# МЕХАНИКА

**УДК 539.3**

*Агаханов Г.Э.*

## О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОРОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА ГРУНТ

*Agakhanov G.E.*

## ABOUT MATHEMATICAL MODELLING OF INFLUENCE OF STEAM PRESSURE UPON SOIL

*Для водонасыщенной двухфазной грунтовой среды с изменяющимися во времени свойствами в рамках сплошного изотропного тела с линейно-наследственной ползучестью выполнено математическое моделирование воздействия порового давления на грунт. Разработана новая расчетная модель, в которой поровое давление на грунт рассматривается как воздействие вынужденных деформаций. Показано, что разработанная и известная расчетные модели (в известной модели поровое давление на грунт рассматривается как действие объемных сил) полностью согласуются с установленными ранее в механике деформируемого твердого тела общими условиями эквивалентности воздействий. Рассмотрены частные случаи грунтовой среды.*

***Ключевые слова:*** *математическое моделирование, водонасыщенный двухфазный грунт, поровое давление на грунт, неинвариантная грунтовая среда, вынужденные деформации, линейно-наследственная ползучесть.*

*For the water-saturated two-phase soil environment with the properties changing in time within a continuous isotropic body with linearly - hereditary creep executed mathematical modeling of influence of steam pressure upon soil. The new settlement model in which the steam pressure upon soil is considered as impact of the compelled deformations is developed. It is shown that the developed and known settlement models (in known model the steam pressure upon soil is considered as action of volume forces) will completely be coordinated with the general conditions of equivalence of influences established earlier in mechanics of a deformable solid body. Special cases of the soil environment are considered.*

***Key words:*** *mathematical modeling, water-saturated two-phase soil, steam pressure upon soil, not invariant soil environment, the compelled deformations, linearly - hereditary creep.*

Рассмотрим водонасыщенную двухфазную грунтовую систему, находящуюся под действием поверхностных сил. Процесс консолидации грунта сопровождается возникновением сил взаимодействия между двумя фазами грунта (грунтовым скелетом и поровой водой), обусловливаемых явлениями взвешивания скелета грунта за счет возникших давлений в поровой жидкости.

Принимаем расчетную модель, в которой поровое давление на грунт рассматривается как действие объемных сил, определяемых по следующей зависимости [1]:

$$\left.\begin{matrix} X = -\gamma_w \dfrac{\partial H}{\partial x}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right\}, \qquad (1)$$

где: $\gamma_w$ - удельный вес жидкости;

$H$ - напорная функция, обусловленная уплотняющей поверхностной нагрузкой.

Точками здесь и далее обозначены остальные два уравнения, получаемые круговой перестановкой букв и индексов.

Напорная функция, обусловленная уплотняющей поверхностной нагрузкой, и поровое давление $p_w$ связаны зависимостью

$$H = \frac{p_w}{\gamma_w}. \qquad (2)$$

Тогда для объемных сил, учитывающих воздействие порового давления на грунт, из (1) с учетом (2) имеем

$$\left.\begin{matrix} X = -\dfrac{\partial p_w}{\partial x}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для линейно-деформируемой сплошной изотропной среды с объемными силами, учитывающими воздействие порового давления на грунт, выглядят [2]:

$$\left.\begin{matrix} S_c\left(\nabla^2 u + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\partial \varepsilon_o}{\partial x}\right) + S_o\left(\dfrac{\partial \varepsilon_o}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial p_w}{\partial x} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right\}, \qquad (4)$$

где: $\varepsilon_o = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; $\nabla^2(\ ) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$;

$S_c(p)$, $S_o(p)$ - операторы, имеющие вид:

$$S_c(p) = G(t)p(t) - \int_{t_0}^{t} p(\tau)G(\tau)R_c(t,\tau)d\tau;$$

$$S_o(p) = E_o(t)p(t) - \int_{t_0}^{t} p(\tau)E_o(\tau)R_o(t,\tau)d\tau;$$

$t_o$ - момент начала загружения; $G(t) = \dfrac{E(t)}{2[1+\mu(t,t)]}$;

$E_o(t) = \dfrac{E(t)}{3-6\mu(t,t)}$ - объемный мгновенный модуль упругости;

$R_c(t,\tau)$ и $R_o(t,\tau)$ - резольвенты ядер $K_c(t,\tau)$ и $K_o(t,\tau)$;

$K_c(t,\tau) = \dfrac{1+\nu(t,\tau)}{1+\mu(t,t)}K(t,\tau)$ - наследственное ядро для деформаций сдвига;

$K_o(t,\tau) = \dfrac{1-2\nu(t,\tau)}{1-2\mu(t,t)}K(t,\tau)$ - наследственное ядро для объемных деформаций;

$K(t,\tau)$ - ядро уравнения ползучести.

