

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ**  
**INFORMATION TECHNOLOGY AND TELECOMMUNICATIONS**

УДК 517.9:621.3



DOI: 10.21822/2073-6185-2023-50-3-124-131

Оригинальная статья /Original article

**Коррекция оптимального регулятора на основе решения обратной задачи  
оптимальной стабилизации с векторным управлением**

**В.В. Никулин, П.А. Мишин, П.А. Мишина**

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,  
430005, г. Саранск, ул. Большевикская, строение 68, Россия

**Резюме. Цель.** Задача о проектировании регуляторов, которые реализуют заданное программное движение объекта управления и задача определения движения динамической системы – две основные задачи в классической теории управления. В статье рассматривается решение прямой и обратной задач оптимальной стабилизации. Вектор состояния принимается доступным для измерения полностью. **Метод.** Опираясь на соотношение оптимальности, связывающее весовые коэффициенты квадратичного функционала качества и оптимальную матрицу усиления, на которую замыкается объект управления, предлагается использовать численный метод определения матриц функционала. Для исследования использовались математические модели автономных полностью управляемых объектов, формирование которых осуществлялось случайным образом, в частности, по нормальному закону распределения. **Результат.** Первоначальный этап решения связан с модальным синтезом, результатом которого является пропорциональный регулятор, обеспечивающий стабилизацию объекта управления по расположению полюсов синтезированной системы. Затем, определены весовые коэффициенты функционала путем численного решения соотношения оптимальности. Заключительным этапом является решение прямой задачи оптимальной стабилизации, в основе которого лежит вариационная задача Лагранжа. В результате вычисляется оптимальный регулятор, который при включении в замкнутую систему вместо модального позволяет уменьшить длительность переходного процесса. **Вывод.** Авторский подход позволяет минимизировать в определенной степени переходные процессы скорректированной системы управления.

**Ключевые слова:** автономный объект управления, оптимальная стабилизация, квадратичный функционал, модальное управление, оптимальный регулятор, соотношение оптимальности.

**Для цитирования:** В.В. Никулин, П.А. Мишин, П.А. Мишина. Коррекция оптимального регулятора на основе решения обратной задачи оптимальной стабилизации с векторным управлением. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023; 50(3):124-131. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-3-124-131

**Correction of the optimal regulator based on solving the inverse problem  
of optimal stabilization with vector control**

**V.V. Nikulin, P.A. Mishin, P.A. Mishina**

National Research Mordovia State University,  
68 building Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia

**Abstract. Objective.** The problem of designing controllers that implement a given programmed movement of a controlled object and the problem of determining the movement of a dynamic system are two main problems in classical control theory. This article discusses the solution of direct and inverse optimal stabilization problems. The state vector is assumed to be completely available for measurement. **Method.** Based on the optimality ratio linking the weight coefficients of the quadratic quality functional and the optimal gain matrix, which closes the control object, it is

proposed to use a numerical method for determining the functional matrices. Mathematical models of autonomous fully controlled objects were used for the study, the formation of which was carried out randomly, in particular, according to the normal distribution law. **Result.** The initial stage of the solution is associated with modal synthesis, the result of which is a proportional regulator that provides stabilization of the control object by the location of the poles of the synthesized system. The next step is to determine the weighting coefficients of the functional by numerically solving the optimality ratio. The final stage is the solution of the direct optimal stabilization problem, which is based on the Lagrange variational problem. As a result, the optimal regulator is calculated, which, when switched on in a closed system instead of a modal one, reduces the duration of the transient process. **Conclusion.** The proposed approach of the authors allows minimizing to a certain extent the transients of the adjusted control system.

**Keywords:** autonomous control object, optimal stabilization, quadratic functional, modal control, optimal controller, optimality ratio.

**For citation:** V.V.Nikulin, P.A. Mishin, P.A. Mishina. Correction of the optimal regulator based on solving the inverse problem of optimal stabilization with vector control. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Science. 2023; 50(3):124-131. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-3-124-131

**Введение.** Решение задач оптимального управления постоянно совершенствуется, и осуществляется поиск новых решений, позволяющих упростить соответствующую задачу в плане вычислений и проектных реализаций.

