

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 539.3

DOI: 10.21822/2073-6185-2023-50-4-191-196



Оригинальная статья /Original article

**Устойчивость сжато-растянутого стержня переменного сечения
при комбинированном нагружении**

Х.П. Культербаев¹, М.М. Пайзулаев²

¹Северо-Кавказский федеральный университет,

¹355017, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1, Россия,

²Дагестанский государственный технический университет,

²367026, г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является определение устойчивости прямолинейного стержня переменного сечения при комбинированном осевом нагружении. **Метод.** Продольный изгиб стержня описывается классической теорией с применением гипотезы Бернулли, а критические силы определяются из задачи Эйлера при соответствующих допущениях. **Результат.** Предложен алгоритм численного метода решения проблемы определения собственных значений дифференциального уравнения продольного изгиба стержня. Внешние нагрузки считаются «мёртвыми». Функции изменения переменной площади поперечного сечения, переменной жёсткости и распределённой нагрузки считаются заданными. Изогнутая ось стержня после бифуркации описывается с помощью линейного обыкновенного дифференциального уравнения. **Вывод.** Реализация численного метода проведена методом конечных разностей с использованием численных методов и современных программных компьютерных средств.

Ключевые слова: критические нагрузки и силы, прямолинейный стержень переменного сечения, сжато-растянутый стержень, неравномерно распределённая и переменная распределённая нагрузка, численные методы, программные компьютерные средства, линейно-упругий материал, система сосредоточенных сил, функции изменения переменной площади поперечного сечения, переменная жёсткость, гипотеза Бернулли

Для цитирования: Х.П. Культербаев, М.М. Пайзулаев. Устойчивость сжато-растянутого стержня переменного сечения при комбинированном нагружении. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023; 50(4): 191-196. DOI: 10.21822/2073-6185-2023-50-4-191-196

Stability of a compressed-tensioned rod of variable cross-section with combined loading

H.P. Kulterbaev¹, M.M. Paizulaev²

¹North Caucasus Federal University,

¹1 Pushkina St., Stavropol 355017, Russia,

²Daghestan State Technical University,

²70 I.Shamil Ave., Makhachkala 367026, Russia

Abstract. Objective. The purpose of the study is to determine the stability of a straight rod of variable cross-section under combined axial loading. **Method.** The longitudinal bending of the rod is described by the classical theory using Bernoulli's hypothesis, and the critical forces are determined from the Euler problem with appropriate assumptions. **Result.** An algorithm for a numerical method for solving the problem of determining the eigenvalues of the differential equation for longitudinal bending of a rod is proposed. External loads are considered “dead”. The functions of changing the variable cross-sectional area, variable stiffness and distributed load are considered given. The curved axis of the rod after bifurcation is described using a linear ordinary differential equation. **Conclusion.** The implementation of the numerical method was carried out

by the finite difference method using numerical methods and modern computer software.

Keywords: critical loads and forces, straight rod of variable cross-section, compressed-tensioned rod, unevenly distributed and variable distributed load, numerical methods, computer software, linear elastic material, system of concentrated forces, functions of changing variable cross-sectional area, variable stiffness, Bernoulli's hypothesis

For citation: H.P. Kulterbaev, M.M. Paizulaev. Stability of a compressed-tensioned rod of variable cross-section with combined loading. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2023; 50(4): 191-196. DOI: 10.21822/2073-6185-2023-50-4-191-196

Введение. Определение критических нагрузок для сжато-растянутых стержней сопряжено со значительными трудностями в нетрадиционных случаях: стержни переменного сечения, неравномерно распределённая нагрузка, сочетание различных нагрузок (сжимающих, растягивающих) и т. д. [1, 9-15]. Отыскание собственных значений и форм в таких задачах точными аналитическими методами возможно лишь в простейших частных случаях. Выход из такого затруднения состоит в применении численных методов [2-8] и компьютерных программ.

Постановка задачи. Рассмотрим однородный стержень переменного сечения из линейно-упругого материала, находящийся под действием переменной распределённой нагрузки $q(x)$ и системы сосредоточенных сил P_i (рис. 1, показаны только две силы из возможных n), действующих вдоль оси. Внешние нагрузки считаются «мёртвыми», т. е. при деформировании стержня они не изменяются ни по величине, ни по направлению.