Предположим, что перемещения, тождественно равные перемещениям от объемных сил, учитывающих воздействие порового давления на грунт, вызваны воздействием вынужденных деформаций. В силу упрощающего предположения, что поровая жидкость сопротивляется только объемному деформированию, естественно считать, что и вынужденные деформации, учитывающие воздействие порового давления на грунт, представляют собой объемную деформацию, а тензор вынужденных деформаций является шаровым с компонентами $\varepsilon_в$.

В данном случае уравнения равновесия в перемещениях записываются в следующем виде [2]:

$$\left.\begin{array}{l} S_c\left(\nabla^2 u + \frac{1}{3}\cdot\frac{\partial\varepsilon_o}{\partial x}\right) + S_o\left(\frac{\partial\varepsilon_o}{\partial x} - 3\frac{\partial\varepsilon_в}{\partial x}\right) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Из (4) и (5) имеем

$$p_w = S_o(3\varepsilon_в)\,. \qquad (6)$$

В решенном относительно вынужденных деформаций виде данное выражение выглядит:

$$\varepsilon_в = L_o\left(\frac{p_w}{3}\right), \qquad (7)$$

где $L_o(\ )$ - оператор, имеющий вид:

$$L_o(p)=\frac{1}{E_o(t)}\left[p(t)+\int_{t_0}^{t}p(\tau)K_o(t,\tau)d\tau\right].$$

Решенная относительно напряжений неинвариантная во времени система линейно-наследственных уравнений ползучести при учете воздействия порового давления на грунт с помощью объемных сил выглядит следующим образом

$$\left.\begin{array}{c}\sigma_x^F=S_c\left(\dfrac{4\varepsilon_x-2\varepsilon_y-2\varepsilon_z}{3}\right)+S_o(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z);\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \tau_{xy}^F=S_c(\gamma_{xy});\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\qquad(8)$$

В случае учета воздействия порового давления на грунт с помощью вынужденных деформаций она выглядит:

$$\left.\begin{array}{c}\sigma_x^{\varepsilon_в}=S_c\left(\dfrac{4\varepsilon_x-2\varepsilon_y-2\varepsilon_z}{3}\right)+S_o(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z-3\varepsilon_в);\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \tau_{xy}^{\varepsilon_в}=S_c(\gamma_{xy});\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\qquad(9)$$

Тогда согласно (8) и (9) с учетом (7) напряжения от вынужденных деформаций связаны с напряжениями от объемных сил зависимостями

$$\left.\begin{array}{c}\sigma_x^{\varepsilon_в}=\sigma_x^F-S_o(3\varepsilon_в)=\sigma_x^F-p_w;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \tau_{xy}^{\varepsilon_в}=\tau_{xy}^F;\\ \dots\dots\dots\end{array}\right\}\qquad(10)$$

Очевидно, что $\sigma_x^F$, $\sigma_y^F$, $\sigma_z^F$ и $\tau_{xy}^F$, $\tau_{xz}^F$, $\tau_{zy}^F$ соответствуют полным напряжениям, а $\sigma_x^{\varepsilon_в}$, $\sigma_y^{\varepsilon_в}$, $\sigma_z^{\varepsilon_в}$ и $\tau_{xy}^{\varepsilon_в}$, $\tau_{xz}^{\varepsilon_в}$, $\tau_{zy}^{\varepsilon_в}$ - напряжениям в скелете грунта.

Согласно установленным в работе [3] условиям эквивалентности воздействий в механике деформируемого твердого тела действие объемных сил в общем случае можно заменить воздействием нормально приложенных к поверхности сил $P$ и шарового тензора вынужденных деформаций с компонентами $\varepsilon_в$, определяемых по зависимостям:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial x}=X;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \varepsilon_{в}}{\partial x}=-L_{o}\left(\dfrac{X}{3}\right);\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (12)$$

При этом перемещения от объемных сил и суммарного воздействия поверхностных сил и вынужденных деформаций тождественно равны, а напряжения связаны зависимостями

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{x}^{\varepsilon_{в}}=\sigma_{x}^{F}-\sigma_{x}^{P}+P;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \tau_{xy}^{\varepsilon_{в}}=\tau_{xy}^{F}-\tau_{xy}^{P};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (13)$$

