

**Об одном способе интегрирования уравнений сейсмических колебаний
сейсмоизолированных сооружений**

**А.А. Долгая¹, Х.Р. Зайнулабидова², А.С. Можжухин³, Ш.Ш. Назарова³,
А.А. Назаров³, Г.В. Сорокина³, А.М. Уздин³**

¹ОАО «Трансмост»,

¹190013, Санкт-Петербург, Подъездной пер., 1, Россия,

²Дагестанский государственный технический университет,

²367026, г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70, Россия,

³Петербургский государственный университет путей сообщения (ПГУПС)

Императора Александра I,

³190068, Санкт-Петербург, Набережная реки Фонтанки, 111, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является разработка нового способа анализа сейсмических колебаний сейсмоизолированных сооружений. **Метод.** Сооружение моделируется системой с одной степенью свободы с нелинейной характеристикой жесткости. При отсутствии затухания записано аналитическое решение уравнения колебаний на фазовой плоскости. При этом связь скоростей и смещений является точной, а для вычисления смещений используется закон равнопеременного движения. Для учета затухания использован закон изменения механической энергии на каждом интервале интегрирования. **Результат.** Предложен новый способ анализа сейсмических колебаний сейсмоизолированных сооружений. **Вывод.** Рассмотрен пример расчета сейсмоизолированной системы со скользящим поясом и пружиной с линейно меняющейся характеристикой жесткости. Проанализировано влияние сухого трения и вязкого демпфирования на смещения и ускорения системы.

Ключевые слова: сейсмоизолированная система, уравнения колебаний, фазовая плоскость, нелинейность, точное решение, учет затухания в сейсмоизоляции

Для цитирования: А.А. Долгая, Х.Р. Зайнулабидова, А.С. Можжухин, Ш.Ш. Назарова, А.А. Назаров, Г.В. Сорокина, А.М. Уздин. Об одном способе интегрирования уравнений сейсмических колебаний сейсмоизолированных сооружений. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024; 51(2): 190-196. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-2-190-196

About one way to integrate the equations of seismic vibrations of seismically isolated structures

**A.A. Dolgaya¹, H.R. Zainulabidova², A.S. Mozzhukhin, Sh.Sh. Nazarova³,
A.A. Nazarov³, G.V. Sorokina³, A.M. Uzdin³**

¹JSC Transmost,

¹1 Podezdnoy lane, St. Petersburg 190013, Russia,

²Daghestan State Technical University,

70 I. Shamil Ave., Makhachkala 367026, Russia,

³Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University (PGUPS),

³111 Fontanka River Embankment, St. Petersburg 190068, Russia

Abstract. Objective. The purpose of the study is to develop a new method of analyzing seismic vibrations of seismically isolated structures. **Method.** The structure is modeled by a system with one degree of freedom with a nonlinear stiffness characteristic. In the absence of damping an analytical solution of oscillation equations on the phase plane is obtained. In this

case the connection between speeds and displacements is accurate, and the law of uniformly variable motion is used to calculate displacements. **Result.** To take into account the attenuation, the law of change in mechanical energy at each integration interval is used. **Conclusion.** An example of calculating a seismically isolated system with a sliding belt and a spring with a linearly varying characteristic of stiffness is considered. The influence of dry friction and viscous damping on the displacement and acceleration of the system is analyzed.

Keywords: seismically isolated structure, oscillation equations, phase plane, nonlinear, accurate solution, take into account the attenuation in seismic insulation

For citation: A.A. Dolgaya, H.R. Zainulabidova, A.S. Mozzhukhin, Sh.Sh. Nazarova, A.A. Nazarov, G.V. Sorokina, A.M. Uzdin. About one way to integrate the equations of seismic vibrations of seismically isolated structures. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2024; 51(2): 190-196. DOI:10.21822/2073-6185-2024-51-2-190-196

Введение. В общем случае интегрирование уравнений сейсмических колебаний представляет собой достаточно сложную задачу. Наиболее эффективный и распространенный способ интегрирования, основанный на разложении движения по формам колебаний [1, 2], применим только для линейных систем с пропорциональным демпфированием [3, 4]. Эти условия не выполняются для сейсмоизолированных систем. Практически все системы сейсмоизоляции характеризуются повышенным демпфированием и нелинейной характеристикой жесткости [5, 6]. В этом случае прибегают к численному интегрированию [7-9], что требует мелкого шага оцифровки расчетной акселерограммы и больших затрат машинного времени. Для анализа сейсмоизолированных систем указанных проблем можно избежать.

