СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 534.1
DOI: 10.21822/2073-6185-2024-51-2-216-222 Оригинальная статья /Original article

Продольные вынужденные гармонические колебания вертикальных стержней с сосредоточенной массой

Х.П. Культербаев[1], М.М. Пайзулаев[2]
[1]Северо-Кавказский федеральный университет,
[1]355017, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1, Россия,
[2]Дагестанский государственный технический университет,
[2]367026, г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70, Россия

Резюме. Цель. Рассматриваются продольные вынужденные гармонические колебания вертикальных стержней с сосредоточенной массой на конце. **Метод.** Математическая модель вынужденных кинематически возбуждаемых продольных колебаний описывается дифференциальным уравнением и граничными условиями, вытекающими из условия закрепления концов стержня. Задача решатся с помощью метода конечных разностей. **Результат.** Установлено, что при околорезонансном колебании между амплитудами и среднеквадратическими отклонениями имеется существенная разница. Близость β к собственной частоте и малость значения α делают почти все значения частот сейсмического воздействия почти резонирующими. Подтверждена достоверность результатов задач в детерминистической и стохастической постановках. Установлено, что формы и параметры вынужденных детерминистических колебаний существенно зависят от совмещения частот вынуждающих возмущений с собственными частотами колебательной системы. Установлено, что формы и параметры вынужденных случайных колебаний существенно зависят от совмещения спектральной плотности случайного процесса возмущений с дискретным спектром собственных значений. **Вывод.** Приведённые в статье результаты свидетельствуют о необходимости расширения тематики исследования с включением и других типов колебаний: комбинаций продольных с поперечными, угловыми, крутильными, параметрическими и т. д.

Ключевые слова: вертикальный стержень, сосредоточенная масса, сейсмическое воздействие, продольные вынужденные гармонические колебания, амплитуда колебаний, дифференциальное уравнение, граничные условия, метод конечных разностей, спектральная плотность, среднеквадратические отклонения

Для цитирования: Х.П. Культербаев, М.М. Пайзулаев. Продольные вынужденные гармонические колебания вертикальных стержней с сосредоточенной массой. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(2): 216-222. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-2-216-222

Longitudinal forced harmonic vibrations of vertical rods with concentrated mass.

H.P. Kulterbaev[1], M.M. Paizulaev[2]
[1]North Caucasus Federal University,
[1]1 Pushkina St., Stavropol 355017, Russia,
[2]Daghestan State Technical University,
[2]70 I.Shamil Ave., Makhachkala 367026, Russia

Abstract. Objective. Longitudinal forced harmonic vibrations of vertical rods with a concentrated mass at the end are considered. **Method.** The mathematical model of forced kinematically excited longitudinal vibrations is described by a differential equation and boundary conditions arising from the condition of fixing the ends of the rod. The problem will be solved using the finite difference method. **Result.** With near-resonance oscillation there is a significant difference between the amplitudes and standard deviations. The closeness of β to the natural frequency and the smallness of the value of α make almost all values of the frequencies of seismic action almost resonant. The reliability of the results of problems in deterministic and stochastic formulations has been confirmed. It has been established that the forms and parameters of forced deterministic oscillations significantly depend on the combination of the frequencies of the forcing disturbances with the natural frequencies of the oscillatory system. It has been established that the forms and parameters of forced random oscillations significantly depend on the combination of the spectral density of the random process of disturbances with the discrete spectrum of eigenvalues. **Conclusion**. It is necessary to expand the scope of research to include other types of vibrations: combinations of longitudinal with transverse, angular, torsional, parametric, etc.

Keywords: vertical rod, concentrated mass, seismic impact, longitudinal forced harmonic vibrations, vibration amplitude, differential equation, boundary conditions, finite difference method, spectral density, standard deviations

For citation: H.P. Kulterbaev, M.M. Paizulaev. Longitudinal forced harmonic vibrations of vertical rods with concentrated mass. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024; 51(2): 216-222. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-2-216-222

Введение. Продольные вынужденные гармонические колебания вертикальных стержней с сосредоточенной массой являются одной из основных задач в области динамики конструкций. Эта проблема значительно важна для инженеров, занимающихся проектированием и анализом сооружений, таких как мосты, здания и другие строительные конструкции.

Постановка задачи. Задача о гармонических колебаниях исследуется по двум основным мотивам:

1. Актуальность обусловлена возможностью возникновения колебаний в вертикальном стержне из-за воздействия внешних, часто техногенных факторов.

2. Анализ поставленной задачи значительно упрощает решение более фундаментальной задачи о случайных колебаниях стержня при сейсмическом воздействии.