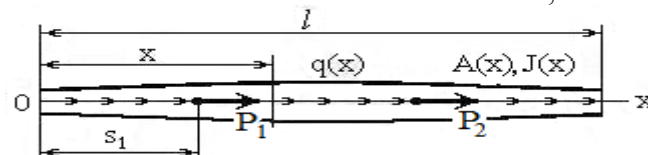


Рис. 1. Однородный стержень переменного сечения

Fig. 1. Homogeneous rod of variable cross-section

Функции изменения переменной площади поперечного сечения $S(x)$, переменной жёсткости $EJ(x)$ и распределённой нагрузки $q(x)$ будем считать заданными.

Методы исследования. В задаче о потере устойчивости прямолинейной формы равновесия примем, что продольный изгиб стержня описывается классической теорией с применением гипотезы Бернулли, а критические силы определяются из задачи Эйлера при соответствующих допущениях. Тогда изогнутая ось стержня после бифуркации описывается с помощью линейного обыкновенного дифференциального уравнения и в традиционных

обозначениях имеет вид $B(x)v''(x) = M(x)$, $x \in l$, (1)

где введено обозначение для переменной жёсткости на изгиб $B(x) = EJ(x)$.

Изгибающий момент в правой части уравнения (1) определяется из условия равновесия левой части стержня, отсечённой координатой x . Например, если левый конец свободен (рис. 2).

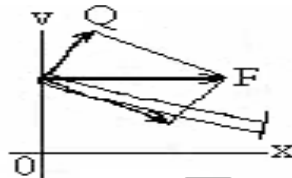


Рис. 2. Поперечная сила

Fig.2. Lateral force

$$M(x) = -\sum P_j[v(x) - v(s_j)] - \int_0^x q(\xi)[v(x) - v(\xi)]d\xi. \quad (2)$$

При учёте (2) уравнение (1) становится интегро-дифференциальным

$$B(x)v''(x) + \sum_{j=1}^k P_j[v(x) - v(s_j)] + \int_0^x q(\xi)[v(x) - v(\xi)]d\xi = 0, \quad x \in l. \quad (3)$$

Для его решения к нему необходимо присоединять граничные условия, которые могут быть самыми разнообразными в зависимости от типа опор. Учёт их работы для обычных случаев влечёт появление четырёх дополнительных условий к уравнению (3) и, следовательно, увеличение порядка производных до четырёх. Тогда целесообразно перейти к дифференциальному уравнению соответствующего порядка. Такой результат достигается после двукратного дифференцирования по переменной x уравнения (3), в результате чего оно примет вид

$$[B(x)v''(x)]'' + N(x)v''(x) = 0, \quad x \in l, \quad (4)$$

где введено обозначение для продольной сжимающей силы

$$N(x) = \sum_{j=1}^k P_j + \int_0^x q(\xi) d\xi.$$

Уравнение (4) имеет очевидное тривиальное решение $v(x) \equiv 0$, что соответствует прямолинейному равновесному положению стержня, т.е. обычному простому сжатию. Такой случай не является предметом интереса данного исследования. Поэтому далее задача будет состоять в том, чтобы найти такой вектор параметров нагрузок, которому могут соответствовать ненулевые решения, т.е. искривлённые положения равновесия.

Вычисление собственных значений и функций дифференциального уравнения (4) аналитическими методами возможно лишь в простейших задачах, где, например, $B(x) = \text{const}$, $q(x) = \text{const}$, отсутствуют сочетания нагрузок, и они хорошо изучены.

Отыскание аналитических решений более сложных задач сопряжено со значительными математическими трудностями или в большинстве случаев невозможно.

Выход из такого затруднения состоит в использовании численных методов. Поэтому далее воспользуемся методом конечных разностей [1] и разобьём длину стержня на n одинаковых отрезков с шагом $h = l/n$, с номерами узловых точек $i = 1, 2, \dots, n, n+1$.

Вместо непрерывной функции непрерывного аргумента $v(x)$ введём сеточную функцию $y_i \approx v(x_i)$, $x_i = (i-1)h$. Тогда производные в уравнении (4) можно представлять приближённо в виде конечноразностных соотношений

$$v'(x_i) \approx (y_{i+1} - y_{i-1})/2h, \quad v''(x_i) \approx (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2,$$

в силу чего оно примет вид

$$c_{i,i-2}y_{i-2} + c_{i,i-1}y_{i-1} + c_{i,i}y_i + c_{i,i+1}y_{i+1} + c_{i,i+2}y_{i+2} = 0, \quad i = 3, 4, \dots, n-1. \quad (5)$$