**Постановка задачи.** В соответствии с этим авторами затрагиваются вопросы разработки инженерной методики коррекции переходных процессов в синтезированных системах автоматического управления. Как известно, оптимальное стабилизирующее управление определяется коэффициентами квадратичного функционала качества (quadratic quality functional), вычисление которых связано непосредственно с решением нелинейного матричного уравнения Риккати (nonlinear matrix Riccati equation) [1]. Этот подход применялся в работах при решении прямой задачи оптимальной стабилизации с векторным [2, 3] и со скалярным управлением [4].

**Методы исследования.** Для решения поставленной задачи авторы предлагают опираться на соотношение оптимальности [5, 6]. Приведенное название «соотношение оптимальности» относится к задаче о линейно-квадратичном регуляторе (задаче оптимальной стабилизации) с квадратичным функционалом качества и линейной стационарной системе дифференциальных уравнений. Значимость данного соотношения заключается в том, что оно связывает между собой матрицы объекта управления (ОУ), матрицу оптимального регулятора и весовые коэффициенты функционала качества.

Математическая постановка линейно-квадратичной задачи управления (linear-quadratic control problem) предполагает, что весовые коэффициенты функционала уже известны. Решение обратной задачи оптимальной стабилизации базируется на знании модального регулятора (управления) и заключается в вычислении данных коэффициентов, путем решения соотношения оптимальности с помощью численных методов [7–9] при условии, что вектор состояния ОУ полностью доступен для измерения.

Решение данной проблемы позволяет уменьшить время переходных процессов (transition process). Математическая модель автономного ОУ описывается следующими уравнениями состояния и выхода

$$dX(t)/dt = AX(t) + BU(t), \quad (1)$$

$$Y(t) = CX(t). \quad (2)$$

где  $X(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния объекта управления,  $r > 1$  – векторное управляющее входное воздействие размера  $r > 1$  ( $r > 1$ ),  $n \times r$  – постоянная числовая матрица (матрица состояния) размера  $n \times r$ ,  $n \times r$  – постоянная числовая матрица (матрица входа)

размера  $n \times r$ ,  $Y$  –  $m$ -мерный вектор выхода,  $m \times n$  – постоянная числовая матрица (матрица выхода) размера  $m \times n$ .

Для системы (1–2) необходимо, чтобы выполнялось условие полной управляемости по Калману [10] с целью дальнейшего применения методов стабилизации

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n,$$

где  $B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B$  – матрица управляемости (controllability matrix).

В задаче стабилизации критерий качества задан в виде квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} [X^T Q X + U^T R U] dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $Q$  – весовая неотрицательно определенная матрица размера  $n \times n$ ,  $R$  – весовая положительно определенная матрица размера  $r \times r$ ,  $T$  – символ транспонирования.

Задача (1; 3) базируется на решении матричного нелинейного алгебраического уравнения Риккати [1], решение которого позволяет определить оптимальную матрицу усиления (матрицу оптимального регулятора)  $K_p$ , на которую замыкается ОУ (1). Известно, что данная задача может быть сведена к решению линейных матричных неравенств, что упрощает процедуру поиска решений [11]. Однако первый подход, по мнению авторов, является инженерным более понятным и решение более упрощено с получением необходимого результата.

Замкнутая система (синтезированная система) с приложенным к ней входным воздействием (управлением) будет иметь следующий вид

$$dX(t)/dt = (A - BK_p)X(t) + BU(t), \quad (4)$$

где  $(A - BK_m)$  – гурвицева матрица.

При включении в систему модального регулятора вместо оптимальной синтезированной системы будет иметь аналогичную структуру, как и (4), лишь с заменой  $K_p$  на  $K_m$

В то же время собственные числа матрицы  $(A - BK_m)$  (матрицы состояния) системы типа (4) должны быть равны заданным предварительно (выбранным проектировщиком) до начала синтеза. В таком случае необходимо для замкнутой системы решать задачу по расположению полюсов [12, 13].

Приведем выражение соотношения оптимальности, которое применяется в задачах стабилизации с векторным управлением:

$$R = B^T S^T Q S B + (E + B^T S^T K^T) R (E + K S B), \quad (5)$$

где  $K = K_p$ ,  $S = (A - BK_p)^{-1}$ ,  $E$  – единичная квадратная матрица, размерность которой соответствует размерности входного управления  $A$ .