С учетом (3) зависимости (11) - (13) выглядят следующим образом

$$P=-p_{w}; \qquad (14)$$

$$\varepsilon_{в}=L_{o}\left(\frac{p_{w}}{3}\right); \qquad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{x}^{\varepsilon_{в}}=\sigma_{x}^{F}-\sigma_{x}^{P}-p_{w};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \tau_{xy}^{\varepsilon_{в}}=\tau_{xy}^{F}-\tau_{xy}^{P};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (16)$$

Так как поровое давление $p_{w}$ на поверхности грунтового массива равно нулю, то поверхностная сила согласно (14) также равна нулю и зависимости (16) принимают вид

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{x}^{\varepsilon_{в}}=\sigma_{x}^{F}-p_{w};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \tau_{xy}^{\varepsilon_{в}}=\tau_{xy}^{F};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (17)$$

Отсюда видно, что действие объемных сил, учитывающих воздействие порового давления на грунт, можно заменить воздействием только вынужденных деформаций, определяемых по зависимости (7) или (15), а напряжения при этом связаны зависимостями (10) или (17).

Таким образом, воздействие порового давления на грунт можно рассматривается как действие объемных сил по известной расчетной модели объемных сил (модели Флорина-Био) или как воздействие вынужденных деформаций по разработанной выше расчетной модели, которую по аналогии назовем расчетной моделью вынужденных деформаций.

Мы также показали, что эти две расчетные модели полностью согласуются с установленными ранее в механике деформируемого твердого тела общими условиями эквивалентности воздействий [3].

Рассмотрим случай, когда грунтовая среда подчиняется условиям квазиупругопластичного материала – объемные деформации можно считать чисто упругими, т.е. без наследственной части. При этом

$$1-2\nu(t,\tau)=0;\quad \nu(t,\tau)=0{,}5$$

и, согласно условиям эквивалентности воздействий для несжимаемого материала [3], вынужденные деформации должны тождественно равняться нулю.

Такому случаю соответствует в частности мгновенное напряженно-деформированное состояние грунта, возникающее вслед за приложением внешних нагрузок, при идеально несжимаемой внутрипоровой жидкости.

Тогда зависимости (10) или (17) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x^F = p_w; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\tau_{xy}^F = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Таким образом, в случае квазиупругопластичности грунтовой среды, в частности при $t=0$ и идеально несжимаемой внутрипоровой жидкости, полные нормальные напряжения равны поровому давлению, а нормальные напряжениям в скелете грунта и все касательные напряжения равны нулю.

Для среды с неизменяющимися свойствами все зависимости инвариантны во времени и характеристики среды, зависящие от двух переменных $t$ и $\tau$, превращаются в функции разности этих двух переменных $t-\tau$, а функции $t$ превращаются в постоянные величины.

В этом случае и с учетом различной сопротивляемости скелета грунта всестороннему сжатию (уплотняющие нагрузки) и всестороннему растяжению (под действием порового давления) уравнения (4) и (5) записываются в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &S_c\left(\nabla^2 u+\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial\varepsilon_o}{\partial x}\right)+S_o^y\left(\frac{\partial\varepsilon_o}{\partial x}\right)=\frac{1}{\beta}\frac{\partial p_w}{\partial x}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

где: $S_c(\rho)$, $S_o^y(\rho)$ - операторы, имеющие вид:

$$S_c(p) = G\left[ p(t) - \int_0^t p(\tau) R_c(t-\tau) d\tau \right];$$

$$S_o^y(p) = E_o^y\left[ p(t) - \int_0^t p(\tau) R_o(t-\tau) d\tau \right];$$

$\beta = \dfrac{E_o^y}{E_o^p}$ - отношение модуля объемной деформации уплотнения к модулю объемной деформации разуплотнения.

Тогда уравнения (8) и (9) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x^F = S_c\left(\frac{4\varepsilon_x - 2\varepsilon_y - 2\varepsilon_z}{3}\right) + S_o^y(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) p_w; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\tau_{xy}^F = S_c(\gamma_{xy}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x^{\varepsilon_в} = S_c\left(\frac{4\varepsilon_x - 2\varepsilon_y - 2\varepsilon_z}{3}\right) + S_o^y(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{1}{\beta} p_w; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\tau_{xy}^{\varepsilon_в} = S_c(\gamma_{xy}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Согласно экспериментальным данным С. Р. Месчяна для многих грунтов при уплотняющих давлениях до 3 *кг/см*$^2$ соблюдается постоянство во времени коэффициента Пуассона, т. е. $\nu(t-\tau) = \mu(0) = \mu = const$, и для ядер выполняется условие $K_c(t-\tau) = K_o(t-\tau) = K(t-\tau)$, следовательно, будут равны и их резольвенты:

$$R_c(t-\tau) = R_o(t-\tau) = R(t-\tau).$$

При этом операторы $S_o$ и $S_c$ будут отличаться друг от друга лишь множителем

$$S_o = \frac{E_o}{G} S_c = \frac{2+2\mu}{3-6\mu} S_c. \quad (22)$$

Операторы $S_o(p)$ и $S_c(p)$ имеют вид:

$$S_o(p) = E_o\left[ p(t) - \int_o^t p(\tau) R(t-\tau) d\tau \right];$$

$$S_c(p)=G\left[p(t)-\int_0^t p(\tau)R(t-\tau)d\tau\right].$$

Учитывая эти обстоятельства дифференциальные уравнения равновесия (4) и (5) принимают вид:

$$\left.\begin{array}{l} S_c\left(\nabla^2 u+\dfrac{1}{1-2\mu}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon_o}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial p_w}{\partial x}=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (23)$$

и, перейдя к оператору $L_c$, обратному $S_c$:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 u+\dfrac{1}{1-2\mu}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon_o}{\partial x}-L_c\left(\dfrac{\partial p_w}{\partial x}\right)=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Оператор $L_c(\ )$ имеет вид:

$$L_c(p)=\frac{1}{G}\left[p(t)+\int_0^t p(\tau)K(t-\tau)d\tau\right].$$

Тогда уравнения деформирования (8) и (9) принимают вид:

$$\left.\begin{array}{c} E\varepsilon_x=L(\sigma_x^F)-\mu L(\sigma_y^F+\sigma_z^F); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G\gamma_{xy}=L(\tau_{xy}^F); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (25)$$

$$\left.\begin{array}{c} E\varepsilon_x=E\varepsilon_в+L(\sigma_x^{\varepsilon_в})-\mu L(\sigma_y^{\varepsilon_в}+\sigma_z^{\varepsilon_в}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G\gamma_{xy}=L(\tau_{xy}^{\varepsilon_в}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (26)$$

где $L(\ )$ - оператор, имеющий вид:

$$L(\sigma)=\sigma(t)+\int_0^t \sigma(\tau)K(t-\tau)d\tau.$$

В случае постоянства во времени коэффициента Пуассона, согласно упругой аналогии [4], полные напряжения с учетом ползучести $\sigma_x^F$, $\sigma_y^F$, $\sigma_z^F$ и $\tau_{xy}^F$, $\tau_{xz}^F$, $\tau_{zy}^F$ тождественно совпадают с напряжениями упругомгновенной задачи, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^F &= \sigma_x^y; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_{xy}^F &= \tau_{xy}^y; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}, \tag{27}$$

а перемещения связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} u &= L(u^y); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Система из трех дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях содержит четыре неизвестные функции $u$; $v$; $w$ и $p_w$. В качестве четвертого недостающего уравнения принимаем соотношение, описывающее движение жидкости в деформируемой пористой среде [5]:

$$\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial t} = \frac{k_\phi}{\gamma_w} \nabla^2 p_w - \frac{3n_{cp}}{\alpha_w} \cdot \frac{\partial p_w}{\partial t}, \tag{29}$$

где: $k_\phi$ - коэффициент фильтрации;
$n$ - пористость;
$\alpha_w$ - модуль объемной сжимаемости жидкости;
$\gamma_w$ - удельный вес жидкости.

В случае, когда поровая жидкость является несжимаемой $(\alpha_w \to \infty)$, уравнение (29) приобретает простейший вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial t} = \frac{k_\phi}{\gamma_w} \nabla^2 p_w. \tag{30}$$

Таким образом, оценка воздействия порового давления на грунт сводится к нахождению решения системы четырех уравнений, включающей три дифференциальных уравнения равновесия в перемещениях и соотношение, описывающее движение жидкости в деформируемой пористой среде.

При этом следует учесть граничные условия, в том числе и для напоров.

**Библиографический список:**

1. Флорин В. А. Основы механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1959. - Т. I.
2. Агаханов Г. Э. О математическом моделировании физических воздействий в грунтах // Научное обозрение. - М., 2014. - № 12. – Часть 3.
3. Агаханов Э. К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки – Махачкала, 2013. - № 29 (2) С 39-45 стр.
4. Хесин Г. Л. Метод фотоупругости. - М.: Стройиздат, 1975. - Т. 3.
5. Цытович Н. А., Зарецкий Ю. К., Малышев М. В., Абелев М. Ю., Тер-Мартиросян З. Г. Прогноз скорости осадок оснований сооружений. - М.: Стройиздат, 1967.