При этом к левой части (1) процедура замены второй производной конечноразностным соотношением применена дважды. Коэффициенты уравнения имеют значения

$$c_{i,i-2} = B_{i-1}, \quad c_{i,i-1} = -2(B_{i-1} + B_i) + N_i h^2, \quad c_{i,i} = B_{i-1} + 4B_i + B_{i+1} - 2N_i h^2, \\ c_{i,i+1} = -2(B_i + B_{i+1}) + N_i h^2, \quad c_{i,i+2} = B_{i+1}, \quad i = 3, 4, \dots, n-1.$$

Здесь $N_i = N(x_i)$. Система уравнений (5) недоопределённая, её матрица коэффициентов пока является прямоугольной размерности $(n-3) \times (n+1)$. Недостающие четыре уравнения могут быть найдены лишь из граничных условий, в силу чего их необходимо конкретизировать. Примем, что левый конец ($x = 0$) свободен, и к нему приложена сила P .

1) Изгибающий момент равен нулю. Поэтому

$$M(0) = 0 \Rightarrow B(0)v''(0) = 0 \Rightarrow \\ v''(0) = \frac{2y_1 - 5y_2 + 4y_3 - y_4}{h^2} = 0 \Rightarrow 2y_1 - 5y_2 + 4y_3 - y_4 = 0 \quad (6)$$

2) Поперечная сила определяется с помощью функции прогибов

$$Q(0) = [B(0)v''(0)]' \quad (7)$$

и из рис. 2 с учётом малости угла поворота концевого сечения

$$Q(0) = -Pv'(0). \quad (8)$$

Приравняв правые части (7) и (8), получим $[B(0)v''(0)]' = -Pv'(0)$.

Конечно-разностная аппроксимация производных даёт уравнение

$$c_{21}Y_1 + c_{22}Y_2 + c_{23}Y_3 + c_{24}Y_4 + c_{25}Y_5 = 0, \quad (9)$$

где, $b = -3B_1 + 4B_2 - B_3$, $c_{21} = 2b - 5B_1 - 3Ph^2$, $c_{22} = -5b + 18B_1 + PFh^2$, $c_{23} = 4b - 24B_1 - Ph^2$, $c_{24} = -b + 14B_1$, $c_{25} = -3B_1$.

Правый конец ($x = l$) зашлеплен, поэтому угол поворота и перемещение равны нулю

$$3) v'(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2h}(y_{n-1} - 4y_n + 3y_{n+1}) = 0 \Rightarrow y_{n-1} - 4y_n + 3y_{n+1} = 0. \quad (10)$$

$$4) v(l) = 0 \Rightarrow y_{n+1} = 0 \quad (11)$$

Уравнения (5), (6), (9)-(11) образуют линейную однородную алгебраическую систему $Cy = 0$, (12)

где $y = \{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}$ – вектор, компонентами которого являются отклонения стержня, C – квадратная матрица порядка $n + 1$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & -1 & & & & & & & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & & & & & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & & & & & & \\ & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & c_{n-1,n-3} & c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} & c_{n-1,n+1} \\ & & & & & & & & 1 & -4 & 3 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевые элементы матрицы здесь не выписаны. Критические значения параметров нагрузок, т.е. собственные значения, определяются из уравнения, которое является условием существования нетривиального решения уравнения (12).

$$\det(C) = 0, \quad (13)$$

Его решение аналитическими методами невозможно, вследствие чего приходится прибегать к приближенным решениям с помощью численных и графических методов.

Обсуждение результатов. Использование численных методов приводит к громоздким компьютерным программам и реализуется с большими затруднениями.

Более предпочтительным является графический метод, основанный на возможностях быстрой визуализации графика левой части уравнения (12) с помощью современных программных сред высокого уровня (Matlab, MathCad и т.д.).

С этой целью в координатной системе $P - \det(C)$ строится на экране монитора соответствующая кривая. Точки пересечения ею оси P и определяют значения критических сил. При этом возможность увеличения избранных фрагментов рисунка легко позволяет достигать высокой степени точности, что отличает компьютерный графический способ от обычного ручного способа, обладающего невысокой точностью.

Для проверки достоверности результатов, полученных предлагаемым алгоритмом, проведено тестирование на примере консольного стержня постоянного сечения с входными данными: $l = \pi/2$, $E = 1$, $J = 1$.

При этом получена ожидаемая первая критическая сила $P_k = 1$ с высокой степенью точности, что позволяет уверенно переходить к задачам более общего характера.