Постановка задачи. В литературе по сейсмоизоляции отмечается, что для расчета систем сейсмоизоляции достаточно моделировать сооружение системой с одной степенью свободы [10-14]. Этот вывод справедлив для всех систем, за исключением случаев частичной сейсмоизоляции [15], сейсмоизоляции с повышенным демпфированием [16] и устройства сейсмоизоляции выше уровня фундамента [17]. В настоящей статье рассматривается случай обычной сейсмоизоляции, размещаемой по низу сооружения и обеспечивающей более 90% поэтажных смещений сооружения.

Методы исследования. В этом случае сооружение можно рассматривать, как жесткое тело, совершающее поступательное смещение относительно основания. Уравнение движения при этом записывается в виде

$$m\ddot{y} + c(y)y = -m\ddot{y}_0 \quad (1)$$

Здесь

y – смещение сооружения относительно основания;

m – масса системы; $\ddot{y}_0$ – ускорение дневной поверхности.

Функция $c(y)$ имеет размерность жесткости. Удобно представить ее в виде $c(y) = c_0 \cdot f(y)$, где c_0 некоторый множитель с размерностью жесткости, а $f(y)$ – безразмерная функция. Для линейной задачи с постоянной жесткостью c_0 величина $f=1$; для линейно возрастающей жесткости $c(y) = \alpha \cdot |y|$ в качестве c_0 удобно принять

жесткость при некотором характерном смещении $y=y_0>0$. Тогда $\alpha = \frac{c_0}{y_0}$, а выражение

для жесткости примет вид $c(y) = c_0 \cdot \frac{|y|}{y_0}$

С учетом предложенного представления жесткости после деления на массу получим

$$\ddot{y} + k^2 f(y)y = -\ddot{y}_0, \quad (2)$$

$$\text{где } k^2 = \frac{c_0}{m}.$$

Если ввести в уравнение (2) переменную скорость $V = \frac{dy}{dt}$ и учесть, что

$\ddot{y} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$, то уравнение (2) запишется в виде

$$VV + k^2 f(y)y = -\ddot{y}_0 \quad (3)$$

или

$$V'dV = -k^2 f(y)ydy - \ddot{y}_0 dy \quad (4)$$

штрихом обозначена производная по y .

Общий интеграл уравнения (4) имеет вид

$$\frac{V^2}{2} = -k^2 \int f(y)y - \int \ddot{y}_0 dy \quad (5)$$

При отсутствии возмущения получаем уравнение свободных колебаний сейсмоизолированной системы, рассмотренное в [18, 19].

Если рассмотреть интервал интегрирования от t_i до t_{i+1} продолжительностью τ , то из (5) получим

$$\frac{V(t_{i+1})^2 - V(t_i)^2}{2} + k^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y)y = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{y}_0 dy \quad (6)$$

Полученное уравнение представляет собой закон изменения механической энергии системы на единицу массы на участке от t_i до t_{i+1} . Первый член представляет собой изменение кинетической энергии, второй – изменение потенциальной энергии, а правая часть – работу сил инерции [20].

Для вычисления работы сил инерции примем движение на интервале интегрирования равнопеременным:

$$y(t) = \ddot{y}_i \frac{t^2}{2} + \dot{y}_i t + y_i, \quad (7)$$

а для ускорения основания между точками цифровки линейную аппроксимацию:

$$\ddot{y}_0(t) = \ddot{y}_0^{(i)} + \frac{\ddot{y}_0^{(i+1)} - \ddot{y}_0^{(i)}}{\tau} \cdot t = \ddot{y}_0^{(i)} + \alpha_i \cdot t \quad (8)$$

С учетом (7), (8) работа сил инерции запишется в виде

$$A_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{y}_0 dy = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\ddot{y}_0^{(i)} + \alpha_i \cdot t) \cdot (\ddot{y}_i t + \dot{y}_i) dt \quad (9)$$