Методы исследования. Для анализа данных колебаний используются различные методы, включая аналитические и численные подходы [1-17]. Аналитический подход позволяет получить аналитическое решение для уравнения движения стержня, основываясь на его математической модели и предположениях. Это может быть полезно для получения общих выводов о системе и оценки ее динамических свойств. В численных методах используются различные алгоритмы для численного решения уравнения движения. Наиболее распространенными методами являются метод конечных элементов и метод конечных разностей, которые позволяют получить численное решение уравнения, учитывая все основные факторы и условия.

На рис. 1 представлена водонапорная башня из стальной трубы длины l = 25 м, диаметром D =108 мм, толщиной стенки δ = 4,71 мм.

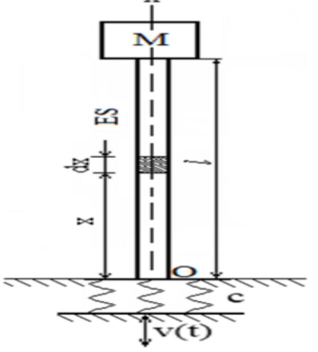

Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Design diagram

Масса ёмкости с водой $M = 30$ т, $n= 5001$, $\omega = \{ 0 \quad 2 \quad 3 \quad 12 \quad 329{,}2 \}$, $v_0 = 0$ см, $c = 1000$ кН/м. Расчётная схема (рис. 1), теперь дополняется вертикальными гармоническими перемещениями низа упругого основания под фундаментом $v(t) = v_0e^{i\omega t}$.

Следовательно, колебания будут вынужденными и кинематически возбуждаемыми.

Математическая модель колебаний состоит из основного уравнения

$$\ddot{u} - a^2 u'' = 0,\ a^2 = \frac{E}{\rho},\ x \in (0, l),\quad t > -\infty \tag{1}$$

и граничных условий $bu'(0,t) - c[u(0,t) - v(t)] = 0,$ (2)

$$bu'(l, t) + M\ddot{u}(l, t) = 0 \tag{3}$$

Совершив переход к методу конечных разностей [7, 8] и выполнив необходимые преобразования [ ], аналогичные приведённым выше для свободных колебаний, придём к неоднородной системе алгебраических уравнений

$$AX = d, \tag{4}$$

где $d^T = \{2hcv_0/b, \quad 0,\ldots 0\}$ – вектор-столбец, нулевые элементы матрицы A не показаны

$$A = \begin{pmatrix} s & 4 & -1 & & \vdots & & & & \\ 1 & e & 1 & & \vdots & & & & \\ & 1 & e & 1 & \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \vdots & & 1 & e & 1 \\ & & & & \vdots & & 1 & -4 & r \end{pmatrix}.$$

Обсуждение результатов. Рассмотрим конкретный пример при нескольких значениях ω. Результаты вычислений показаны на рис. 2 при возрастающих значениях частоты возмущений ω. Кривая 1 соответствует статическим перемещениям при $\omega = 0$. При росте частоты (кривые 2 и 3) и их приближении к первой собственной частоте амплитуды колебаний возрастают.

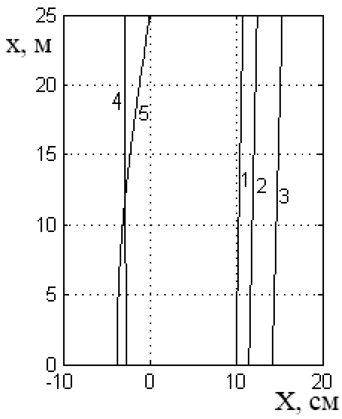

Рис. 2. Кривые, соответствующие возрастающим значениям частоты возмущения
Fig. 2. Curves corresponding to increasing values of the disturbance frequency

При этом разница между перемещениями нижнего и верхнего концов небольшая. Поэтому при этих частотах деформации и напряжения в сечениях будут незначительными. При частотах, превышающих первую собственную, форма колебаний начинает принимать форму второй моды колебаний (рис. 5) и меняет знак отклонений, что означает, что фазы колебаний и возмущений будут противоположными.

Вынужденные случайные колебания. Пусть теперь кинематическое возмущение $v(t)$ будет стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием. При стационарном режиме колебаний функция $u(x,t)$ будет центрированным пространственно-временным случайным полем, стационарным во времени и неоднородным по пространственной координате. Математическое ожидание такого поля будет нулевым. Найдём дисперсии $D_u(X)$ продольных перемещений в стержне.