Вычисление матрицы  $A$  целесообразно производить с помощью псевдообращения, например, использовать матрицу Мура-Пенроуза [14, 15]. В случае, когда матрицы плохо обусловленные, использование в расчетах псевдообратной матрицы позволяет защититься от непредвиденных результатов.

**Обсуждение результатов.** Для проведения эксперимента авторами была выбрана система MATLAB, в которой функции *place*, *fsolve*, *reshape*, *poly*, *eig* и *pinv* включены с начала 2000-х годов. С выходом версии MATLAB R2021b функции *pinv* и *eig* были улучшены. Первоначальный этап решения связан с определением модального управления. Для систем с несколькими входами и выходами (MIMO – Multiple Input Multiple Output) синтез модального регулятора осуществляет функция *place*, входными параметрами которой являются матрицы  $A$  и  $Q$ , а также вектор полюсов, который выбирает проектировщик.

Возвращаемым значением данной функции является матрица коэффициентов модального регулятора. Далее, необходимо сформировать начальные условия поиска в виде одномерного массива вещественных чисел для численного решения уравнения (5).

В общем случае с векторным управлением имеем  $n^2 + r^2$  неизвестных: первые  $Q$  неизвестных относятся к весовой матрице  $Q$ , а последние  $R$  неизвестных – к весовой матрице  $R$ . В случае диагональных матриц  $Q$  и  $R$  –  $10^{-3}$  неизвестных. Минимальную границу поиска для указанных матриц установим в значение  $10^{-3}$ . Исходя из возможностей системы MATLAB, в качестве решателя нелинейных алгебраических уравнений была выбрана функция *fsolve* (solve system of nonlinear equations) с установленными дополнительными опциями.

Программная реализация вышеописанных действия приведена в листинге 1.

```
% Листинг 1
Q = rand(n);
R = rand(r);
QR = [Q(:); R(:)];
Km = place(A, B, p);
minQ = 0.001*ones(size(Q(:)));
minR = 0.001*ones(size(R(:)));
MinQR = [minQ(:); minR(:)];
option = optimoptions('fsolve','Display','none','Algorithm',
'levenberg-marquardt','FunctionTolerance',1.0e-09);
[XoptimalQR, Fzero] = fsolve(@FunQR,MinQR,options,B,S,Er,Km,n,r);
```

Функция *rand* формирует случайные матрицы по нормальному закону распределения размерами  $10^{-7}$  и  $10^{-7}$ , соответственно. В опциях для функции *fsolve* установлен алгоритм решения Левенберга-Марквардта, и точность вычислений по исследуемой функции равна  $10^{-9}$ . Возвращаемое значение функции – одномерный массив *XoptimalQR* (вычисленные коэффициенты весовых матриц  $Q$  и  $R$ ), скаляр *Fzero* (значение функции *FunQR*).

```
Функция FunQR, установленная первым параметром в fsolve, приведена в листинге 2.% Листинг 2
function f = FunQR(QR, B, S, Er, Km, n, r)
Qn = QR(1:n*n);
Q = reshape(Qn, n, n);
Q = (Q * Q')/100;
Rr = QR(n*n + 1:end);
R = reshape(Rr, r, r);
R = (R * R')/100;
rightSide = ((B')*(S')*Q*S*B + (Er+B'*S'*Km')*R*(Er+Km*S*B));
fr = R - rightSide;
f = max(abs(fr(:)));
end
```

Первым аргументом функции *FunQR* является одномерный массив начальных приближений, остальные параметры принадлежат правой части соотношения оптимальности. Матрица  $S$  рассчитывается следующим образом:  $S = (A - BK_m)^{-1}$ , однако рекомендуется вычислять ее с помощью псевдообращения. Для этой цели MATLAB предоставляет функцию псевдообращения *pinv* (pseudoinverse). Первоначально массив  $R$  разбивается на матрицы  $R$  и  $R$  размерами  $\zeta$  и  $\zeta$ , соответственно, с помощью библиотечной функции *reshape*, после чего делаются симметрическими. Затем, рассчитывается правая часть соотношения оптимальности, вычисляется разница относительно левой части, и результат записывается в матрицу *fr*: Возвращаемое значение функции – максимальная разность левой и правой частей соотношения оптимальности.