После взятия интеграла получим

$$A_i = \frac{1}{3} \alpha_i \ddot{y}_i (t_{i+1}^3 - t_i^3) + \frac{1}{2} (\alpha_i \dot{y}_i + \ddot{y}_0^{(i)} \ddot{y}_i) (t_{i+1}^2 - t_i^2) + \ddot{y}_0^{(i)} \dot{y}_i \tau \quad (10)$$

Исходя из закона сохранения механической энергии, можно добавить в уравнение (6) работу сил вязкого сопротивления A_v и работу сил сухого трения A_f . Если принять силы вязкого и сухого трения на единицу массы соответственно

$$Q_v = \mu \dot{y} \text{ и } Q_f = -g f \operatorname{sign} \dot{y}, \quad (11)$$

то получим

$$Av_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma \dot{y} dy \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma \dot{y}^2 dt = \frac{\gamma k ((\ddot{y}_i t_{i+1} + \dot{y}_i)^3 - (\ddot{y}_i t_i + \dot{y}_i)^3)}{3 \ddot{y}_i} \quad (12)$$

$$Af_i = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f g dy \right| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f g \dot{y} dy \right| = \left| \frac{f g ((\ddot{y}_i t_{i+1} + \dot{y}_i)^2 - (\ddot{y}_i t_i + \dot{y}_i)^2)}{2 \ddot{y}_i} \right| \quad (13)$$

В результате формула пошагового интегрирования (6) примет вид

$$\frac{V(t_{i+1})^2 - V(t_i)^2}{2} + k^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y) dy = -A_i + Av_i + Af_i \quad (14)$$

Обсуждение результатов. В соответствии с формулой (5) авторами составлена программа пошагового интегрирования для уравнений рассматриваемого класса. В качестве примера реализации программы на рис. 1 приведены примеры расчета свободных колебаний систем под действием импульса скорости в виде траекторий на фазовой плоскости.

На рис.1а приведена фазовая траектория одномассовой линейной системы без затухания, на рис 1б аналогичная траектория для системы с вязким с затуханием, на рис.1в – для системы с демпфером сухого трения (ДСТ). При этом наглядно видно, что система с ДСТ затухает быстрее, поскольку в системе с вязким трением сила сопротивления падает с уменьшением амплитуды колебаний.

На рис. 1г приведена фазовая траектория системы с нелинейной пружиной, у которой жесткость возрастает с увеличением смещения и совпадает с жесткостью исходной системы при смещении $y_0 = 0.1$ м.

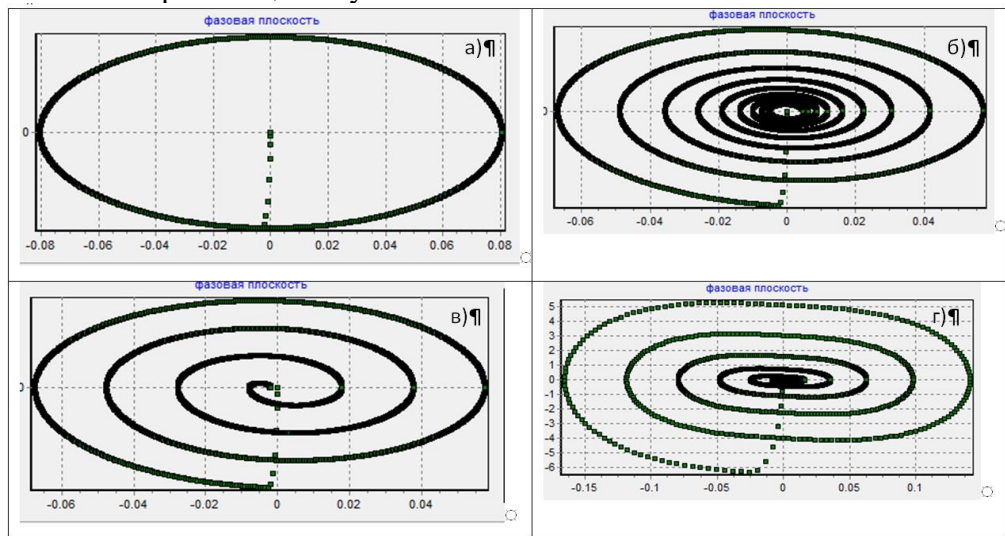


Рис.1. Фазовые траектории движения сейсмоизолированной системы

а) обычная система без демпфирования; б) то же с вязким демпфированием;