Рассмотрим стальной стержень (рис. 3) со свободным и зашлепленным концами, имеющий поперечное сечение с переменным моментом инерции $J(x) = 30(1 + 19x/l)$ см⁴.

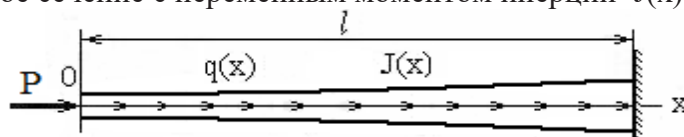


Рис. 3. Стальной стержень со свободным и зашлепленным концами

Fig. 3. Steel rod with free and clamped ends

К стержню приложена сосредоточенная сила P и неравномерно распределенная нагрузка $q(x) = \frac{P}{l}(l - x)$ Н/м, ассоциированная с сосредоточенной силой так, что будет

отыскиваться критическое значение только одного параметра F . Прочие исходные данные примем следующими: $l = 3$ м, $E = 200$ ГПа. Результат счёта, выданный на экран монитора, показан на рис. 4 в виде графика. Первые элементы спектра собственных значений $P_k = \{166,7 \quad 788,0\}$ кН.

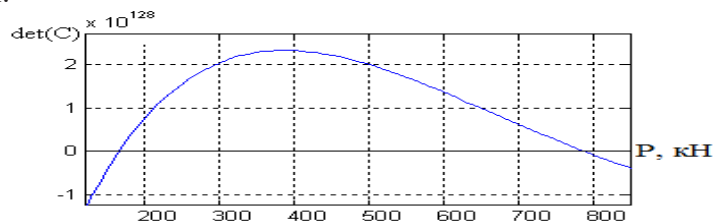


Рис. 4. Результат счёта, выданный на экран монитора

Fig.4. The counting result displayed on the monitor screen

Вывод. Резюмируя, можно отметить, что получить этот результат аналитическими методами было бы весьма затруднительно. Между тем, имеется сравнительно простой и универсальный способ определения критических сил, влияющих на устойчивость сжаторастянутого стержня переменного сечения при комбинированном нагружении, основанный на возможностях современной вычислительной техники.

Предложен эффективный метод определения собственных значений и форм стержня переменного сечения. Предложен алгоритм численного метода решения проблемы определения собственных значений дифференциального уравнения продольного изгиба стержня. Реализация численного метода проведена методом конечных разностей с использованием численных методов и современных программных компьютерных средств.

Библиографический список:

1. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. –М.: Стройиздат, 1981.-436 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.- 432 с.
3. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2005. -425 с.
4. Барагунова Л.А. Определение критической силы сжатого стержня методом конечных разностей. Нальчик: Вестник Кабардино-Балкарского государственного университета. 2000. С. 13.
5. Kulterbaev K., Lafisheva M., Baragunova L. (2022). Solving the Euler Problem for a Flexible Support Rod Base on the Finite Difference Method. In: Tchernykh, A., Alikhanov, A., Babenko, M., Samoylenko, I. (eds) Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham.
6. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Lafisheva M.M. Calculation of a beam on elastic base analytical and numerical methods //Structural mechanics and structures. 2022. №4(35). Pp.16-23. (in Russ.) DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.002
7. Kulterbaev, K.P., Lafisheva, M.M. (2022). Non-classical Methods of Determination Critical Forces of Compressed Rods. In: Tchernykh, A., Alikhanov, A., Babenko, M., Samoylenko, I. (eds) Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-97020-8_9. pp 91–1021.
8. Kulterbaev, K., Lafisheva, M., Baragunova, L. Solving the Euler Problem for a Flexible Support Rod Base on the Finite Difference Method. In: Tchernykh, A., Alikhanov, A., Babenko, M., Samoylenko, I. (eds) Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-97020-8_13. 2022;143–151.
9. Культербаев Х.П., Абдул Салам И.М., Пайзулаев М.М. Свободные продольные колебания вертикального стержня с дискретными массами при наличии сил демпфирования // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018; 45(3): 8-17. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17
10. Каган-Розенцвейг Л.М. О влиянии деформаций сдвига на устойчивость стержня переменного сечения. // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 6 (77). С. 137-142.
11. Лампси Б.Б., Хазов П.А., Кириллова Н.А. Устойчивость центрально сжатого стержня переменного сечения // Вестник Волжского регионального отделения Российской академии архитектуры и строительных наук. 2018. № 21. С. 139-142.
12. Богданович А.У., Абдюшев А.А. Устойчивость стержня переменного эллиптического сечения при продольном сжатии // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2006. № 2 (6). С. 38-41.