Следующим этапом программной реализации является обработка результатов функции *fsolve* и переход к матрицам Фробениуса. Результат численного решения соотношения оптимальности в виде одномерного массива *XoptimalQR* записывается в соответствующие матрицы  $Q$  и  $Q$  с помощью функции *reshape*. Системная функция *eig* (eigenvalues) позволяет получить собственные числа матрицы, а *poly* (polynomial) – сформировать вектор коэффициентов характеристического полинома. По определению, весовые коэффициенты квадратичного функционала качества являются симметричными положительно определенными. Для достижения симметричности приведенные к матрицам Фробениуса весовые коэффициенты  $Q$  и  $Q^T$  умножим на их транспонированные

образы  $R^T$  и  $R^T$ , соответственно (операция транспонирования в MATLAB обозначается как «'» или «.'»). Для того чтобы уверенно получить неотрицательные коэффициенты данных матриц, авторы рекомендуют добавить небольшое положительное значение ко всем элементам. Например, величину  $\text{sqrt}(\text{eps})$ , примерно равную  $1.4901e-08$ .

На данном этапе завершается решение обратной задачи оптимальной стабилизации. Теперь необходимо произвести коррекцию переходных процессов путем решения прямой задачи оптимальной стабилизации, которая также находит широкое применение в различных работах [16–19], на основе полученных весовых коэффициентов. При решении данной проблемы авторы, опираясь на результаты работы [20], отдают предпочтение подходу, основанному на вариационной задаче Лагранжа. Проведем эксперимент, приняв следующие матрицы объекта (1–2) и начальные условия поиска уравнения (5):

Матрица состояния (матрица  $A$ ) 7-го порядка:

0.1143	1.1695	0.1370	0.1961	-0.4125	0.1690	-0.9763
0.1431	-0.3801	-0.2744	1.4701	-0.1427	-1.3123	0.4121
0.4055	-0.0956	-1.2651	-0.7575	-0.4488	-0.6744	1.1313
0.0863	0.5198	-0.1194	-0.6494	-1.4745	-0.0714	0.2440
-0.7640	0.6937	0.7209	-1.1753	0.3293	-0.7510	0.2992
-1.6547	-0.7745	1.0948	-0.3404	0.8274	-0.9691	1.5421
1.2796	-0.6089	-1.2139	0.0479	-0.5039	-1.1611	1.7961

Матрица входа (матрица  $B$ ) размерностью  $7 \times 4$ :

0.8851	0.2756	0.2202	0.2087
0.9535	0.8198	0.3043	0.4124
0.3451	0.0848	0.6404	0.1164
0.4570	0.9969	0.3319	0.0099
0.9350	0.6484	0.3271	0.6886
0.2431	0.3768	0.0292	0.8946
0.1684	0.5285	0.8357	0.9129

Матрица выхода (матрица  $C$ ): 1 1 1 1 1 1 1

Матрица связи  $D = 0$ .

Допущение для начальных условий матрицы  $Q$  ( $7 \times 7$ ):

0.0254	0.5898	0.0698	0.6123	0.4995	0.6787	0.4412
0.5865	0.5134	0.9304	0.8344	0.6693	0.6350	0.9772
0.9352	0.1253	0.4969	0.2423	0.9711	0.0057	0.2566
0.5290	0.9051	0.0691	0.0076	0.5679	0.0953	0.3142
0.1907	0.7804	0.3191	0.4413	0.0182	0.9862	0.5644
0.9886	0.2671	0.9480	0.0701	0.5247	0.8972	0.5458
0.3528	0.9613	0.8286	0.7500	0.6999	0.6866	0.3871

Допущение для начальных условий весовой матрицы  $R$  ( $4 \times 7$ ):

0.7184	0.4566	0.6679	0.4503
0.6501	0.7360	0.8778	0.6908
0.8912	0.0486	0.5498	0.7116
0.4328	0.4760	0.5170	0.1509

Коэффициенты матрицы модального управления  $K_m$  ( $4 \times 7$ ):

0.4137	1.8202	0.6789	-1.5894	1.7552	-0.5661	-2.1370
-0.4065	-0.4871	-0.1384	3.0131	-3.3887	1.4571	0.8644
2.0799	-0.6385	-2.3872	-1.5309	0.0249	-2.2994	1.4771
-1.0201	-0.5112	0.7979	-0.3175	1.7495	0.0056	1.7693

Далее приведены искомые величины, полученные в результате моделирования.