в) то же с демпфером сухого трения;

г) система с линейно возрастающим коэффициентом жесткости и демпфером вязкого трения

Fig.1. Phase trajectories of movement of a seismically isolated system

a) conventional system without damping; b) the same with viscous damping;

c) the same with a dry friction damper;

d) a system with a linearly increasing stiffness coefficient and a viscous friction damper

На рис. 2-4 приведены результаты расчета рассмотренных примеров по акселерограмме землетрясения «Бухарест». Предлагаемый алгоритм позволяет быстро анализировать варианты сейсмозащитных фундаментов, а также получать расчетную акселерограмму по низу сейсмоизолированного здания с дальнейшим его расчетам по известным конечноэлементным программам.

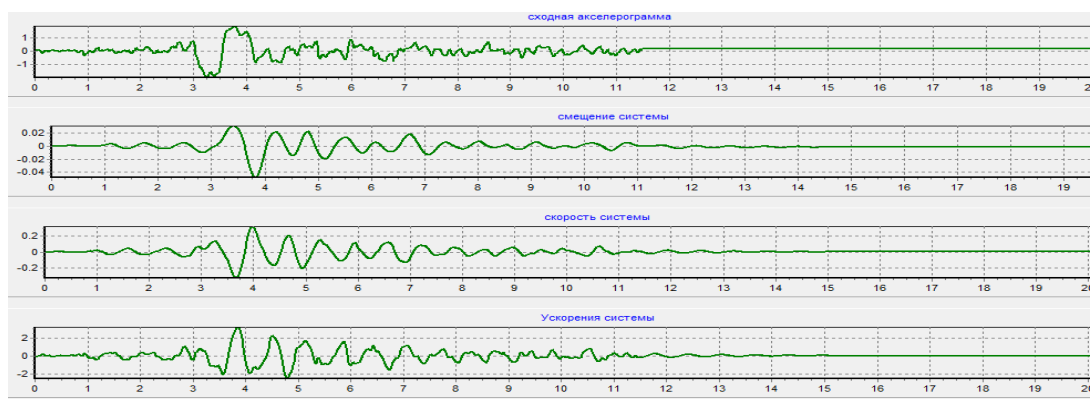


Рис.2. Хронограммы движения упругой системы с вязким демпфером при воздействии акселерограммы «Бухарест»

Fig.2. Chronograms of the movement of an elastic system with a viscous damper under the influence of the “Bucharest” accelerogram

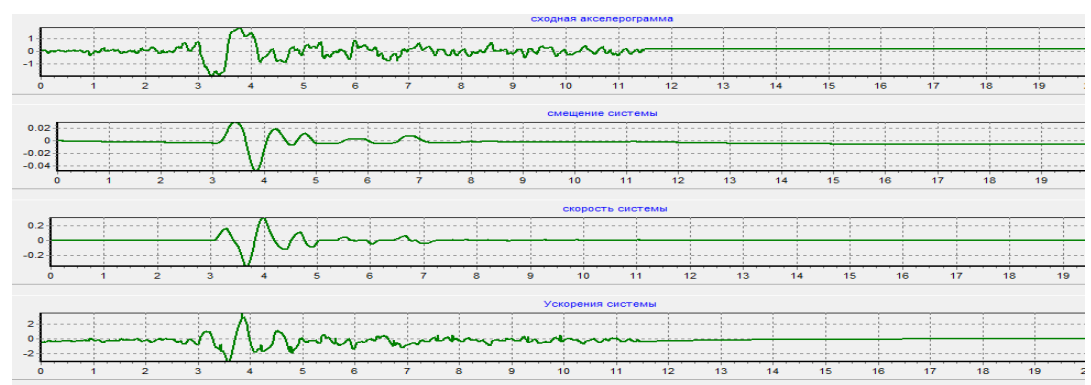


Рис.3. Хронограммы движения упругой системы с демпфером сухого трения при воздействии акселерограммы «Бухарест»