13. Радин В.П., Чирков В.П., Позняк Е.В., Новикова О.В. Устойчивость стержня с упругим шарниром при нагружении распределенной неконсервативной нагрузкой // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2023. № 5 (758). С. 3-13.
14. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость консольного стержня под действием давления на его поверхности и продольной силы // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 4. С. 77-88.
15. Тарасов В.Н. Влияние поперечной нагрузки на устойчивость сжимаемого продольной силой стержня // Известия Коми научного центра УрО РАН. 2023. № 4 (62). С. 18-22.

References

1. Karamansky T.D. Numerical methods of structural mechanics. M.: Stroyizdat, 1981;436. (In Russ)
2. Samarsky A.A., Gulin A.V. Numerical methods. M.: Nauka, 1989; 432. (In Russ)
3. Ilyin V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M. Numerical methods for solving problems of structural mechanics. – M.: Publishing house ASV; St. Petersburg: SPbGASU, 2005; 425. (In Russ)
4. Baragunova L.A. Determination of the critical force of a compressed rod by the finite difference method. Nalchik: Bulletin of Kabardino-Balkarian State University. 2000; 13. (In Russ)
5. Kulterbaev K., Lafisheva M., Baragunova L. (2022). Solving the Euler Problem for a Flexible Support Rod Base on the Finite Difference Method. In: Tchernykh, A., Alikhanov, A., Babenko, M., Samoylenko, I. (eds) Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham.
6. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Lafisheva M.M. Calculation of a beam on elastic base analytical and numerical methods. *Structural mechanics and structures*. 2022;4(35):16-23. (In Russ) DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.002
7. Kulterbaev, K.P., Lafisheva, M.M. (2022). Non-classical Methods of Determination Critical Forces of Compressed Rods. In: Tchernykh, A., Alikhanov, A., Babenko, M., Samoylenko, I. (eds) Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-97020-8_9. 2021; 91–1021.
8. Kulterbaev, K., Lafisheva, M., Baragunova, L. (2022). Solving the Euler Problem for a Flexible Support Rod Base on the Finite Difference Method. In: Tchernykh, A., Alikhanov, A., Babenko, M., Samoylenko, I. (eds) Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-97020-8_13. 2021;143–151.
9. Kulterbaev Kh.P., Abdul Salam I.M., Paizulaev M.M. Free longitudinal vibrations of a vertical rod with discrete masses in the presence of damping forces. *Herald of the Daghestan State Technical University. Technical science*. 2018; 45(3): 8-17. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17(In Russ)
10. Kagan-Rosenzweig L.M. On the influence of shear deformations on the stability of a rod of variable cross-section. *Bulletin of Civil Engineers*. 2019; 6 (77): 137-142. (In Russ)
11. Lampsey B.B., Khazov P.A., Kirillova N.A. Stability of a centrally compressed rod of variable cross-section. *Bulletin of the Volga Regional Branch of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences*. 2018; 21:139-142. (In Russ)
12. Bogdanovich A.U., Abdyushev A.A. Stability of a rod of variable elliptical cross-section under longitudinal compression. *News of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering*. 2006; 2 (6): 38-41.
13. Radin V.P., Chirkov V.P., Poznyak E.V., Novikova O.V. Stability of a rod with an elastic hinge under loading with a distributed non-conservative load. *News of higher educational institutions. Mechanical engineering*. 2023; 5 (758): 3-13. (In Russ)
14. Ilgamov M.A. Bending and stability of a cantilever rod under the influence of pressure on its surface and longitudinal force. *Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids*. 2021;4:77-88.(In Russ)
15. Tarasov V.N. The influence of transverse load on the stability of a rod compressed by longitudinal force. *News of the Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*. 2023; 4 (62): 18-22. (In Russ)

Сведения об авторах:

Культербаев Хусен Пшимурзович, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, kulthp@mail.ru;

Пайзулаев Магомед Муртазалиевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивления материалов, теоретической и строительной механики, smdstu@mail.ru.

Information about authors:

Husen P. Kulterbaev, Dr. Sci. (Eng), Prof., Leading Researcher, kulthp@mail.ru;

Magomed M. Payzulaev, Cand. Sci. (Eng), Assoc. Prof., Head of the Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics, smdstu@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 10.11.2023.

Одобрена после рецензирования / Reviced 30.11.2023.

Принята в печать /Accepted for publication 30.11.2023.