Матрица  $Q$  (результат функции *fsolve*):

0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003

Матрица  $R$  (результат функции *fsolve*):

0.0012	0.0012	0.0012	0.0012
0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
0.0011	0.0011	0.0011	0.0011

Коэффициенты матрицы оптимального регулятора  $K_p$ :

1.1242	-1.6758	-0.6913	1.9640	-4.1209	2.2014	1.5183
-1.4109	-0.2359	0.6167	-2.1230	2.5343	-1.0746	-0.4844
-0.3155	-0.0487	-0.0838	-0.4095	0.5632	-0.0119	-0.2536
2979.7545	973.0285	-1386.0966	3482.9799	-5352.8649	-1.1767349	319.2348

Длительность переходного процесса для системы с модальным регулятором: 33 с.

Длительность переходного процесса для системы с оптимальным регулятором: 6 с.

Ниже приведены диаграммы переходных процессов по всем переменным состояния ОУ (1) для системы с модальным (рис. 1) и оптимальным (рис. 2) регуляторами.

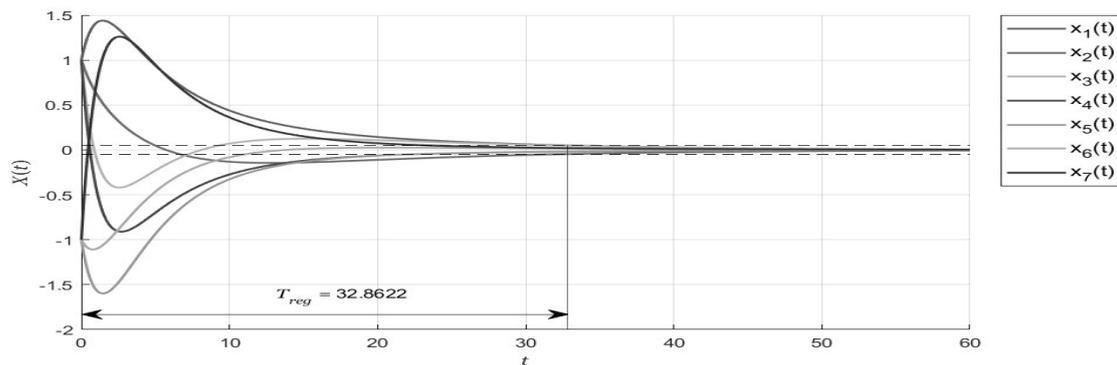


Рис 1. Переходные функции системы 7-го порядка с модальным регулятором  
Fig. 1. Transitional functions of a 7th order system with a modal regulator

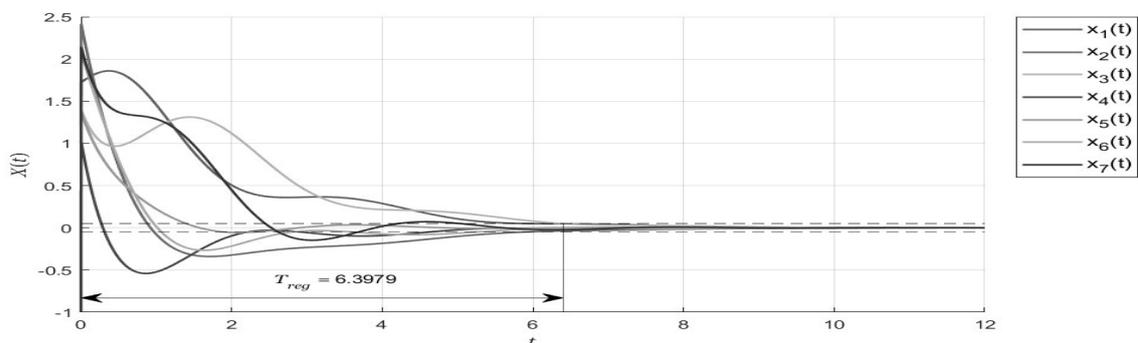


Рис 2. Переходные функции системы 7-го порядка с оптимальным регулятором  
Fig. 2. Transitional functions of a 7th order system with an optimal regulator

Построение приведенных выше диаграмм рекомендуется осуществлять с помощью команды *initial* (initial condition), которая позволяет моделировать движение системы из заданных начальных условий  $X(0) = X_0$ . В данном примере вектор  $X_0$  равен: 1 1 1 1 -1 -1 -1. Для наглядности диапазон допустимого отклонения переходных функций от установившегося

значения выбран относительно начальных условий путем уменьшения максимального значения на 95%. Таким образом, длительность переходного процесса будет определена, если в некоторый момент времени значение каждой из переходных функций будет меньше по абсолютной величине 0,05 и в последующем не нарушит данное условие.