Рассмотрим пример сейсмического воздействия наиболее характерного случая, когда входной процесс имеет скрытую периодичность, иначе характерную (доминирующую) частоту. Спектральная плотность случайных возмущений имеет вид (рис. 3) и описывается формулой:

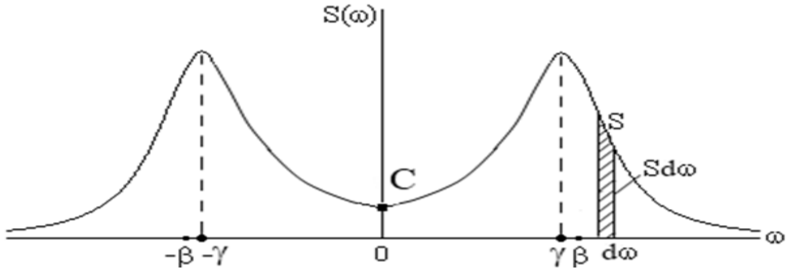

Рис. 3. Спектральная плотность случайных возмущений
Fig. 3. Spectral density of random disturbances

$$S(\omega) = \frac{2\alpha\theta^2\sigma^2}{\pi[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]}; \qquad \theta^2 = \alpha^2 + \beta^2. \tag{5}$$

Здесь α - параметр широкополосности, β - характерная частота, σ – среднеквадратическое отклонение. Выясним зависимость дисперсии перемещений $D_u(x)$ случайных колебаний от характерной частоты возмущений β. При этом коэффициент широкополосности α возьмём сравнительно небольшим. Тогда случайные возмущения являются узкополосными и близкими к гармоническим. Как следствие, случайные колебания стержня также должны быть близкими к гармоническим колебаниям, рассмотренным выше. С этой целью при прежних и дополнительных значениях параметров $\alpha = 0{,}1\ c^{-1}$; $\sigma = 10$ см

проведены вычисления при возрастающих значениях параметра β, совпадающих с частотами детерминированных возмущений ω в примере 3, приведённом выше.

$$\beta = \{\,0\quad 2\quad 3\quad 12\quad 329{,}2\,\}.$$

Известно, что непрерывный случайный стационарный процесс можно представлять в виде ряда Фурье

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty}[U_i \cos\omega_i t + V_i \sin\omega_i t]. \tag{6}$$

Здесь U_i и V_i – некоррелированные случайные числа. Несложные преобразования, учитывающие взаимосвязь между дисперсией и корреляционной функцией стационарного случайного процесса, далее некоррелированность коэффициентов ряда (6), дают

$$D[X(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} D_i. \tag{7}$$

Этот результат можно показан графически на рис. 4 в виде так называемого дискретного спектра. Получается так, что имеется бинарное соответствие между дисперсиями и частотами, т. е. каждой дисперсии ставится в соответствие определённая частота. Нетрудно заметить, что предельный переход от дискретных значений ω_i к континууму ω приведёт к непрерывной функции спектральной плотности типа (5).

При этом дисперсия случайного процесса входного процесса v(t) представляется несобственным интегралом

$$D_v = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega. \tag{8}$$

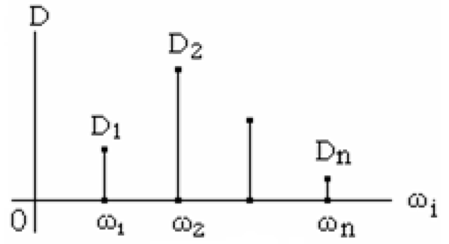

Рис. 4. Графики дискретного спектра
Fig. 4. Discrete spectrum plots

Это означает, что дисперсия распределена непрерывно на всей вещественной числовой оси **R.** Теперь соответствие будет состоять в том, что каждой дискретной частоте ставится в соответствие элементарная дисперсия (заштрихована на рис 3.)

$$\omega_i \sim S(\omega)d\omega. \tag{9}$$

Если элементарную дисперсию взять взамен амплитуды гармонического процесса v_0, то на выходе задачи будет получена элементарная дисперсия отклонений $dD_u(\omega_i,x)$. Последующее суммирование по ω_i даёт дисперсию отклонений $D_u(x)$. Полученные результаты в виде функции $D_u(x)$ представлены графиками рис. 5.

