	0,000303	0,000303
	0,000319914	0,00032	0,00032	0,00032	0,00032	0,00032	0,00032	0,00032	0,00032	0,00032
	0,00032639	0,000326	0,000326	0,000326	0,000326	0,000326	0,000326	0,000326	0,000326	0,000326
3	0,000341933	0,000342	0,000342	0,000342	0,000342	0,000342	0,000342	0,000342	0,000342	0,000342
	0,000357475	0,000357	0,000357	0,000357	0,000357	0,000357	0,000357	0,000357	0,000357	0,000357
	0,000373018	0,000373	0,000373	0,000373	0,000373	0,000373	0,000373	0,000373	0,000373	0,000373
	0,00038856	0,000389	0,000389	0,000389	0,000389	0,000389	0,000389	0,000389	0,000389	0,000389
	1,81328E-05	1,81E-05								

Таблица 6. Матрица коэффициента теплопроводности
Table 6. Thermal conductivity matrix

Коэффициент теплопроводности Thermal conductivity coefficient									
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0									
1	0,000504	0,000504	0,000504	0,00050	0,000504	0,000504	0,000504	0,000504	0,000504
	0,002016	0,002016	0,002016	0,002016	0,002016	0,002016	0,002016	0,002016	0,002016
	0,004536	0,004536	0,0045 6	0,004536	0,004536	0,004536	0,004536	0,004536	0,004536
	0,008064	0,008064	0,008064	0,008064	0,008064	0,008064	0,008064	0,008064	0,008064
	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126
	0,018144	0,018144	0,018144	0,018144	0,018144	0,018144	0,018144	0,018144	0,018144
	0,024696	0,024696	0,024696	0,024696	0,024696	0,024696	0,024696	0,024696	0,024696
	0,032256	0,032256	0,032256	0,032256	0,032256	0,032256	0,032256	0,032256	0,032256
2	0,040824	0,040824	0,040824	0,040824	0,040824	0,040824	0,040824	0,040824	0,040824
	0,056628	0,056628	0,056628	0,056628	0,056628	0,056628	0,056628	0,056628	0,056628
	0,067392	0,067392	0,067392	0,067392	0,067392	0,067392	0,067392	0,067392	0,067392
	0,079092	0,079092	0,079092	0,079092	0,079092	0,079092	0,079092	0,079092	0,079092
	0,091728	0,091728	0,091728	0,091728	0,091728	0,091728	0,091728	0,091728	0,091728
	0,1053	0,1053	0,1053	0,1053	0,1053	0,1053	0,1053	0,1053	0,1053

Коэффициент теплопроводности Thermal conductivity coefficient									
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,119808	0,119808	0,119808	0,119808	0,119808	0,119808	0,119808	0,119808	0,119808
	0,135252	0,135252	0,135252	0,135252	0,135252	0,135252	0,135252	0,135252	0,135252
	0,151632	0,151632	0,151632	0,151632	0,151632	0,151632	0,151632	0,151632	0,151632
	0,168948	0,168948	0,168948	0,168948	0,168948	0,168948	0,168948	0,168948	0,168948
3	0,190512	0,190512	0,190512	0,190512	0,190512	0,190512	0,190512	0,190512	0,190512
	0,209088	0,209088	0,209088	0,209088	0,209088	0,209088	0,209088	0,209088	0,209088
	0,228528	0,228528	0,228528	0,228528	0,228528	0,228528	0,228528	0,228528	0,228528
	0,248832	0,248832	0,248832	0,248832	0,248832	0,248832	0,248832	0,248832	0,248832
	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27

Входные данные: количество (слоев) эпидермиса: 1-ый слой – 2, 2-ой слой – 2, третий слой – 3, количество (ячеек) – 3; область биологической ткани определена ранее, где свободная граница области в расчетах равна 3,5. Область биологической ткани разбита по толщине эпидермиса с шагом $s1/7$, где число 7 – это общее количество слоев эпидермиса. Температуры по слоям найдены по формуле (12) и они соответственно равны: 24,782; 17,836; 10,89; 3,944; -3,002; -9,948; -16,894.