**Вывод.** Анализируя результаты эксперимента, можно сделать вывод о том, что регулятор, полученный путем расчета линейно-квадратичной задачи на основе решения обратной задачи оптимальной стабилизации, позволяет существенно уменьшить время регулирования  $T_{reg}$  (длительность переходного процесса). Обратная задача оптимальной стабилизации находит свое отражение в публикациях многих авторов при различных постановках и подходах к решению, что подчеркивает актуальность данной проблемы.

Авторами проведены эксперименты численного решения соотношения оптимальности для систем до 15-го порядка включительно. Матрицы систем управления формировались случайным образом по нормальному закону распределения и отвечали критерию полной управляемости по Калману. На практике зачастую размерности исследуемых ОУ не превышают 10-го порядка. Элемент новизны, предложенной авторами инженерной методики, заключается в совокупности модального и оптимального управления на основе соотношения оптимальности, что позволяет существенно уменьшить время переходного процесса в скорректированной системе управления.

#### Библиографический список:

1. Petersen I. R., Hollot C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems / I. R. Petersen, C. V. Hollot //Automatica. – 1986. – Vol. 22, №. 4. – P. 397-411.
2. Мишин П. А., Немчинова П. А. Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта с векторным управлением //E-Scio. – 2022. – № 4 (67). – С. 231-238.
3. Мишин П. А., Немчинова П. А. Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта с векторным управлением/ П. А. Мишин, П. А. Немчинова //Математика и математическое моделирование. –2022. – С. 377-378.
4. Афонин В. В. Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта со скалярным управлением//Вестник Мордовского университета. 1998. № 3-4. – С. 122-123.
5. Мишин П. А., П. А. Немчинова. Анализ точности вычисления оптимального регулятора на основе соотношения оптимальности в системе matlab и языке Python //E-Scio. 2022. № 11 (74). – С. 511-518.
6. Афонин В. В., Мурюмин С. М. Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления. //Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. –Т. 16, № 2. – С. 118-120.
7. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бинوم. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
8. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления//Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, №. 6. – С. 838-859.
9. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. Высшая школа, 2008. 480 с.
10. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению//Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 7-46.
11. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Ferron, V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. / Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan V. – SIAM, 1994. – 193 p.
12. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. Optimization and asymptotic stability//International Journal of Control. – 2016. – С. 1-7.
13. Юревич Е. И. Теория автоматического управления. / Е. И. Юревич. – М.: Энергия, 1969. – 375 с.
14. Зубов Н. Е., Рябченко В. Н. О вычислении псевдообратной матрицы. Общий случай / Н. Е. Зубов, В. Н. Рябченко //Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2018. – №1 (76). – С. 16-25.
15. Германенко М. И., Панюков А. В. Параллельные алгоритмы безошибочного вычисления матрицы Мура-Пенроуза. //Параллельные вычислительные технологии. – 2008. – С. 215-215.
16. Veremey E. Spectral approach to H-optimization of plasma control//International Journal of Modern Physics A. – 2009. – Т. 24, №. 5. – С. 1009-1018.
17. Аполонский В. В., Тарарыкин С. В. Методы синтеза редуцированных регуляторов состояния линейных динамических систем//Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2014. – №. 6. – С. 25-33.
18. Антоник В. Г., Срочко В. А. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, №. 4. – С. 564-572.
19. Романова И. К. Об одном подходе к определению весовых коэффициентов метода пространства состояний / И. К. Романова // Наука и Образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2015. – №. 4. – С. 105-129.

20. Афонин В. В., Мишин П. А., Мишина П. А. Вариационный подход к синтезу оптимального регулятора в задаче стабилизации // E-Scio. – 2023. – № 1 (76). – С. 299-315.