Fig.3. Chronograms of the movement of an elastic system with a dry friction damper under the influence of the “Bucharest” accelerogram

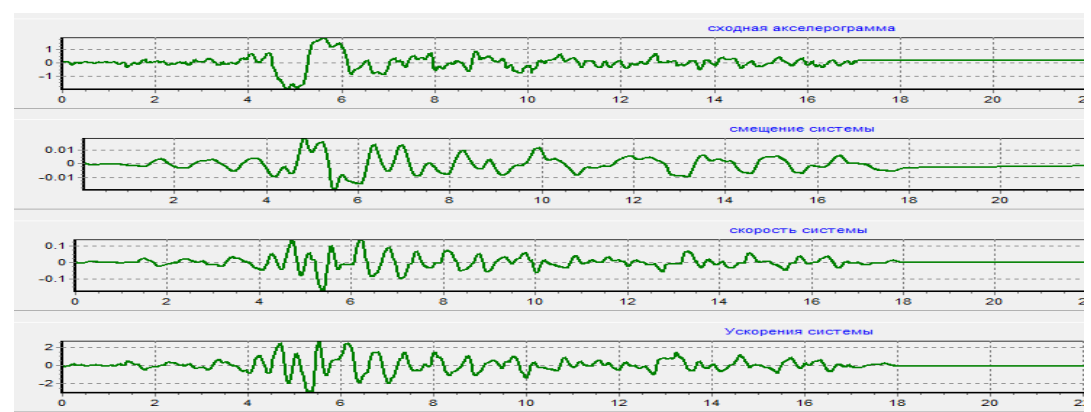


Рис.4. Хронограммы движения системы с линейно возрастающей жесткостью и демпфером вязкого трения при воздействии акселерограммы «Бухарест»

Fig.4. Chronograms of the movement of a system with linearly increasing rigidity and a viscous friction damper under the influence of the “Bucharest” accelerogram

Вывод. Предлагаемый подход прост в реализации и не требует обычно подцифровки акселерограмм по сравнению с известными, более общими численными методами интегрирования дифференциальных уравнений, применяемых в сейсмических расчетах [11, 12].

Библиографический список:

1. Chopra A.K. Earthquake Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering/ Second edition. EERI Publication No. VNO-11, ISBN #1-932884-07-6, 129 p.
2. Немчинов Ю.И., Марьенков Н.Г., Хавкин А.К., Бабики К.Н. Проектирование зданий с заданным уровнем обеспечения сейсмостойкости. Киев, 2012, 384 с
3. Тяпин А.Г. О роли демпфирования в динамических нагрузках при расчете на сейсмические воздействия// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018, №1, с.33-39
4. Белаш Т.А., Уздин А.М. Энергопоглощение в системах сейсмозащиты зданий и сооружений. Монография. Санкт-Петербург, ПГУПС, 2020, 178 с
5. Skiner R.I., Robinson W.H., McVerry G.H. An introduction to seismic isolation. New Zealand. John Wiley & Sons.1993, 353p.
6. Skinner R.I., Kelly J.M., Heine A.Y. Hysteretic dampers for earthquake-resistance structures.// Earthquake Eng. Struct. Dyn. -1975.-vol.3.- 3.- p.287
7. Буриев Т., Юлдашев Т., Фархадов Т. Разработка комплекса процедур СМО алгоритмической системы MDTT. "Материалы VI Всесоюзной конференции: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности // ИТ ПМ СО АН СССР, 1980, Ч.1, с. 34-39
8. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, М.-, Мир, 1979, 100с
9. Уздин А.М., Ирзахметова И.О. Методика расчета кусочно-линейных систем на сейсмические воздействия. // Э-И. ВНИИТПИ. Сер. "Сейсмостойкое строительство", Вып. 5-6., 1994, с.63-69
10. Renault J.,Richle M.,Pavot B. Premiere application des appuis antisismiques a friction,la centrale nucleaire de Kolberg.//Annales de l'institut techique du batiment et des travaux publics.-1979.-N371.-74 p.
11. Савинов О.А., Альберт И.У., Сандович Т.А. О возможности использования упрощенных расчетных схем при выборе параметров систем сейсмоизоляции сооружений.// Известия ВНИИГ им.Б.Е.Веденеева. Динамика и сейсмостойкость энергетических сооружений. Л.-,1983, т.166, с.31-39
12. Уздин А.М., Долгая А.А. Расчет элементов и оптимизация параметров сейсмоизолирующих фундаментов. М., ВНИИТПИ,1997, 76 с
13. Уздин А.М., Елизаров С.В., Белаш Т.А.Сейсмостойкие конструкции транспортных зданий и сооружений. Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2012, 500с.
14. Елисеев О.Н., Уздин А.М. Сейсмостойкое строительство. Учебник.СПб., Изд. ПВВИСУ, 1997, 371с.
15. Алатырцева Е. Л., Долгая А. А., Шермухамедов У. З., Шульман С. А. Сейсмоизоляция железнодорожного моста в Узбекистане. Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений» 1 (50), 2021, с.33-38
16. Белаш Т.А., Беляев В.С., Уздин А.М., Ермошин А.А., Кузнецова И.О. Сейсмоизоляция. Современное состояние. В сб. «Избранные статьи профессора О.А.Савинова и ключевые доклады, представленные на четвертые Савиновские чтения», Санкт-Петербург, Изд. ЗАО «Ленинградский Промстройпроект», 2004, с.95-128
17. Жгутова Т.В., Кузнецова И.О., Уздин А.М., Шульман С.А. Сейсмоизоляция железнодорожных мостов в Сочи. Труды заседания рабочей группы международного общества по системам сейсмозащиты (ASSISI),2011, с.119-132.
18. Авидон Г.Э., Давыдова Г.В., Доронин Ф.А., Карлина Е.А., Уздин А.М. Анализ работы сейсмоизолирующих фундаментов на опорных элементах с отрицательной жесткостью. Основания, фундаменты и механика грунтов. №3, 2009, с.15-21
19. Коузах С.Н., Сандович Т.А. Кинематические фундаменты в системах сейсмоизоляции зданий// Труды Российской конференции по механике грунтов и фундаментостроению. -СПб, т.2, 1995
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, Том I. М., Наука, 215 с.

References:

1. Chopra A.K. Earthquake Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. Second edition. EERI Publication No. VNO-11, ISBN #1-932884-07-6, 129 p.
2. Nemchinov Yu.I., Maryenkov N.G., Khavkin A.K., Babik K.N. Design of buildings with a given level of seismic resistance. Kyiv, 2012; 384.
3. Tyapin A.G. On the role of damping in dynamic loads when calculating seismic impacts. *Earthquake-resistant construction. Safety of structures*. 2018;1:33-39. (In Russ)
4. Belash T.A., Uzdin A.M. Energy absorption in seismic protection systems of buildings and structures. Monograph. St. Petersburg, PGUPS, 2020;178. (In Russ)
5. Skiner R.I., Robinson W.H., McVerry G.H. An introduction to seismic isolation. New Zealand. John Wiley & Sons.1993;353.
6. Skinner R.I., Kelly J.M., Heine A.Y. Hysteretic dampers for earthquake-resistance structures. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* -1975;3(3):287
7. Buriev T., Yuldashev T., Farkhadov T. Development of a set of QS procedures for the MDTT algorithmic system. "Materials of the VI All-Union Conference: Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity. *IT PM SO ANSSSR*, 1980; 1: 34-39 (In Russ)