Толщина каждого слоя и температуры для каждого слоя представлены в следующих матрицах:

$$X = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3.5 & 3.5 & 3.5 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 24.782 & 24.782 & 24.784 \\ 17.836 & 17.836 & 17.836 \\ 10.890 & 10.890 & 10.890 \\ 3.944 & 3.944 & 3.944 \\ -3.002 & -3.002 & -3.002 \\ -9.948 & -9.948 & -9.948 \\ -16.894 & -16.894 & -16.894 \end{pmatrix}.$$

Теплоемкость в первом слое – 0,36; во втором слое – 0,36; в третьем слое – 0,37.

Плотность в первом слое – 0,12; во втором слое – 0,14; в третьем слое – 0,15.

Площади ячеек равны единице, а объем зависит от толщины ячеек слоя.

Суммарное время воздействия (сек) составляет: первый слой – 4,28571428571429; второй слой – 8,57142857142857; третий слой – 12,8571428571429; четвертый слой – 17,1428571428571; пятый слой – 21,4285714285714; шестой слой – 25,7142857142857; седьмой слой – 30.

Коэффициент теплоотдачи в верхний слой биологической ткани составляет – 0,5, а коэффициент теплоотдачи под нижний слой биологической ткани – 0,4, температура внешней среды биологической ткани – 28, температура под нижним слоем биологической ткани – 36.

Применяя формулу (13) найдены тепловые потоки по слоям биологической ткани:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,53552912 & 0,53552912 & 0,53552912 \\ 0,7705152 & 0,7705152 & 0,7705152 \\ 0,823284 & 0,823284 & 0,823284 \\ 0,3975552 & 0,3975552 & 0,3975552 \\ -0,416527 & -0,416527 & -0,416527 \\ -1,656342 & -1,656342 & -1,656342 \\ -3,28165 & -1,656342 & -1,656342 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица коэффициентов теплопроводности:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,091679977062062 & 0,091679977062062 & 0,091679977062062 \\ 0,00110622549875965 & 0,00110622549875965 & 0,00110622549875965 \\ 0,171871097226895 & 0,171871097226895 & 0,171871097226895 \\ 0,0570738774339374 & 0,0570738774339374 & 0,0570738774339374 \\ 0,0734024252925542 & 0,0734024252925542 & 0,0734024252925542 \\ 0,11916360421385 & 0,11916360421385 & 0,11916360421385 \\ 0,478894111842568 & 0,478894111842568 & 0,478894111842568 \end{pmatrix}$$

Вывод. Полученные результаты показывают изменение коэффициента теплопроводности эпидермиса по выделенным слоям. Что касается других слоев кожи (дерма, гиподерма), то этот вопрос остается открытым.

Это связано с тем, что низкотемпературное воздействие на эти слои в силу их сложной структуры (наличие кровеносных сосудов и др.) может привести к необратимым процессам.

Библиографический список:

1. Артюхов И.В., Карнаухов А.В. Криосохранение крупных биологических объектов. Сборник трудов института биомедицинских технологий, института биофизики клетки РАН. 2004
2. Березовский А.А., Леонтьев Ю.В. Математическое прогнозирование криовоздействия на биологические ткани/Криобиология. Киев. Наука думка. 1989.- С.7-13
3. Данилюк И. И. О задаче Стефана // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 133-185.
4. Избранные труды М.Х.Шханукова-Лафишева под.ред. П.Н. Вабищевича, А.А. Алиханова, М.Х. Бештокова. Нальчик, изд.М.и В. Котляровых, 2021. – 288с.
5. Кудяева Ф.Х. Задачи с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани. Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. 2023. Т. 13. № 3. С.21-27
6. Кудяева Ф.Х., Вешнева И.В. Построение матрицы коэффициентов теплопроводности. Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. 2023. Т. 13. № 4. С.21-26.
7. Кудяева Ф.Х., Кайгермазов А.А., Кармоков М.М., Мамбетов М.Ж., Долова М.Х. Математическая модель криодеструкции биологической ткани // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. ISSN 2070-7428. URL: www.science-education.ru/129-22558.
8. Кудяева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Математическая модель влияния физико-химических факторов на биологическую ткань при криодеструкции. Математические методы в технологиях и технике. 2022. № 1. С. 73-76.
9. Лозина-Лозинский Л.К. Очерки по криобиологии. Адаптация и устойчивость организмов и клеток к низким и сверхнизким температурам. Л.: Наука, 1972. 288 с.
10. Павлов А. Р. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при фазовых переходах: учебное пособие. Якутск, 2001. 58 с.
11. Пушкарева А.Е. Методы математического моделирования в оптике биоткани. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. — 103 с.
12. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика: Учеб. для вузов. — 4-е изд., перераб. и дополн. -М.: Дрофа, 2003. — 560 с.
13. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. Отв. ред. А.А. Самарский, С.П. Курдюмов, В.А. Галактионов. -М.: Наука, 1986. – 312 с.
14. Математическое моделирование. Методы описания и исследования сложных систем. Отв. ред. А.А. Самарский, Н.Н. Моисеев, А.А. Петров. -М.: Наука, 1989. – 271 с.
15. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.Наука, 1991, 560 с.
16. Шафранов В.В., Цыганов Д.И., Поляев Ю.А. Возможности криохирургии // Анналы хирургии. 1996. №4. С.47.
17. E.Tyulkina, P.Vassiliev, T. Janovsky, and M. Shcherbakov. Evaluation of Interaction Level between Potential Drug and Protein by Hydrogen Bond Energy Calculation./ Knowledge-BasedSoftware Engineering, A. Kravets, M.Shcherbakov, M.Kultsova, Tadashi Iijima (Eds.), 11th Joint Conference, JCKBSE 2014, Volgograd, Russia, September 17-20, 2014, Proceedings, DOI 10.1007/978-3-319-11854-3, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, Pp. 542-556
18. Harvard University: Artificial Intelligence in Medicine: Applications, implications, and limitations. [Electronic resource]. URL: <https://sitn.hms.harvard.edu/flash/2019/artificial-intelligence-in-medicine-applications-implications-and-limitations/> (accessed 10.05.2022)
19. Cryodestruction of brain tumors / S. Vasiliev, V. Krylov, S. Pesnya-Prasolov, A. Zuev, A. Vyatkin, T.Galyan, S.Kungurcev, V.Pavlov : материалы the 39th annual meeting of the Japan society for low temperature medicine «Cryomedicine 2012» (Japan, Tokyo, 21-22.11.2012). – P. 43–44
20. Carpenter J. F., Crowe J. H. The mechanism of cryoprotection of proteins by solutes // Cryobiology. 1988. V. 25. P. 244–255., Clarke A., Morris G. J., Fonseca F. et al. A low temperature limit for life on Earth // PLoS One. 2013. V. 8. e66207. DOI: 10.1371/journal.pone.0066207

References:

1. Artyukhov I.V., Karnaukhov A.V. Cryopreservation of large biological objects. Proceedings of the Institute of Biomedical Technologies, Institute of Cell Biophysics of the Russian Academy of Sciences. 2004 (In Russ)
2. Berezovsky A.A., Leontiev Yu.V. Mathematical prediction of cryotherapy on biological tissues. *Cryobiology*. Kyiv. Naukova dumka. 1989;7-13.
3. Danilyuk I. I. On the Stefan problem. *Successes of mathematical sciences*. 1985;40(5):133-185. (In Russ)
4. Selected works of M.H.Shkhanukov-Lafishev, edited by P.N. Vabishevich, A.A. Alikhanov, M.H. Beshtokov. Nalchik, ed.M. and V. Kotlyarov, 2021; 288. (In Russ)
5. Kudayeva F.Kh. Problems with phase transitions under low-temperature exposure to biological tissues. *Proceedings of Kabardino-Balkarian State University*. 2023;13(3):21-27(In Russ)
6. Kudayeva F.Kh., Veshneva I.V. Construction of a matrix of thermal conductivity coefficients. *Proceedings of Kabardino-Balkarian State University*. 2023;13(4.):21-26. (In Russ)
7. Kudayeva F.Kh., Kaygermazov A.A., Karmokov M.M., Mambetov M.J., Dolova M.Kh. Mathematical model of cryodestruction of biological tissue. *Modern problems of science and education*. 2015; 2. ISSN 2070-7428. URL: www.science-education.ru/129-22558. (In Russ)
8. Kudayeva F.Kh., Kaygermazov A.A. Mathematical model of the influence of physico-chemical factors on biological tissue during cryodestruction. *Mathematical methods in technology and engineering*. 2022;1:73-76. (In Russ)
9. Lozina-Lozinsky L.K. Essays on cryobiology. Adaptation and resistance of organisms and cells to low and ultra-low temperatures. L.: Nauka, 1972; 288. (In Russ)
10. Pavlov A. R. Mathematical modeling of heat and mass transfer processes in phase transitions: a textbook. Yakutsk, 2001; 58. (In Russ)
11. Pushkareva A.E. Methods of mathematical modeling in biotissue optics. A study guide. St. Petersburg: St. Petersburg State University ITMO, 2008; 103. (In Russ)
12. Remizov A.N. Medical and biological physics: Studies for universities. — 4th ed., reprint. and the supplement. -M.: Drofa, 2003; 560. (In Russ)
13. Mathematical modeling. Processes in nonlinear media. Ed. A.A. Samarsky, S.P. Kurdyumov, V.A. Galaktionov. M.: Nauka, 1986; 312. (In Russ)
14. Mathematical modeling. Methods of description and research of complex systems. Ed. A.A. Samarsky, N.N. Moiseev, A.A. Petrov. M.: Nauka, 1989; 271. (In Russ)
15. Samarskiy A.A., Kurdyumov S.P., Akhromeeva T.S., Malinetsky G.G. Unsteady structures and diffusion chaos. M.Nauka, 1991; 560. (In Russ)
16. Shafranov V.V., Tsyganov D.I., Polyayev Yu.A. Possibilities of cryosurgery. *Annals of surgery*. 1996;4:47. (In Russ)
17. E.Tyulkina, P.Vassiliev, T. Janovsky, and M. Shcherbakov. Evaluation of Interaction Level between Potential Drug and Protein by Hydrogen Bond Energy Calculation./ Knowledge-Based Software Engineering, A. Kravets, M. Shcherbakov, M. Kultsova, Tadashi Iijima (Eds.), 11th Joint Conference, JCKBSE 2014, Volgograd, Russia, September 17-20, 2014, Proceedings, DOI 10.1007/978-3-319-11854-3, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, P. 542-556
18. Harvard University: Artificial Intelligence in Medicine: Applications, implications, and limitations. [Electronic resource]. URL: <https://sitn.hms.harvard.edu/flash/2019/artificial-intelligence-in-medicine-applications-implications-and-limitations/> (accessed 10.05.2022)
19. Cryodestruction of brain tumors / S. Vasiliev, V. Krylov, S. Pesnya-Prasolov, A. Zuev, A. Vyatkin, T.Galyan, S.Kungurcev, V.Pavlov : материалы the 39th annual meeting of the Japan society for low temperature medicine «Cryomedicine 2012» . Japan, Tokyo, 21-22.11.2012;43–44.
20. Carpenter J. F., Crowe J. H. The mechanism of cryoprotection of proteins by solutes. *Cryobiology*. 1988; 25:244–255., Clarke A., Morris G. J., Fonseca F. et al. A low temperature limit for life on Earth // *PLoS One*. 2013. V. 8. e66207. DOI: 10.1371/journal.pone.0066207

Сведения об авторе:

Кудаева Фатимат Хусейновна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики института искусственного интеллекта и цифровых технологий; kfatimat@yandex.ru; ORCID:0000-0002-1026-3280

Information about author:

Fatimat Kh. Kudaeva, Cand. Sci. (Physical and Mathematical), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies; kfatimat@yandex.ru; ORCID:0000-0002-1026-3280

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов/The author declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 21.05.2024.

Одобрена после рецензирования/ Revised 19.06.2024.

Принята в печать/Accepted for publication 19.06.2024.