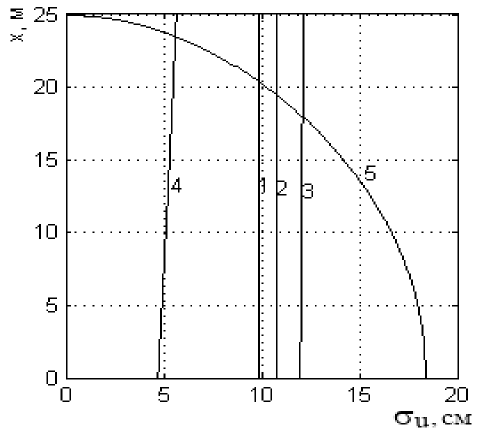

Рис. 5. Зависимость между амплитудами и среднеквадратическими отклонениями
Fig. 5. Relationship between amplitudes and standard deviations

С учётом, что дисперсии случайного процесса могут принимать лишь положительные значения, можно утверждать, что кривые линии рис. 4 идентичны в качественном и количественном отношениях соответствующим графикам амплитуд на рис. 2. Причина состоит в том, что при малых значениях параметра широкополосности, как в данном случае ($\alpha \ll \beta$), возмущающий процесс близок к гармоническому.

Как следствие, все выводы, сделанные по рис. 2 для гармонических колебаний, остаются в силе, но в терминах характерной частоты и среднеквадратического отклонения. При околорезонансном колебании (кривые 5) между амплитудами и среднеквадратическими отклонениями имеется существенная разница, по-видимому, близость β к собственной частоте и малость значения α делают почти все значения частот сейсмического воздействия почти резонирующими. Этот факт подтверждает достоверность результатов задач в детерминистической и стохастической постановках. Также подтверждается предположение о тесной связи между детерминистическими и стохастическими колебаниями, высказанное при постановке задачи. Следует заметить, что в обоих случаях при высокочастотных колебаниях (кривая 5) дискретная масса играют роль гасителя колебаний, оставаясь почти неподвижной во время колебаний.

Вывод. Продольные колебания вертикальных стержней, находящихся вблизи эпицентра землетрясений, являются опасными для их прочности и устойчивости. Метод конечных разностей позволяет создавать универсальные алгоритмы и компьютерные программы, легко решающие сложные спектральные задачи. Данную разработку можно легко адаптировать к колебаниям стержней переменного сечения, к колебаниям континуально-дискретных стержней. До настоящего времени исследования о случайных колебаниях зданий и строительных сооружений, а также и нормативные документы посвящались горизонтальным сейсмическим воздействиям и вызванным ими поперечным изгибным колебаниям. Приведённые в статье результаты свидетельствуют о необходимости расширения такой тематики исследований с включением и других типов колебаний: комбинаций продольных с поперечными, угловыми, крутильными, параметрическими и т. д.

Формы и параметры вынужденных детерминистических колебаний существенно зависят от совмещения частот вынуждающих возмущений с собственными частотами колебательной системы.

Формы и параметры вынужденных случайных колебаний существенно зависят от совмещения спектральной плотности случайного процесса возмущений с дискретным спектром собственных значений.

Полученные результаты позволяют перейти к расчётам на прочность, жёсткость и надёжность сооружений в виде вертикальных стержней.

Библиографический список:

1. Акимов П.А., Белостоцкий Т.Б. и др. Информатика в строительстве (с основами математического и компьютерного моделирования): учебное пособие. Москва: КНОРУС, 2017. - 420 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
3. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалёва М.Л. Численные и аналитические методы расчёта строительных конструкций: Издательство АСВ, –М. 2009. – 336 с.
5. Кашеварова Г.Г., Пермякова Т.Б., Лаищева М.Е. Численные методы решения задач строительства. Часть 1.– Пермь: Изд-во Пермского нац.- исслед. политехн. ун-та, 2015. -161 с.
6. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977. 154 с.
7. Волков Е.А. Численные методы: Учебное пособие для вузов. –Москва. Гл. ред. физ. –мат. лит. 1987. -248 с.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1978. 512 с.
9. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. –М.: Стройиздат, 1981. -436 с.
10. Культербаев Х. П. Колебания вертикальной стойки переменного сечения при гармонических и случайных векторных возмущениях. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. (Казань, 20-24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 2181-2184.
11. Культербаев Х.П. О влиянии коррелированности сейсмических воздействий на колебания вертикального стержня. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. 19-24 августа 2019 г., -Уфа. РИЦ БашГУ, 2019. С. 38 с.
12. Kulterbaev Kh.P., Shogenova M.M., Baragunova L.A. On the Influence of the Characteristic Frequency and Broadband of Seismic Effects on the Vertical Rod Oscillations. International science and technology conference "FarEastCon-2019" IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 753 (2020) 042040. IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/753/4/042040
13. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Shogenova, M.M. Shardanova M.A., Abdulsalam I.M. Longitudinal Vibrations of Seismic Disturbance Vertical Bar. Proceedings of the International Symposium “Engineering and Earth Sciences: Applied and Fundamental Research” (ISEES 2018). Advances in Engineering Research, volume 177. P. 515-520.
14. Культербаев Х.П., Абдул Салам И.М., Пайзулаев М.М. Свободные продольные колебания вертикального стержня с дискретными массами при наличии сил демпфирования. // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018; 45(3): 8-17. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17
15. Мкртычев О.В., Решетов А.А. Сейсмические нагрузки при расчёте зданий и сооружений: Монография. –М.: Издательство АСВ. 2017. -140 с.
16. Назаров Ю.П. Расчётные модели сейсмических воздействий /.–М.: Наука, 2012.–414с.
17. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, Глав. ред. физико-матем. лит., 1987. -600 с.