8. Hall J., Watt J. Modern numerical methods for solving ordinary differential equations, M., Mir, 1979; 100.
9. Uzdin A.M., Irzakmetova I.O. Methodology for calculating piecewise linear systems for seismic impacts. *E-I. VNIINTPI. Ser. Earthquake-resistant construction*, 1994; 5-6:63-69 (In Russ)
10. Renault J., Richle M., Pavot B. Premiere application des appuis antisismiques a friction, la centrale nucleaire de Kolberg. *Annales de l'institut technique du batiment et des travaux publics* 1979;371:74.
11. Savinov O.A., Albert I.U., Sandovich T.A. On the possibility of using simplified design schemes when choosing the parameters of seismic insulation systems for structures. *News of VNIIG named after B.E. Vedeneev. Dynamics and seismic resistance of energy structures*. L., 1983;166:31-39 (In Russ)
12. Uzdin A.M., Dolgaya A.A. Calculation of elements and optimization of parameters of seismic isolating foundations. M., VNIINTPI, 1997;76. (In Russ)
13. Uzdin A.M., Elizarov S.V., Belash T.A. Earthquake-resistant structures of transport buildings and structures. Tutorial. Federal State Educational Institution "Training and Methodological Center for Education in Railway Transport", 2012;500. (In Russ)
14. Eliseev O.N., Uzdin A.M. Earthquake-resistant construction. Textbook. SPb., Publishing house PVVISU, 1997; 371. (In Russ)
15. Alatyrtseva E. L., Dolgaya A. A., Shermukhamedov U. Z., Shulman S. A. Seismic insulation of a railway bridge in Uzbekistan. Natural and man-made risks. Safety of structures" 2021;1 (50): 33-38(In Russ)
16. Belash T.A., Belyaev V.S., Uzdin A.M., Ermoshin A.A., Kuznetsova I.O. Seismic isolation. Current state. On Sat. "Selected articles by Professor O.A. Savinov and key reports presented at the fourth Savinov Readings", St. Petersburg, Ed. JSC "Leningadsky Promstroyproekt", 2004;95-128(In Russ)
17. Zhgutova T.V., Kuznetsova I.O., Uzdin A.M., Shulman S.A. Seismic isolation of railway bridges in Sochi. Proceedings of the meeting of the working group of the international society on seismic protection systems (ASSISI), 2011; 119-132. (In Russ)
18. Avidon G.E., Davydova G.V., Doronin F.A., Karlina E.A., Uzdin A.M. Analysis of the operation of seismic isolating foundations on supporting elements with negative rigidity. Foundations, foundations and soil mechanics. 2009; 3:15-21(In Russ)
19. Kouzakh S.N., Sandovich T.A. Kinematic foundations in seismic isolation systems for buildings. *Proceedings of the Russian Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. SPb, 1995; 2. (In Russ)
20. Landau L.D., Lifshits E.M. Mechanics, Volume I. M., Science, 215 p. (In Russ)

Сведения об авторах:

Долгая Анжелика Александровна, инженер, anzhelika-dolgaya@yandex.ru

Зайнулабидова Ханзада Рауповна, кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой «Архитектура»; hanzada1@mail.ru

Мозжухин Алексей Сергеевич, аспирант кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций»; lekhamoz@mail.ru

Назарова Шохиста Шукурилла кизи, аспирант кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций»; shoxistashukurullayevna@yandex.ru

Назаров Абдусаттор Абдурахманович, аспирант кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций»; sattor_cool@mail.ru

Сорокина Галина Вячеславовна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций»; ooofy@yandex.ru

Уздин Александр Моисеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций»; uzdin@mail.ru

Information about the authors:

Anjelika A. Dolgaya, Engineer; anzhelika-dolgaya@yandex.ru

Hanzada R. Zainulabidova, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof, Head Department of Architecture, hanzada1@mail.ru

Aleksey S. Mozzhukhin, Postgraduate Student, Department of Mechanics and Strength of Materials and Structures; lekhamoz@mail.ru

Shokhista Sh. kizi Nazarova, Postgraduate Student, Department of Mechanics and Strength of Materials and Structures; shoxistashukurullayevna@yandex.ru

Abdusattor A. Nazarov, Postgraduate Student, Department of Mechanics and Strength of Materials and Structures; sattor_cool@mail.ru

Galina V. Sorokina, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof, Department of Mechanics and Strength of Materials and Structures; ooofy@yandex.ru

Alexander M. Uzdin, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Department of Mechanics and Strength of Materials and Structures; uzdin@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 15.01.2024.

Одобрена после рецензирования/ Revised 21.02.2024.

Принята в печать/Accepted for publication 21.02.2024.