#### References

1. Petersen I. R., Hollot C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems / I. R. Petersen, C. V. Hollot. *Automatica*. 1986; 22(4): 397-411.
2. Mishin P. A., Nemchinova P. A. Analytical control of solving the problem of optimal stabilization of a stationary object with vector control. *E-Scio*. 2022;4 (67): 231-238. (In Russ )
3. Mishin P. A., Nemchinova P. A. Analytical control of solving the problem of optimal stabilization of a stationary object with vector control. *Mathematics and mathematical modeling*. 2022; 377-378. (In Russ )
4. Afonin V. V. Analytical control of solving the problem of optimal stabilization of a stationary object with scalar control. *Bulletin of the Mordovian University*. 1998;3-4:122-123. (In Russ )
5. Mishin P. A., P. A. Nemchinova. Analysis of the accuracy of calculating the optimal regulator based on the optimality ratio in matlab and Python,. *E-Scio*. 2022;11 (74):511-518. (In Russ )
6. Afonin V. V., Muryumin S. M. Optimality relations in a linear-quadratic control problem. *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. 2014;16(2):118-120. (In Russ )
7. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical methods. M.: Binom. Laboratory of Knowledge, 2003; 632. (In Russ )
8. Balashevich N. V., Gabasov R., Kirillova F. M. Numerical methods of software and positional optimization of linear control systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2000; 40(6): 838-859. (In Russ )
9. Kireev V.I., Pantelev A.V. Numerical methods in examples and problems. *Higher School*,2008;480.(In Russ )
10. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. Difficult problems of linear control theory. Some approaches to the solution. *Automation and telemekhanics*. 2005; 5:7-46. (In Russ )
11. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Ferron, V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, 1994;193.
12. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Optimization and asymptotic stability. *International Journal of Control*. 2016; 1–7.
13. Yurevich E. I. Theory of automatic control. M.: *Energiya*, 1969; 375. (In Russ )
14. Zubov N.E., Ryabchenko V.N. On the calculation of a pseudo-inverse matrix. General case. *Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. The series «Natural Sciences»*. 2018;1 (76):16-25.(In Russ )
15. Germanenko M. I., Panyukov A.V. Parallel algorithms for error-free calculation of the Moore-Penrose matrix. *Parallel computing technologies*. 2008; 215-215. (In Russ )
16. Veremey E. Spectral approach to H-optimization of plasma control. *International Journal of Modern Physics A*. 2009; 24(5):1009-1018.
17. Apolonsky V.V., Tararykin S.V. Methods of synthesis of reduced state regulators of linear dynamical systems. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences.Theory and control systems*.2014;6:25-33.(In Russ )
18. Antonik V. G., Urgent V. A. Projection method in linear-quadratic optimal control problems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998; 38 (4): 564-572. (In Russ )
19. Romanova I.K. On one approach to determining the weight coefficients of the state space method. *Science and Education: Scientific Edition of Bauman Moscow State Technical University*.2015;4:105-129(In Russ )
20. Afonin V. V., Mishin P. A., Mishina P. A. Variational approach to synthesis of optimal regulator in the stabilization problem. *E-Scio*. 2023;1 (76): 299-315.(In Russ )

#### Сведения об авторах:

Владимир Валерьевич Никулин, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой инфокоммуникационных технологий и систем связи; [nikulinvv@mail.ru](mailto:nikulinvv@mail.ru)

Мишин Павел Александрович, студент, кафедра автоматизированных систем обработки информации и управления; [pavel.mishinfz@gmail.com](mailto:pavel.mishinfz@gmail.com)

Мишина Полина Андреевна, студент, кафедра автоматизированных систем обработки информации и управления; [polya.nemchinova@gmail.com](mailto:polya.nemchinova@gmail.com)

#### Information about the authors:

Vladimir V. Nikulin, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Head of the Department of Infocommunication Technologies and Communication Systems; [nikulinvv@mail.ru](mailto:nikulinvv@mail.ru)

Pavel A. Mishin, Student, Department of Automated Information Processing and Control Systems; [pavel.mishinfz@gmail.com](mailto:pavel.mishinfz@gmail.com)

Polina A. Mishina, Student, Department of Automated Information Processing and Control Systems; [polya.nemchinova@gmail.com](mailto:polya.nemchinova@gmail.com)

#### Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 06.07.2023.

Одобрена после рецензирования/ Reviced 01.08.2023.

Принята в печать/ Accepted for publication 01.08.2023.