Refernces:

1. Akimov P.A., Belostotsky T.B. and others. Informatics in construction (with the basics of mathematical and computer modeling): textbook. Moscow: KNORUS, 2017; 420. (In Russ)
2. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. M.: Higher School, 2002;840. (In Russ)
3. Vibrations in technology. Directory in 6 volumes. Volume 1. Oscillations of linear systems / Ed. Bolotina V.V. M.: Mechanical engineering. 1978;352. (In Russ)
4. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L. Numerical and analytical methods for calculating building structures: Publishing house ASV, M. 2009;336. (In Russ)
5. Kashevarova G.G., Permyakova T.B., Laishcheva M.E. Numerical methods for solving construction problems. Part 1. – Perm: Perm National Research Publishing House. Polytechnic Univ., 2015;161. (In Russ)
6. Varvak P.M., Varvak L.P. The mesh method in problems of calculation of building structures. M.: Stroyizdat, 1977;154 (In Russ)
7. Volkov E.A. Numerical methods: Textbook for universities. Moscow. Ch. ed. physical -mat. lit. 1987;248. (In Russ)
8. Kalitkin N.N. Numerical methods. Main editorial office of physical and mathematical literature of the Nauka publishing house, M., 1978;512. (In Russ)
9. Karamansky T.D. Numerical methods of structural mechanics. M.: Stroyizdat, 1981;436. (In Russ)
10. Kulterbaev Kh. P. Vibrations of a vertical strut of variable cross-section under harmonic and random vector disturbances. XI All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics: collection of reports. (Kazan, August 20-24, 2015). Kazan: Kazan Publishing House. Univ., 2015; 2181-2184. (In Russ)
11. Kulterbaev Kh.P. On the influence of the correlation of seismic impacts on the vibrations of a vertical rod. XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Abstracts of reports. August 19-24, 2019, Ufa. RIC BashSU, 2019; 38 . (In Russ)
12. Kulterbaev Kh.P., Shogenova M.M., Baragunova L.A. On the Influence of the Characteristic Frequency and Broadband of Seismic Effects on the Vertical Rod Oscillations. International science and technology conference "FarEastCon-2019" IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 753 (2020) 042040. IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/753/4/042040
13. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Shogenova, M.M. Shardanova M.A., Abdulsalam I.M. Longitudinal Vibrations of Seismic Disturbance Vertical Bar. Proceedings of the International Symposium “Engineering and Earth Sciences: Applied and Fundamental Research” (ISEES 2018). Advances in Engineering Research, 2018; 177: 515-520.
14. Kulterbaev Kh.P., Abdul Salam I.M., Paizulaev M.M. Free longitudinal vibrations of a vertical rod with discrete masses in the presence of damping forces. Herald of the Dagestan State Technical University. Technical science. 2018; 45(3): 8-17. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17 (In Russ)
15. Mkrtychev O.V., Reshetov A.A. Seismic loads in the calculation of buildings and structures: Monograph. – M.: ASV Publishing House. 2017;140. (In Russ)
16. Nazarov Yu.P. Calculation models of seismic impacts. M.: Nauka, 2012;414. (In Russ)
17. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods. M.: Nauka, Chapter. ed. Physics and Mathematics lit., 1987;-600. (In Russ)

Сведения об авторах:

Культербаев Хусен Пшимурзович, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник; kulthp@mail.ru;

Пайзулаев Магомед Муртазалиевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; smdstu@mail.ru.

Information about authors:

Husen P. Kulterbaev, Dr. Sci. (Eng), Prof., Leading Researcher; kulthp@mail.ru;

Magomed M. Payzulaev, Cand. Sci. (Eng), Assoc. Prof., Head of the Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics; smdstu@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 15.03.2024.

Одобрена после рецензирования / Reviced 28.04.2024.

Принята в печать /Accepted for publication 28.04.2024.